

# 効率的な矩形板座屈解析の一方法

正員 正岡孝治\*      正員 Sherif M. H. Rashed\*\*  
正員 上田幸雄\*\*\*

An Efficient Method of Buckling Analysis of Rectangular Plates

by Kouji Masaoka, *Member*      Sherif M. H. Rashed, *Member*  
Yukio Ueda, *Member*

## Summary

At present, the finite element method has become a standard tool directly and widely applied to ship structural design. One important application is the overall analysis of ship hull or a large portion of it to evaluate stresses acting on different members. Although accurate results may be obtained by the finite element method, the accuracy of these results depends on the way they are used. For example, when plate buckling strength under combined loads is evaluated approximate buckling interaction equations, the inaccuracy of these equations may diminish the value of the accurate stress analysis by the finite element method.

In this paper, an accurate and efficient calculation method of the buckling strength of a rectangular flat plate is presented. The boundary condition is any combination of being simply supported and fixed, and the plate is subjected to combined two directional axial stresses ( $\sigma_x^0$  and  $\sigma_y^0$ ), inplane shear ( $\tau_{xy}$ ) and two directional inplane bending ( $\sigma_x^b$  and  $\sigma_y^b$ ). Biharmonic deflection function which satisfy the boundary conditions is assumed and made to satisfy the boundary conditions. The principle of virtual work is applied to formulate a general eigenvalue problem in a matrix form. Solution of this problem provides the buckling stress and the corresponding buckling deformation pattern. The accuracy of this method is estimated. The same method is used with any boundary and loading conditions, and is implemented in one compact and efficient computer program. The buckling values may be more accurate than those by the finite element method with less computer time.

## 1. 緒 言

計算機の発達とそれをとりまく環境の整備により、有限要素法が船体構造設計時の応用解析へ直接適用されるようになった。有限要素法は強力なツールであり精度の高い計算結果を与えるが、その精度を保持しながらそれに続く強度評価につながなければ、価値を低下させることになる。その一例が座屈強度評価である。

船体構造の中で座屈評価を必要とする構造要素に矩形板がある。矩形板の座屈強度の推定は船級協会等が示した簡易式を用いることができるが文献<sup>1)</sup>で示したとおり精度はあまりよくない。本論文では各辺が固定または単純支持の組み合わせで2方向の圧縮、剪断、2方向の面内曲げが作用する矩形板の座屈応力を精度よく求める方法を述べる。

本論文では矩形板の座屈値を求めるために仮想仕事の原理から導かれる基礎方程式をもとに、少し工夫をこらした処理をした後、一般固有値問題としてマトリックスを作成して解く。この方法は、古典的な解法であり、1930年前後にかなり研究されている<sup>2)3)</sup>。しかし、吉識等<sup>4)</sup>も指摘しているとおり理論的な統一性に乏しい。その理由の一つに各文献間の撓み関数が統一されていないことがあげられる。吉識等は撓み関数をベキ級数として問題を解いたが、本研究ではより収束性のよい重調和級数により撓み関数の統一化

\* 大阪府立大学工学部

\*\* 日本エムエスシー株式会社

\*\*\* 大阪大学溶接工学研究所

原稿受理 平成4年7月9日  
秋季講演会において講演 平成4年11月9, 10日

をはかった。

本解析法による座屈問題の解析結果の精度は撓み級数の項数に依存し項数が少ないと精度が悪くなり、項数が多いと精度はよくなるが計算時間を要する。最適の項数を検討し、それによって高精度かつ効率的に座屈応力値が求まることを示す。

## 2. 理 論

### 2.1 基礎方程式の導出

対象とする矩形平板の寸法、座標系は Fig. 1 に示す。各辺が固定または単純支持の矩形板の座屈問題を解くための基礎方程式は仮想仕事の原理から導かれ式(1)である。

$$\int_0^a \int_0^b \left[ \sigma_x^a t \frac{\partial w}{\partial x} \frac{\partial \delta w}{\partial x} + \sigma_y^a t \frac{\partial w}{\partial y} \frac{\partial \delta w}{\partial y} + \tau_{xy} t \left( \frac{\partial w}{\partial x} \frac{\partial \delta w}{\partial y} + \frac{\partial w}{\partial y} \frac{\partial \delta w}{\partial x} \right) + \sigma_x^b t (2y-1) \frac{\partial w}{\partial x} \frac{\partial \delta w}{\partial x} + \sigma_y^b t (2x-1) \frac{\partial w}{\partial y} \frac{\partial \delta w}{\partial y} + D \left\{ \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} \frac{\partial^2 \delta w}{\partial x^2} + 2 \frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y} \frac{\partial^2 \delta w}{\partial x \partial y} + \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} \frac{\partial^2 \delta w}{\partial y^2} \right\} \right] dx dy = 0. \quad (1)$$

ここで、 $\sigma_x^a$  は  $x$  方向の軸応力、 $\sigma_y^a$  は  $y$  方向の軸応力、 $\tau_{xy}$  は剪断応力、 $\sigma_x^b$  は  $x$  方向の面内曲げ応力、 $\sigma_y^b$  は  $y$  方向の面内曲げ応力で Fig. 1 に示すとおりであり、矢印で示す方向が正の応力である。 $w$  は撓みで、 $\delta w$  は仮想撓みである。 $D$  は曲げ剛性 ( $= Et^3/12(1-\nu^2)$ )、 $t$  は板厚、 $E$  はヤング率、 $\nu$  はポアソン比である。

式(1)は無次元化すると式(2)になる。

$$\int_0^1 \int_0^1 \left\{ \bar{\sigma}_x^a \frac{\partial \bar{w}}{\partial \bar{x}} \frac{\partial \delta \bar{w}}{\partial \bar{x}} + \bar{\sigma}_y^a \frac{\partial \bar{w}}{\partial \bar{y}} \frac{\partial \delta \bar{w}}{\partial \bar{y}} + \bar{\tau}_{xy} \left( \frac{\partial \bar{w}}{\partial \bar{x}} \frac{\partial \delta \bar{w}}{\partial \bar{y}} + \frac{\partial \bar{w}}{\partial \bar{y}} \frac{\partial \delta \bar{w}}{\partial \bar{x}} \right) + \bar{\sigma}_x^b (2\bar{y}-1) \frac{\partial \bar{w}}{\partial \bar{x}} \frac{\partial \delta \bar{w}}{\partial \bar{x}} + \bar{\sigma}_y^b (2\bar{x}-1) \frac{\partial \bar{w}}{\partial \bar{y}} \frac{\partial \delta \bar{w}}{\partial \bar{y}} \right\} d\bar{x} d\bar{y} = 0.$$

