

ランダム荷重下の疲労亀裂伝播に及ぼす 小荷重振幅の影響

正員 板 垣 浩* 正員 石 塚 鐵 夫*
正員 宋 玉 中** 梅 田 和 良**

Effect of Small Stress Ranges on Fatigue Crack Propagation under Random Loading

by Hiroshi Itagaki, *Member* Tetsuo Ishizuka, *Member*
Yuzhong Song, *Member* Kazuyoshi Umeda

Summary

This is a part of the serial studies on the experimental method to infer fatigue life of a structural member under service loadings. When a load profile can be approximated by a narrow band stationary Gaussian random process, it has been pointed out that random fatigue tests are easily done with a personal computer by simulating the envelope of the process by FFT. However, it may not be realistic to repeat a time and cost consuming test to get the probability distribution function of fatigue life. In this study a method is proposed to make the total experimental hours as short as possible by eliminating small amplitude cycles, that is, an experimental procedure is established to see the effect of the elimination and determine the cut-off-level beforehand.

1. 緒 言

船舶、橋梁などの構造物の安全性を保つには検査手段の精度を向上させるとともに、構造物中で疲労亀裂発生・伝播の可能性のある部分について使用材料の実働荷重下での伝播挙動を十分に把握し寿命の確率分布関数を推定しなければならない。

実働荷重下での疲労亀裂伝播挙動の取扱い手法についてはこれまでにいろいろ提案が出されている¹⁻⁵⁾。これらの論文は、平均伝播率の推定、従って、平均寿命の推定について論じている事が多く、寿命の確率分布の推定に関しては必ずしも充分であるとは言えない。

実働荷重下の亀裂伝播寿命の確率分布関数の推定を必要とする場合には、推定の為のデータを実験的に収集しなくてはならない。何故ならば材料の亀裂伝播に対する抵抗が空間的なランダム過程であり、寿命推定に際し無視出来な

いばらつきがあること⁶⁻⁸⁾、ならびに、荷重の波形の違いによる寿命の変動があること、さらに、それに加えて材質の変動と荷重の変動の相互作用による変動も考えられる事等のために亀裂伝播寿命の確率分布が複雑になり、理論的予測が困難となるからである。

近年、ランダム疲労試験の試みが幾つか行われている。著者らもランダム疲労試験について従来からいろいろ検討を行っている⁹⁻¹¹⁾。ランダム荷重下の疲労試験上の主な難点として、1) 真実に近いランダム荷重のシミュレーション及び2) 多数回の試験の必要性がまず挙げられよう。前者は特にマイクロコンピュータを用いる時には計算時間、シミュレートするランダム過程の長さ等が問題となり、後者は実験時間と費用とが障壁となる。

荷重シミュレーションに関しては、著者らは高速フーリエ変換を利用し、まず比較的一般的なパワースペクトルをもつ荷重履歴とそれを簡易化した矩形パワースペクトルを持つ荷重履歴とを大型コンピュータで作成し、そのデータをマイクロコンピュータに送り、コンピュータ制御で実験を行った結果、高周波数成分は比較的、結果に寄与することが少ないこと、即ち、パワースペクトルとしては矩形型の狭帯域のもので十分な場合があることを確認した⁹⁾。また、荷重が狭帯域ランダム過程の時には著者らが提案した

* 横浜国立大学工学部

** 横浜国立大学大学院

原稿受理 平成4年7月10日

秋季講演会において講演 平成4年11月9、10日

envelope 法を用いる事によりランダム荷重シミュレーションに要する時間の短縮ならびにコンピュータに要求されるメモリ容量を軽減できることを明らかにしている¹⁰⁾。また、著者らは ΔK 値制御試験方法を採用すれば亀裂伝播寿命の確率分布関数の推定に際して大幅に試験片数を減少出来る事を示した⁹⁾。