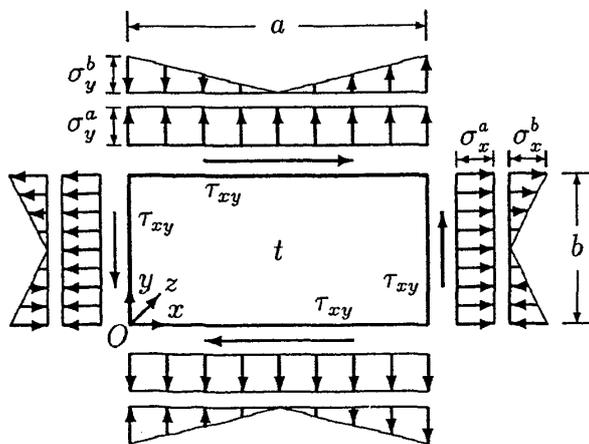


Fig. 1 Dimensions and coordinate system of a rectangular plate and positive acting stresses.

$$\begin{aligned} & + \frac{1}{\alpha^2} \frac{\partial^2 \bar{w}}{\partial \bar{x}^2} \frac{\partial^2 \delta \bar{w}}{\partial \bar{x}^2} + 2 \frac{\partial^2 \bar{w}}{\partial \bar{x} \partial \bar{y}} \frac{\partial^2 \delta \bar{w}}{\partial \bar{x} \partial \bar{y}} \\ & + \alpha^2 \frac{\partial^2 \bar{w}}{\partial \bar{y}^2} \frac{\partial^2 \delta \bar{w}}{\partial \bar{y}^2} \Big\} d\bar{x} d\bar{y} = 0. \end{aligned} \quad (2)$$

ここで、 $\alpha$  はアスペクト比 ( $= a/b$ ) であり、 $\bar{\sigma}_x^a$ 、 $\bar{\sigma}_y^a$ 、 $\bar{\tau}_{xy}$ 、 $\bar{\sigma}_x^b$ 、 $\bar{\sigma}_y^b$ 、 $\bar{w}$ 、 $\bar{x}$ 、 $\bar{y}$  は無次元量であり次のように定義する。

$$\bar{\sigma}_x^a = \frac{12(1-\nu^2)b^2}{Et^2} \sigma_x^a, \quad \bar{\sigma}_y^a = \frac{12(1-\nu^2)a^2}{Et^2} \sigma_y^a,$$

$$\bar{\tau}_{xy} = \frac{12(1-\nu^2)ab}{Et^2} \tau_{xy},$$

$$\bar{\sigma}_x^b = \frac{12(1-\nu^2)b^2}{Et^2} \sigma_x^b, \quad \bar{\sigma}_y^b = \frac{12(1-\nu^2)a^2}{Et^2} \sigma_y^b,$$

$$\bar{w} = w/t, \quad \bar{x} = x/a, \quad \bar{y} = y/b.$$

式(2)の撓みと仮想撓みを式(3)のように  $\bar{x}$  方向の撓み級数と  $\bar{y}$  方向の撓み級数に分離できる形にする。

$$\bar{w} = \sum_{k=1}^m \sum_{l=1}^n \{ \bar{w}_{kl} X_k(\bar{x}) Y_l(\bar{y}) \},$$

$$\delta \bar{w} = \sum_{i=1}^m \sum_{j=1}^n \{ \delta \bar{w}_{ij} X_i(\bar{x}) Y_j(\bar{y}) \}. \quad (3)$$

式(3)を用いると式(2)の積分も各項毎に  $\bar{x}$  方向と  $\bar{y}$  方向の積分に分離することができる。式(2)の積分も分離した上で式をさらに簡潔に表現するために式(4)を定義する。

$$I_{ik}^{pq} = \int_0^1 \frac{\partial^p X_i(\bar{x})}{\partial \bar{x}^p} \frac{\partial^q X_k(\bar{x})}{\partial \bar{x}^q} d\bar{x},$$

$$J_{jl}^{pq} = \int_0^1 \frac{\partial^p Y_j(\bar{y})}{\partial \bar{y}^p} \frac{\partial^q Y_l(\bar{y})}{\partial \bar{y}^q} d\bar{y},$$

$$I_{ik}^b = \int_0^1 (2\bar{x}-1) X_i(\bar{x}) X_k(\bar{x}) d\bar{x},$$

$$J_{jl}^b = \int_0^1 (2\bar{y}-1) Y_j(\bar{y}) Y_l(\bar{y}) d\bar{y}. \quad (4)$$

$I_{ik}^{pq}$ 、 $J_{jl}^{pq}$ 、 $I_{ik}^b$ 、 $J_{jl}^b$  は積分を定義する記号であるから以後“積分値”と呼ぶ。また、式(4)の定義式には式(5)の性質がある。

$$I_{ik}^{pq} = I_{ki}^{qp}, \quad J_{jl}^{pq} = J_{lj}^{qp}. \quad (5)$$

式(3)と式(4)を用いて式(2)を計算した結果が任意の仮想撓みの成分  $\delta \bar{w}_{ij}$  について成立するためには式(6)を満足しなければならない。

$$\begin{aligned} & \sum_{k=1}^m \sum_{l=1}^n [ \bar{w}_{kl} \{ \bar{\sigma}_x^a I_{ik}^{10} J_{jl}^{00} + \bar{\sigma}_y^a I_{ik}^{00} J_{jl}^{11} + \bar{\tau}_{xy} (I_{ik}^{10} J_{jl}^{01} \\ & + I_{ik}^{01} J_{jl}^{10}) + \bar{\sigma}_x^b I_{ik}^{11} J_{jl}^b + \bar{\sigma}_y^b I_{ik}^b J_{jl}^{11} + \frac{1}{\alpha^2} I_{ik}^{22} J_{jl}^{00} \\ & + 2 I_{ik}^{11} J_{jl}^{11} + \alpha^2 I_{ik}^{22} J_{jl}^{22} \} ] = 0, \text{ for all } i, j. \end{aligned} \quad (6)$$

式(5)と式(6)より、必要な積分値は  $I_{ik}^{00}$ 、 $I_{ik}^{01}$ 、 $I_{ik}^{11}$ 、 $I_{ik}^{22}$ 、 $I_{ik}^b$ 、 $J_{jl}^{00}$ 、 $J_{jl}^{01}$ 、 $J_{jl}^{11}$ 、 $J_{jl}^{22}$ 、 $J_{jl}^b$  であることがわかる。これらの積分値を具体的に決定するためには、まず式(4)に表れる撓み級数  $X_i(\bar{x})$ 、 $Y_j(\bar{y})$  を具体的に決定しなければならない。

### 2.2 撓み級数

式(3)で定義した撓み関数の  $X_i(\bar{x})$ 、 $Y_j(\bar{y})$  は基本的に境界条件を満足する級数であればどのような級数でもよいが、本研究では少ない項数で座屈波形をうまく表現でき

重調和関数を撓み関数とする。 $\bar{x}$  方向の撓み関数は式(7)、境界条件は式(8)である。

$$X_i(\bar{x}) = A_i \cos(p_i \bar{x}) + B_i \sin(p_i \bar{x}) + C_i \cosh(p_i \bar{x}) + D_i \sinh(p_i \bar{x}). \quad (7)$$

$$\left. \begin{aligned} X_i(\bar{x}_0) = 0, X_i'(\bar{x}_0) = 0, & \text{(固定辺),} \\ X_i(\bar{x}_0) = 0, X_i'(\bar{x}_0) = 0, & \text{(単純支持辺).} \end{aligned} \right\} \quad (8)$$

ここで、 $\bar{x}_0$  は境界の位置であり Fig. 1 の矩形板の左辺では  $\bar{x}_0 = 0$ 、右辺では  $\bar{x}_0 = 1$  である。また、例えば  $X_i'(\bar{x}_0)$  は  $\partial X_i(\bar{x}_0)/\partial \bar{x}$  を意味する。

式(7)の  $A_i, B_i, C_i, D_i, p_i$  は境界条件である式(8)より求まる値である。

$Y_i(\bar{y})$  も式(7)、式(8)と同じ形であるので説明は省略する。

### 2.3 積分値

撓み級数である式(7)を式(4)へ代入すると、積分値は求まるが、このとき、積分値を数値積分により求めると、高次の撓み級数を含む積分値に対しては多くの積分点を取らないと精度が悪くなる。本研究の目的である高精度の座屈値を得るためには撓み級数の項数を高次まで取る必要がある、その高次の撓み級数を含む積分値こそ高精度で求めなければならない。そこで、積分値を数値積分ではなくて数式積分により求める。しかし、式(4)を数式積分することは、両辺単純支持ならば比較的簡単であるが、その他の場合は計算が困難であるし、実際に計算すると非常に複雑な解しか得られない。

そこで、式(4)に対して部分積分を繰り返すことにより、積分値を  $X_i(\bar{x})$  の導関数の境界での値、つまり、 $X_i'(0), X_i''(0), X_i'''(0), X_i'(1), X_i''(1), X_i'''(1)$  などによって表す。この方法の手順は文献5)に詳しい。以後、この撓み級数の導関数の境界での値を“境界値”と呼ぶことにする。この方針に従い式(4)を計算すると、式(9)を得る。

$i = k$  のとき、

$$I_{ik}^{00} = -\frac{1}{2p_i^4} X_i'(1) X_i'''(1) + \frac{1}{4p_i^4} \{X_i''(1)\}^2,$$

$$I_{ik}^{01} = \frac{1}{p_i^4} X_i'(0) X_i'''(0) - \frac{1}{2p_i^4} \{X_i''(0)\}^2 - \frac{1}{p_i^4} X_i'(1) X_i'''(1) + \frac{1}{2p_i^4} \{X_i''(1)\}^2,$$

$$I_{ik}^{11} = \frac{1}{4p_i^4} X_i'(0) X_i'''(0) - \frac{1}{4p_i^4} X_i''(1) X_i'''(1) + \frac{1}{4p_i^4} \{X_i'''(1)\}^2 + \frac{1}{4} \{X_i'(1)\}^2,$$

$$I_{ik}^{22} = p_i^4 I_{ik}^{00},$$

$$I_{ik}^b = -\frac{5}{2p_i^4} \{X_i'(0)\}^2 - \frac{3}{2p_i^8} \{X_i'''(0)\}^2 + \frac{5}{2p_i^4} \{X_i'(1)\}^2 + \frac{3}{2p_i^8} \{X_i'''(1)\}^2.$$

$i \neq k$  のとき、

$$I_{ik}^{00} = I_{ik}^{22} = 0,$$

$$I_{ik}^{01} = \frac{1}{p_i^4 - p_k^4} \{-X_i'''(0) X_k'(0) + X_i'(0) X_k''(0) - X_i'(0) X_k'''(0) + X_i'''(1) X_k'(1) - X_i''(1) X_k''(1) + X_i'(1) X_k'''(1)\},$$

$$I_{ik}^{11} = \frac{1}{p_i^4 - p_k^4} \{X_i'''(0) X_k''(0) - X_i''(0) X_k'''(0) - X_i'''(1) X_k''(1) + X_i''(1) X_k'''(1)\},$$

$$I_{ik}^b = \frac{4}{(p_i^4 - p_k^4)^2} \{- (p_i^4 + p_k^4) X_i'(0) X_k'(0) - 2 X_i'''(0) X_k'''(0) + (p_i^4 + p_k^4) X_i'(1) X_k'(1) + 2 X_i'''(1) X_k'''(1)\} \quad (9)$$