上述の様な手法を導入しても、確率分布の近似的な推定を行うに足る実験結果を入手するには、通常の定荷重振幅下の実験に比べて、多くの試験時間を要する。ランダム疲労試験に時間がかかる理由は次のようである。ある確率分布に従うある標準偏差 σ を有する確率過程をシミュレートすると、不可避免的に一定の確率で振幅が 1σ よりはるかに小さい荷重が出現する。例えば、振幅の確率分布関数が Rayleigh 分布の場合では約 40% の確率で 1σ 以下の振幅が出現する。構造物の安全を考慮すれば比較的大きな荷重振幅に関して亀裂進展率が過大に成らないように使用条件が設定されるのが普通であるから、 1σ 程度の荷重振幅による亀裂進展率は非常に小さくなる。

1 サイクルの荷荷時間は振幅によらないようなアルゴリズムを用いてシミュレートするのが普通であるから、Rayleigh 分布荷重を用いたランダム試験の場合、荷重回数の 40% 程度は殆ど亀裂進展に関係しないのではないかと予想され、実験の効率を低下させている。しかし、実験時間が長引くからといって、実験時に小振幅荷重を省略して

良いとは簡単には結論できない。これは単なる試験時間だけの問題ではなく、実際の構造物の疲労寿命を適切に推定するためには大荷重と小荷重の相互作用が亀裂進展に及ぼす影響を考慮しなければならないからである。

もしも、実際のランダム荷重下の実験で得られた疲労亀裂伝播率の分布関数といろいろなレベルの小荷重振幅を削除した荷重下での疲労亀裂伝播率の分布関数の間に何らかの関係が見い出せば、微小振幅荷重を除去した実験でランダム荷重下での疲労寿命を推定でき、実験時間を大幅に減少出来る可能性が出てくる。そこで本報告では狭帯域ランダム荷重に関して、小荷重振幅除去による実験時間短縮法の提案を試みる。

2. 実 験

2.1 供試材及び試験片形状

実験に使用した供試材は海洋構造物用高張力鋼 BS 4360 (50 kgf 級) であり、その化学成分及び機械的性質を Table 1 に示す。

また、試験片形状及び寸法は Fig. 1 に示す。厚さ 30 mm の供試鋼板を削って 18 mm に仕上げた CT (compact tension specimen) 試験片を用いた。

2.2 ランダム荷重波形

2.2.1 基礎となる荷重系列

本研究では応力拡大係数の時刻歴が、Fig. 2 に示すような狭帯域の定常ガウシアン過程となるようにしている。このランダム過程の平均値を $\bar{K}$ 、標準偏差を σ_K と書くこととする。疲労の場合は荷重振幅（相隣る極大値と極小値の差、ここでは ΔK 値）が寿命に関与する。極大値の確率密度関数は

$$f_{Kp}(x) = \frac{x}{\sigma_K^2} \exp\left\{-\frac{x^2}{2\sigma_K^2}\right\} \quad (1)$$

のように与えられ、Rayleigh 分布となる。極大値の rms は $\sigma_p = \sqrt{2} \sigma_K$ となる。したがって、振幅 ΔK の rms 値 ΔK_{rms} は次式のようなになる。