$\bar{y}$  方向の積分値も同様であるので説明を省略する。

式(9)により式(4)の数式積分は完了するので、あとは各境界条件に対する境界値を求めて式(9)に代入すればよい。

### 2.4 境界値

この節では各境界条件に対する境界値を求める。 $X_i(\bar{x})$  に対する境界値も  $Y_i(\bar{y})$  に対する境界値も同様の解法で求まるから、ここでは  $X_i(\bar{x})$  に対する境界値だけを示す。求め方はどの境界条件の場合も同じであるので両辺固定の場合を詳しく解説し、他は求めた結果のみを示す。

#### 2.4.1 両辺固定の場合

両辺固定の場合、式(8)を式(7)に代入すると式(10)と式(11)を得る。

$$\cos p_i \cosh p_i - 1 = 0. \quad (10)$$

$$A_i (= -C_i) : B_i (= -D_i) = -\sinh p_i + \sin p_i : \cosh p_i - \cos p_i. \quad (11)$$

ここで、仮に  $A_i (= -C_i) = -\sinh p_i + \sin p_i$ 、 $B_i (= -D_i) = \cosh p_i - \cos p_i$  とすると積分値  $I_{ik}^{00}$  は式(12)になる。

$$I_{ik}^{00} = \begin{cases} (\cos p_i \sinh p_i - \sin p_i \cosh p_i)^2, & i = k \text{ のとき,} \\ 0, & i \neq k \text{ のとき.} \end{cases} \quad (12)$$

ここで、式(12)は  $i = k$  のとき大きな  $p_i$  に対して積分値  $I_{ik}^{00}$  は非常に大きな値となるために数値誤差の原因になる。

そこで、今度は逆に積分値  $I_{ik}^{00}$  が式(13)を満足するように撓み級数の  $A_i, B_i, C_i, D_i$  の値を決めることにする。

$$I_{ik}^{00} = \begin{cases} 1, & i = k \text{ のとき,} \\ 0, & i \neq k \text{ のとき.} \end{cases} \quad (13)$$

積分値が式(13)を満足するとき  $X_i(\bar{x})$  は区間  $[0, 1]$  に対して正規直交関数であり、式(12)に対して言った誤差の原因はなくなる。

さらに、 $A_i, B_i, C_i, D_i$  を簡潔に表現するために、次のことを考える。式(10)の解  $p_i$  は  $1.5\pi, 2.5\pi, 3.5\pi, \dots$  に近い値である。そこで、式(14)のように  $p_i$  を  $p_{0i} = 1.5\pi, 2.5\pi, 3.5\pi, \dots$  と微小量  $dp_i$  に分離する。

$$p_i = p_{0i} + dp_i. \quad (14)$$

$p_{0i}$  と  $dp_i$  の値を Table 1 に示す。式(14)を定義することにより  $\cos p_i, \sin p_i, \cosh p_i, \sinh p_i$  を  $\cos dp_i, \sin dp_i$  で表すことができる。その変換式を式(15)に示す。

Table 1  $p_{0i}$  and  $dp_i$  for both edges being clamped.

$i$	$p_{0i}$	$dp_i$
1	$1.5\pi$	+0.01765176
2	$2.5\pi$	-0.00077701
3	$3.5\pi$	+0.00003355
4	$4.5\pi$	-0.00000145
5	$5.5\pi$	+0.00000006
6	$6.5\pi$	0
$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$

Table 2 Infinitesimal values of  $dF_i$  and  $dH_i$ .

$i$	$dF_i$	$dH_i$
1	-0.01749779	-0.02749700
2	+0.00077731	+0.00120484
3	-0.00003355	-0.00005203
4	+0.00000145	+0.00000225
5	-0.00000006	-0.00000010
6	0	0
$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$

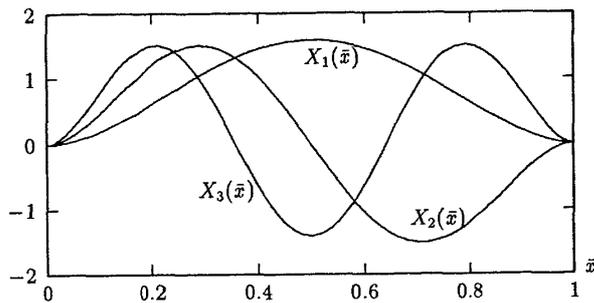


Fig. 2 1st, 2nd and 3rd mode deflection shapes of biharmonic series in the case of both edges clamped.

$$\cos p_i = -(-1)^i \sin dp_i, \sin p_i = (-1)^i \cos dp_i,$$

$$\cosh p_i = \frac{-(-1)^i}{\sin dp_i}, \sinh p_i = \frac{-(-1)^i \cos dp_i}{\sin dp_i}. \quad (15)$$

式(14)と式(15)を考慮に入れると、式(13)を満足する  $A_i, B_i, C_i, D_i$  は式(16)のように決定できる。

$$A_i = -C_i = -1, B_i = -D_i = F_i. \quad (16)$$

ここで、

$$F_i = 1 + dF_i = \frac{\cos dp_i}{1 + \sin dp_i}$$

$dF_i$  は Table 2 に示す。

両辺固定の場合の正規化された撓み関数  $X_i(\bar{x})$  の3次までの撓み形を Fig. 2 に示す。

式(15)と式(16)を式(7)へ代入することにより境界値として式(17)を得る。

$$X_i''(0) = 2p_i^2, X_i'''(0) = -2p_i^3 F_i, X_i''(1) = -2(-1)^i p_i^2,$$

$$X_i'''(1) = -2(-1)^i p_i^3 F_i, (\text{The others}) = 0. \quad (17)$$

以上が両辺固定の境界値を求める方法である。

### 2.4.2 固定-単純支持の場合

両辺固定の場合と同じ要領で各値を求める。式(7)の各係数を式(18)に示す。

$$A_i = -C_i = -1, B_i = -D_i = G_i, p_i = p_{0i} + dp_i. \quad (18)$$

$p_{0i}$  と  $dp_i$  の値を Table 3 に示す。固定-単純支持の場合の正規化された撓み関数  $X_i(\bar{x})$  を3次の撓み形まで Fig. 3 に示す。

境界値は式(19)になる。

$$X_i''(0) = 2p_i^2, X_i'''(0) = -2p_i^3 G_i, X_i'(1) = \sqrt{2}(-1)^i p_i / H_i,$$

Table 3  $p_{0i}$  and  $dp_i$  for being clamped-simply supported or simply supported-clamped.

$i$	$p_{0i}$	$dp_i$
1	$1.25\pi$	-0.00038850
2	$2.25\pi$	-0.00000072
3	$3.25\pi$	0
$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$

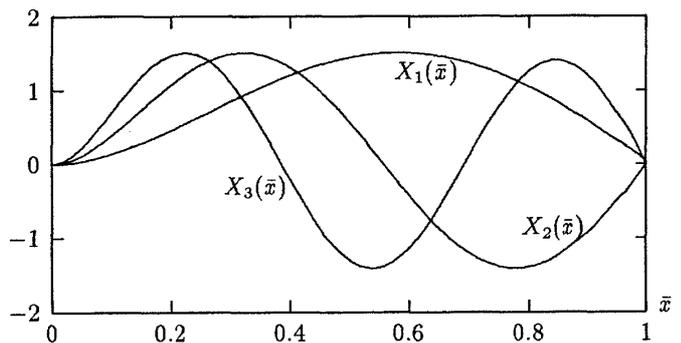


Fig. 3 1st, 2nd and 3rd mode deflection shapes of biharmonic series in case where the left edge is clamped and the right edge is simply supported.

$$X_i'''(1) = -\sqrt{2}(-1)^i p_i^3 H_i, (\text{The others}) = 0. \quad (19)$$

ここで、

$$H_i = 1 + dH_i = \frac{1 + (-1)^i \sqrt{2} \cos dp_i \sin dp_i}{\cos dp_i + \sin dp_i},$$

$$\frac{1}{H_i} = \frac{1 - (-1)^i \sqrt{2} \cos dp_i \sin dp_i}{\cos dp_i + \sin dp_i},$$

$$G_i = \sqrt{\frac{1}{2} \left( H_i^2 + \frac{1}{H_i^2} \right)} = \frac{\cos dp_i - \sin dp_i}{\cos dp_i + \sin dp_i}.$$

$dH_i$  の値は Table 2 に示す。

### 2.4.3 単純支持-固定の場合

単純支持-固定の場合は固定-単純支持の場合に似ている。式(7)の各係数を式(20)に示す。

$$A_i = C_i = 0, B_i = -\frac{1}{\sqrt{2}} \left( H_i + \frac{1}{H_i} \right),$$

$$D_i = -\frac{1}{\sqrt{2}} \left( -H_i + \frac{1}{H_i} \right), p_i = p_{0i} + dp_i. \quad (20)$$

境界値は式(21)になる。

$$\begin{aligned} X_i'(0) &= \sqrt{2} p_i / H_i, X_i'''(0) = -\sqrt{2} p_i^3 H_i, \\ X_i''(1) &= -2(-1)^i p_i^2, \\ X_i'''(1) &= -2(-1)^i p_i^3 G_i, (\text{The others}) = 0. \end{aligned} \quad (21)$$

ここで、 $p_i$ ,  $H_i$ ,  $G_i$  は固定-単純支持の場合と同じである。

#### 2.4.4 両辺単純支持の場合

両辺単純支持の場合は固定辺を含む場合に比べて、計算は容易である。式(7)の各係数を式(22)に示す。

$$A_i = C_i = D_i = 0, B_i = \sqrt{2}, p_i = \pi i. \quad (22)$$

境界値は式(23)になる。

$$\begin{aligned} X_i'(0) &= \sqrt{2} p_i, X_i'''(0) = -\sqrt{2} p_i^3, X_i(1) = \sqrt{2}(-1)^i p_i, \\ X_i'''(1) &= -\sqrt{2}(-1)^i p_i^3, (\text{The others}) = 0. \end{aligned} \quad (23)$$

#### 2.5 マトリックス表示

以上で、境界値が求まり、その境界値を式(9)へ代入することにより式(6)で必要となる積分値も求まった。

座屈応力の無次元量の比が  $\bar{\sigma}_x^{a0}$ ,  $\bar{\sigma}_y^{a0}$ ,  $\bar{\tau}_{xy}$ ,  $\bar{\sigma}_x^{b0}$ ,  $\bar{\sigma}_y^{b0}$  とわかっているとき式(24)の表現ができる。

$$\begin{aligned} \bar{\sigma}_x^a &= R \bar{\sigma}_x^{a0}, \bar{\sigma}_y^a = R \bar{\sigma}_y^{a0}, \bar{\tau}_{xy} = R \bar{\tau}_{xy}^0, \bar{\sigma}_x^b = R \bar{\sigma}_x^{b0}, \\ \bar{\sigma}_y^b &= R \bar{\sigma}_y^{b0}. \end{aligned} \quad (24)$$

ここで、 $R$  は座屈応力の無次元量の比から座屈応力の無次元量を求める際の係数である。

式(24)より式(6)は式(25)のようにマトリックス表示ができる。

$$([A] + R[B])\{\bar{w}_{ij}\} = 0. \quad (25)$$

式(25)を、一般固有値問題として解くと、 $m \times n$  個の固有値  $R$  と対応する  $m \times n$  個の固有ベクトル  $\{\bar{w}_{ij}\}$  を得る。ここで、 $R$  を式(24)に代入することにより座屈応力値の無次元量を得、 $\{\bar{w}_{ij}\}$  を式(3)に代入することにより座屈波形を得る。撓み級数が境界条件を満足する許容関数であるので解は上界になる。

### 3. 計算例

いくつかの計算例により本方法の有用性を示す。はじめに、3.1で本研究の撓み関数の収束性のよさを説明する。次に3.2で本解析法で短時間に精度よく矩形板の座屈値を求められることを述べる。