Table 1 Chemical composition and mechanical properties

Yield point		Tensile strength		Elongation	
371 MPa		522 MPa		30.0 %	

C (%)	Si (%)	Mn (%)	P (%)	S (%)	Nb (%)
0.15	0.40	1.32	0.016	0.004	0.26

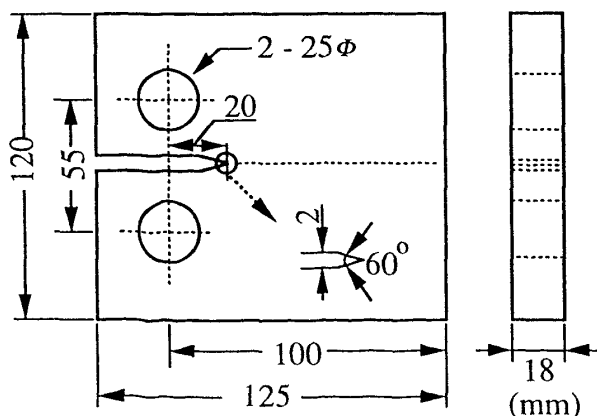


Fig. 1 Shape and dimensions of specimen

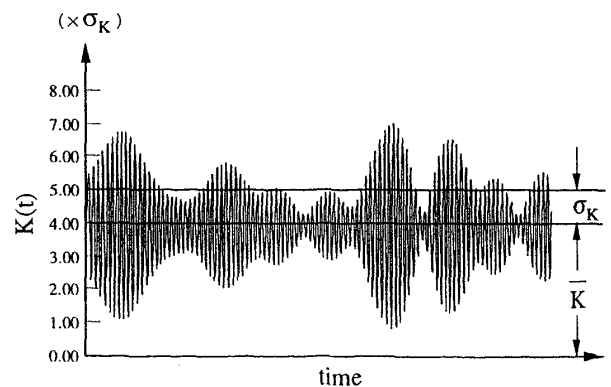


Fig. 2 Narrow band stationary Gaussian random process

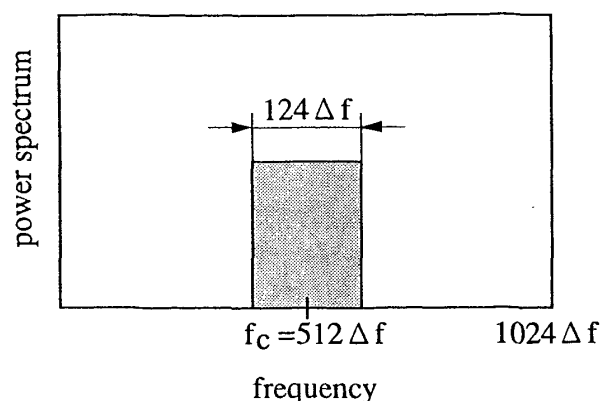
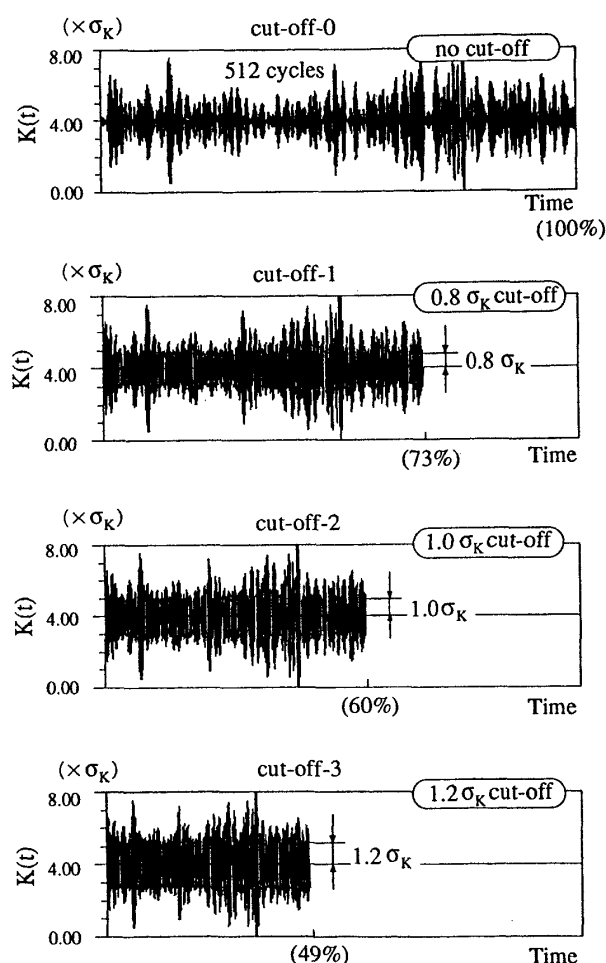