#### 3.1 重調和級数とベキ級数の座屈値の精度の比較

吉識等<sup>6)</sup>は境界条件を満足するベキ級数を撓み級数として座屈値を求めた。本研究では三角関数と双曲線関数により構成される重調和級数を撓み級数として座屈値を求めた。そこで、 $x$  方向の圧縮力と  $y$  方向の圧縮力が等しい、2軸圧縮を受ける一辺  $a$ 、板厚  $t$  の正方形板の座屈を考え、両者の精度を比較する。境界条件は Fig. 4 に示す4ケースを考える。撓みは撓み級数を最低次の1項だけとった場合と6項までとった場合をベキ級数と重調和級数の両者について考えた。撓み級数を6項までとる場合、対称性があるものは反対称成分を除いて低次の項から6項とった。仮定

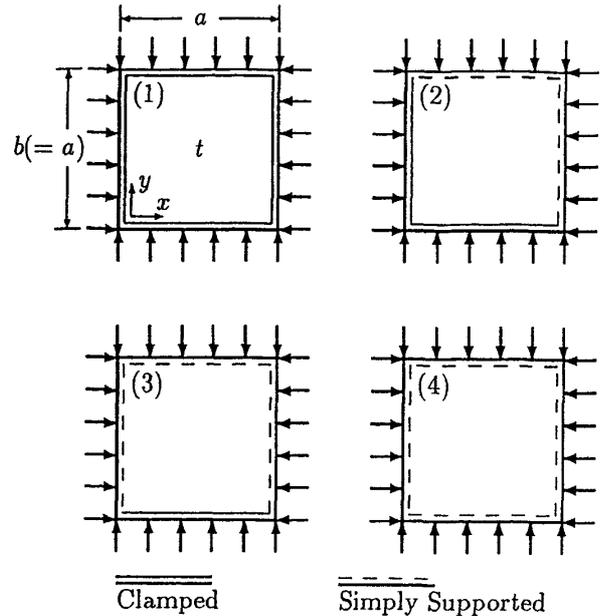


Fig. 4 Square plates used for comparison of the accuracy of biharmonic series with power series.

した、撓み級数を6項とった撓みはベキ級数も重調和級数も式(26)の形式をとる。

(1)と(4)の場合、

$$\begin{aligned} \bar{w} &= \bar{w}_{11} X_1(\bar{x}) Y_1(\bar{y}) + \bar{w}_{31} X_3(\bar{x}) Y_1(\bar{y}) \\ &+ \bar{w}_{13} X_1(\bar{x}) Y_3(\bar{y}) + \bar{w}_{51} X_5(\bar{x}) Y_1(\bar{y}) \\ &+ \bar{w}_{33} X_3(\bar{x}) Y_3(\bar{y}) + \bar{w}_{15} X_1(\bar{x}) Y_5(\bar{y}), \end{aligned}$$

(2)の場合、

$$\begin{aligned} \bar{w} &= \bar{w}_{11} X_1(\bar{x}) Y_1(\bar{y}) + \bar{w}_{21} X_2(\bar{x}) Y_1(\bar{y}) \\ &+ \bar{w}_{12} X_1(\bar{x}) Y_2(\bar{y}) + \bar{w}_{31} X_3(\bar{x}) Y_1(\bar{y}) \\ &+ \bar{w}_{22} X_2(\bar{x}) Y_2(\bar{y}) + \bar{w}_{13} X_1(\bar{x}) Y_3(\bar{y}), \end{aligned}$$

(3)の場合、

$$\begin{aligned} \bar{w} &= \bar{w}_{11} X_1(\bar{x}) Y_1(\bar{y}) + \bar{w}_{12} X_1(\bar{x}) Y_2(\bar{y}) \\ &+ \bar{w}_{31} X_3(\bar{x}) Y_1(\bar{y}) + \bar{w}_{13} X_1(\bar{x}) Y_3(\bar{y}) \\ &+ \bar{w}_{32} X_3(\bar{x}) Y_2(\bar{y}) + \bar{w}_{14} X_1(\bar{x}) Y_4(\bar{y}). \end{aligned} \quad (26)$$

ここで、ベキ級数に対しても重調和級数に対しても  $X_1(\bar{x})$  は  $\bar{x}$  方向に対する最低次の波形を表し、 $X_2(\bar{x})$ ,  $X_3(\bar{x})$ , ... は2次、3次、...の波形を表す。 $Y_1(\bar{y})$ ,  $Y_2(\bar{y})$ ,  $Y_3(\bar{y})$ , ... についても  $X_i(\bar{x})$  と同様である。座屈係数  $K$  の比較結果を Table 4 に示す。ここで、座屈係数  $K$  は式(27)で定義する。

$$K = \sigma_{cr} / \sigma_e. \quad (27)$$

ここで、

$$\sigma_{cr} : \text{座屈応力}, \sigma_e = \frac{\pi^2 E}{12(1-\nu^2)} \left( \frac{t}{b} \right)^2.$$

ベキ級数と本研究の座屈値の精度を比較するために、重調和級数で  $x$  方向に20項、 $y$  方向に20項 ( $m \times n = 20 \times 20$ ) とり誤差を評価する基準とし、その誤差を Table 4 において括弧の中の数値として表す。重調和級数の場合は少ない項数で高い精度を得ることがわかる。

Table 4 Buckling strength calculated by biharmonic series and power series.

K	Power series		Biharmonic series		
	1 term	6 terms	1 term	6 terms	20 × 20
(1)	5.4713 (3.16%)	5.4024 (1.86%)	5.3690 (1.23%)	5.3080 (0.08%)	5.3036
(2)	4.4581 (37.27%)	3.2603 (0.39%)	3.2586 (0.34%)	3.2496 (0.06%)	3.2476
(3)	3.4618 (30.01%)	2.6631 (0.02%)	2.6649 (0.08%)	2.6627 (0.00%)	2.6627
(4)	2.2291 (11.46%)	2.0000 (0.00%)	2.0000 (0.00%)	2.0000 (0.00%)	2.0000

### 3.2 重調和級数の項数と座屈値の精度

以上では重調和級数がベキ級数よりも座屈値の精度がよいことを示した。この節では本研究で示した重調和級数の項数と座屈値の精度・計算時間の関係を検討する。

#### 3.2.1 撓み級数の項数と誤差, 計算時間の関係

3.1で示したように正方形板の場合は1項や6項でも、よい精度の座屈値を得たが、矩形板の座屈解析をするときは正方形板よりも撓み級数の項数を多く必要とする。ここでは、アスペクト比が4の全辺単純支持の矩形板の剪断座屈問題を例に考える。撓み級数の項数による座屈値  $K$  (式(27))を Table 5 に示す。精度をわかりやすくするために、重調和級数で  $x$  方向に40項,  $y$  方向に10項 ( $m \times n = 40 \times 10$ ) としたときの座屈値を基準に誤差を示す。また SONY NEWS NWS-3865 で計算したときの実行時間も示す。1%程度の誤差で座屈値を得るためには  $m \times n = 5 \times 3$  くらいが適当であることがわかる。

#### 3.2.2 一成分の荷重が作用するときの撓み級数の最適の項数

Table 5 からわかるように座屈値の精度を重視すると非常に計算時間がかかるし、計算時間を少なくするために撓み級数の項数を少なくしすぎると座屈値の精度が悪くなる。よって、本解析法を船体構造解析時の座屈応力解析へ実用化するためには計算時間が少なくても、よい座屈値の精度を得る撓み級数の最適の項数を調べることが重要である。種々のアスペクト比, 境界条件の矩形板に軸圧縮, 剪断, 面内曲げのうち一成分のみ作用させ、最適の項数を調べた。その結果, 5%の精度を得るための撓み級数の最小の項数は式(28)で表すことができる。

$$m \times n = \text{raise}(\alpha + 2) \times 3, \alpha \geq 1 \text{ のとき,}$$

$$m \times n = 3 \times \text{raise}(1/\alpha + 2), \alpha < 1 \text{ のとき.} \quad (28)$$

ここで,  $m$  は  $x$  方向の撓み級数の項数,  $n$  は  $y$  方向の撓み級数の項数,  $\alpha$  はアスペクト比 ( $= a/b$ ) である。raise( $x$ ) は  $x$  の小数部を切り上げることを意味する。

式(28)はあらゆる境界条件に対して5%の精度を得る撓み級数の項数であるが, 境界条件を全辺が単純支持の場合に限定すれば他の境界条件に比べて座屈値の精度がよく式

Table 5 Relations between number of terms, buckling strength and C. P. U. time for a simply supported rectangular plate under pure shear (aspect ratio is 4)

$m \times n$	$K$	error (%)	time (sec.)
2 × 2	12.5346	122.8	0.0013
3 × 2	7.4617	32.7	0.0043
4 × 2	6.2981	12.0	0.0087
5 × 2	5.9706	6.1	0.0151
3 × 3	7.2503	28.9	0.0110
4 × 3	6.0527	7.6	0.0239
5 × 3	5.6842	1.1	0.0538
6 × 3	5.6670	0.8	0.0822
16 × 4	5.6354	0.2	3.04
20 × 5	5.6276	0.1	15.5
40 × 10	5.6247	—	998

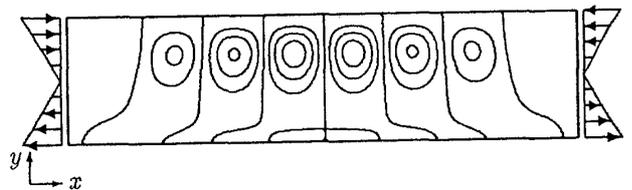


Fig. 5 Buckling shape of a rectangular plate which is clamped along all edges and subjected to in-plane bending (aspect ratio is 4.0).

(28)で1%の精度を得ることができる。

式(28)で, ほとんどの場合の座屈値を精度よく解析することができるが, 座屈半波が  $x$  方向に  $\alpha + 2$  をこえる場合は座屈値の精度が低下する。例えば, Fig. 5 はアスペクト比が4の全辺固定の矩形板に  $x$  方向に面内曲げが作用して座屈した場合の座屈波形で, 本解法で  $m \times n = 20 \times 5$  で計算し描いた図であるが, 波形は少なくとも  $x$  方向に8半波はある。一方, 式(28)によるとアスペクト比が4の矩形板の撓み級数の最適の項数は  $m \times n = 6 \times 3$  になる。このように, 座屈波形を表すことのできない撓み級数の項数の場合, 座屈値の精度は悪くなり, この場合の誤差は11.9%である。この問題のように座屈半波が  $x$  方向に  $\alpha + 2$  をこえることが予想される場合は撓み級数の項数を式(28)よりも少し増やすことにより精度のよい座屈値を得ることができる。

#### 3.2.3 複合荷重が作用するときの撓み級数の最適の項数

以上では, 軸力, 剪断力, 面内曲げのうち1成分のみが作用する場合の座屈値の精度について考えた。これらの力が複合している場合も座屈値の精度を調べた結果, やはり式(28)で精度のよい解析ができることがわかった。

しかし、Fig. 5 の例と同様、座屈半波が  $a+2$  をこえる場合は精度が悪くなる。例えば、Fig. 6 は全辺単純支持のアスペクト比が 4 の矩形板に  $x$  方向に圧縮力、 $y$  方向に引張力が作用し座屈したときの座屈波形である。 $x$  方向の圧縮応力と  $y$  方向の引張応力の絶対値は等しい。この場合、座屈波形は  $x$  方向に 7 半波ある。この問題を式(28)で解析すると、撓み波形を表すことができないので、やはり座屈値の精度が悪くなり、誤差は 5.6%であった。このような場合でも、3.2.2 で述べたように撓み級数の項数を式(28)より少し増やすことにより精度のよい座屈値を得ることができる。

### 3.2.4 最適の項数を採用した場合の座屈値の計算時間

以上述べたように、長辺が固定である矩形板に  $x$  方向の面内曲げが作用する場合と、極端に大きな引張荷重が存在する座屈相関問題においては座屈半波が  $x$  方向に  $a+2$  半

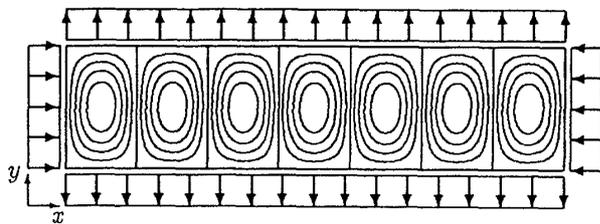


Fig. 6 Buckling shape of a rectangular plate which is simply supported along all edges and subjected to compression along the left and right edges and tension along the bottom and top edges (aspect ratio is 4.0).