Fig. 3 Idealized power spectrum for the experiment

Fig. 4 Examples of time history without small amplitudes ($\sigma_K = 6.2 \text{ MPa}\sqrt{m}$)

$$\Delta K_{\text{rms}} = 2\sqrt{2} \sigma_K \quad (2)$$

本研究では σ_K が一定となるように荷重を制御している。ランダム波形のシミュレーションは従来より行なってきたように、狭帯域定常ランダム過程の包絡線を高速フーリエ変換 (FFT) により行う¹⁰⁾。ランダム過程のパワースペクトルの形状は Fig. 3 に示すように矩形状とし FFT サイズを $2^{10} = 1024$ とした。1 回の FFT の計算から発生するデータ 2^{10} 個 (実際に得られるデータは envelope なので隣合う

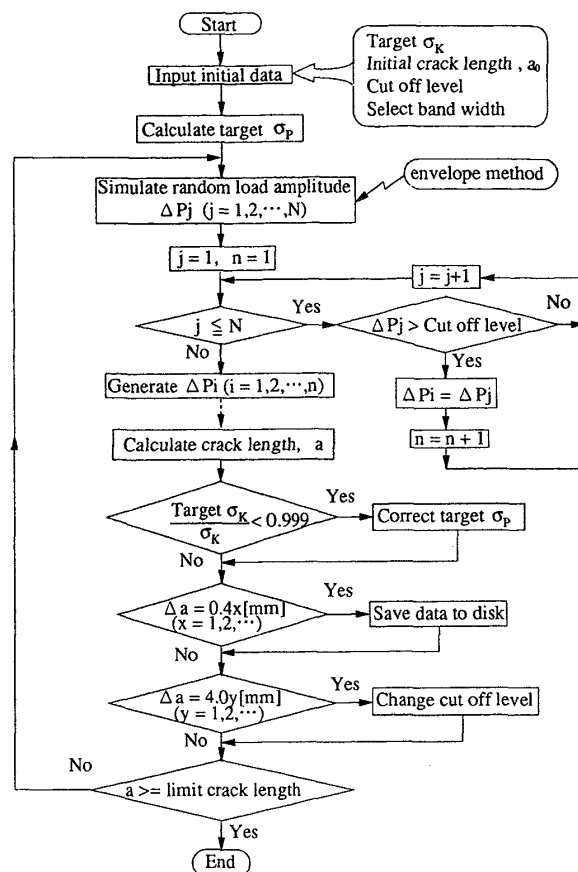


Fig. 5 Partial flow chart of the controlling program

一組の山 (peak) と谷 (trough) との間を余弦波で近似し、mean cross としては 512 波となる) を 1 storm とする。以下、ランダム荷重の負荷回数は storm 数でカウントし N_s であらわす。

2.2.2 小荷重振幅を除去した荷重履歴

ランダム荷重系列中の小荷重振幅の影響を見るために、1 storm 中から小荷重振幅を削除した荷重履歴を用意する。得られた 1 storm の荷重履歴の例を Fig. 4 に示す。同図には原波形の平均値から、 $0.8 \sigma_K$ 、 $1.0 \sigma_K$ 、 $1.2 \sigma_K$ 以下のピーク値を削除して作ったランダム波形をそれぞれ cut-off-1, cut-off-2, および cut-off-3 として示している。さらに各 cut-off-level の 1 storm 分の時間を原形波 (cut-off-0) との時間に対するパーセントで示している。

2.3 負荷方法と計測方法

K 値制御のランダム疲労試験については参考文献 6) に詳述してある。本実験用に追加した部分のフローチャートを Fig. 5 に示す。試験はまず制御したい σ_K , cut-off-level, 初期亀裂長さ, バンド幅を入力するが、本研究で制御した σ_K の目標値は、 $5.0 \text{ MPa}\sqrt{m}$ ($\Delta K_{\text{rms}} = 14.1 \text{ MPa}\sqrt{m}$) と $6.2 \text{ MPa}\sqrt{m}$ ($\Delta K_{\text{rms}} = 17.5 \text{ MPa}\sqrt{m}$) の二種類で、それぞれに対して、4 種類の cut-off-level を設定した。その試験条件を Table 2 に示す。

Table 2 Test conditions

profile	cut-off-level	
	$\sigma_K = 5.0 \text{ [MPa}\sqrt{m}]$	$\sigma_K = 6.2 \text{ [MPa}\sqrt{m}]$
cut-off-0	0	0
cut-off-1	$1.0 \sigma_K$	$0.8 \sigma_K$
cut-off-2	$1.25 \sigma_K$	$1.0 \sigma_K$
cut-off-3	$1.5 \sigma_K$	$1.2 \sigma_K$

試験片毎の材質の変動の影響を出来る限り少なくするために、同一試験片内で cut-off-level を変更するようにした。cut-off-level の変更順序を Fig. 6 に示す。亀裂が 4 mm 伸長する毎に cut-off-1, -2, -3 及び 0 とし、このローテーションで 2 回繰り返した。なお、同一条件の試験を 3 回行った。

亀裂長さの測定は自動計測を主とし、適当な時に読み取り顕微鏡による計測を行った。亀裂長さが、0.4 mm 伸びる

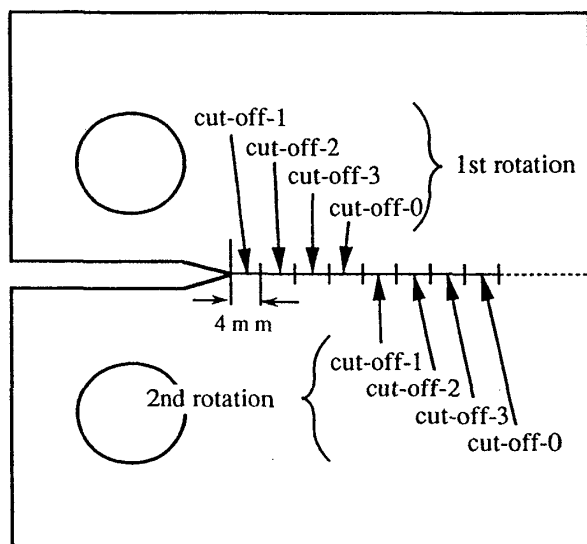
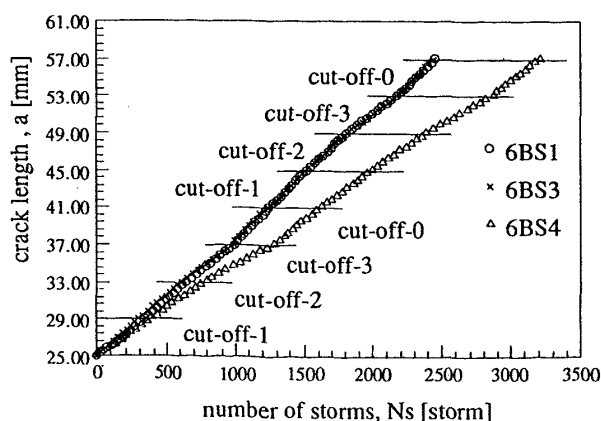


Fig. 6 Change of cut off level

Fig. 7 $a \sim N_s$ curves ($\sigma_K = 5.0 \text{ MPa}\sqrt{m}$)

ごとにフロッピーディスクに亀裂長さ a , storm 数 N_s , 亀裂開口変位, σ_K 値, 時刻を記録した。

3. 結果と考察

3.1 実験結果

試験結果を storm 数 N_s に対して亀裂長さ a をプロットし、Fig. 7 および Fig. 8 に示す。亀裂伸長の様子は、 $\sigma_K = 6.2 \text{ MPa}\sqrt{m}$ の場合は、cut-off-level を変更した影響が見えにくい、 $\sigma_K = 5.0 \text{ MPa}\sqrt{m}$ の場合は影響がはっきりと見られる。