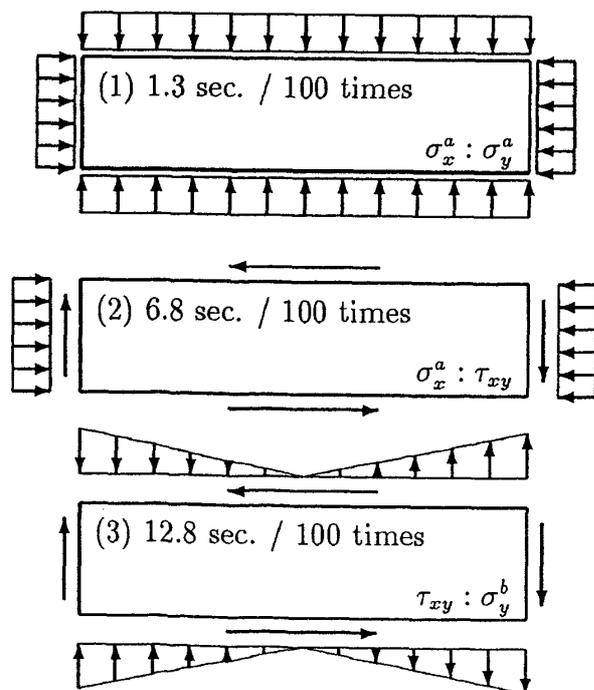


Fig. 7 Rectangular plates used for comparison of C.P.U time (simply supported along all edges and aspect ratio is 4.0).

波を越える場合があるために、座屈値の精度が悪くなることがあるが、一般にこのような荷重で実構造物のパネルが座屈することはあまりなく、式(28)を座屈応力解析に適用しても問題はない。

最後に、提案した式(28)をもとに座屈問題を解くときの計算時間について調べる。アスペクト比が 4 で全辺単純支持の矩形板の座屈相関問題を Fig. 7 の 3 ケースについて計算時間を調べる。(1)は 2 軸圧縮 ( $\sigma_x^a$  と  $\sigma_y^a$ ) の相関問題、(2)は軸圧縮 ( $\sigma_x^a$ ) と剪断 ( $\tau_{xy}$ ) の相関問題、(3)は剪断 ( $\tau_{xy}$ ) と面内曲げ ( $\sigma_y^b$ ) の相関問題である。

なお、本解法で計算時間の要するところは、固有値を求めるときであり、本研究ではヤコビ法で解いた。Fig. 7 の問題では  $m \times n = 6 \times 3$  であるから、18 元の固有値問題を解くことになる。ヤコビ法の解法は文献 7) に従った。

各ケースにおいて 2 つの応力成分を式(29)に示す比で 100 ケース解いた。

$$\left. \begin{array}{l} \sigma_x^a : \sigma_y^a \\ \sigma_x^a : \tau_{xy} \\ \tau_{xy} : \sigma_y^b \end{array} \right\} = \cos \theta : \sin \theta, (\theta = \pi/200, 2\pi/200, \dots, \pi/2). \quad (29)$$

計算時間は Fig. 7 に示すとおり(1)1.3 秒、(2)6.8 秒、(3)12.8 秒であった。Table 5 のときと同様、計算時間は SONY NEWS NWS-3865 で計算したときの実行時間である。

以上により、構造解析時の矩形板の座屈応力解析に、船級協会等の示す簡易計算式のかわりに本手法を用いても十分実用的であることがわかる。

## 4. 結 論

以上の理論と計算例より次の結論を得た。

(1) 撓み関数に三角関数と双曲線関数から構成される重調和級数を使い、その級数を正規化し数式的に積分を行うことにより、撓み級数が少ない項数でも座屈値のよい精度を得ることができた。

(2) 本理論は撓み級数が統一されているためにプログラムは FORTRAN で数百行にしかならないが、矩形板の座屈問題を短時間で精度よく解くことができる。したがって、全体構造解析システムに組み込み座屈応力解析に適用しても十分実用的である。

最後に、本研究を進めるにあたり有益なる御助言をいただいた大阪府立大学工学部岡田博雄教授に感謝の意を表します。

## 参 考 文 献

- 1) 上田, S. M. H. Rashed, 白: 矩形板の弾性座屈相関関係式, 日本造船学会論文集, 第 157 号, (昭和 60 年 5 月), p. 425.
- 2) Column Research Committee of Japan: HANDBOOK OF STRUCTURAL STABILITY,

- CORONA PUBLISHING COMPANY, LTD.,  
1971.
- 3) 日本溶接協会塑性設計研究委員会座屈小委員会：塑性設計資料集（その四）平板および補強板の座屈強度計算図表，1971。
  - 4) 吉識，川井：平板の曲げ，振動および座屈問題に対するエネルギー法の一般的適用法について（I），造船協会論文集，第117号，（昭和40年5月），p. 153。
  - 5) S. Timoshenko, 谷下，渡辺訳：工業振動学，第3版，東京図書，p. 299。
  - 6) 吉識，川井，大坪：平板の曲げ，振動および座屈問題に対するエネルギー法の一般的適用法について（III），造船協会論文集，第123号，（昭和43年5月），p. 181。
  - 7) K. J. Bathe: FINITE ELEMENT PROCEDURES IN ENGINEERING ANALYSIS, Prentice-Hall, 1982, p. 643.
-