3.2 亀裂伝播率減少と cut-off-level との関係

$a \sim N_s$ 曲線を各 cut-off-level 毎に最小自乗法で近似し、各区間の平均亀裂伝播率を求めた結果を Table 3 に示す。Fig. 7, 8 で明確でなかった伝播率の変化が明らかになっている。平均亀裂伝播率の cut-off-level-0 の値との比を cut-off-level に対してプロットした結果を Fig. 9 に示す。同図より判るように、2 種類の σ_K に対する疲労亀裂伝播率の減少傾向はほぼ同じである。

亀裂伝播率は、 ΔK_{rms} 値に左右されると考えるので、小荷重振幅を除去した場合での両者の関係を明らかにするために、次に、各 cut-off-level による荷重履歴の実際の ΔK_{rms} と

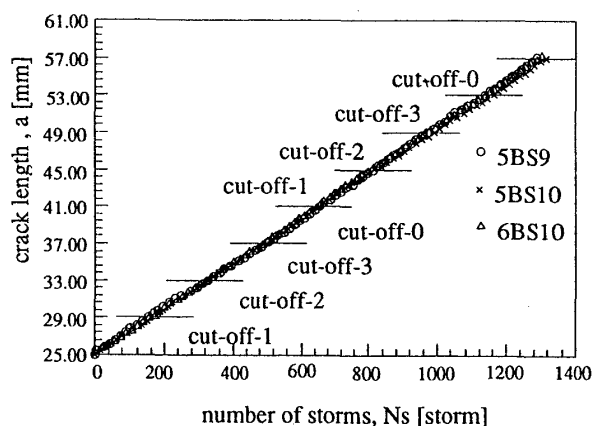
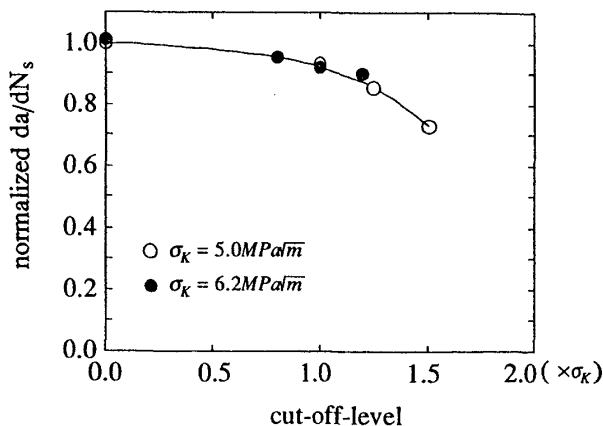
Fig. 8 $a \sim N_s$ curves ($\sigma_K = 6.2 \text{ MPa}\sqrt{m}$)Fig. 9 Relationship between normalized da/dN_s and cut-off-level

Table 3 Crack growth rates per storm

$\sigma_K = 5.0 \text{ MPa}\sqrt{m}$					
specimen No.	rotation No.	cut-off-0	cut-off-1	cut-off-2	cut-off-3
6BS1	1st	1.57	1.30	1.29	1.15
	2nd	1.43	1.49	1.34	1.11
6BS3	1st	1.51	1.34	1.25	1.09
	2nd	1.54	1.47	1.30	1.10
6BS4	1st	1.18	1.04	0.99	0.81
	2nd	1.14	1.08	1.00	0.84
average		1.40	1.29	1.20	1.02
average / 1.40		1.00	0.92	0.86	0.73

($\times 10^{-2}$ mm/storm)

$\sigma_K = 6.2 \text{ MPa}\sqrt{m}$					
specimen No.	rotation No.	cut-off-0	cut-off-1	cut-off-2	cut-off-3
5BS9	1st	2.57	2.61	2.24	2.29
	2nd	2.60	2.52	2.53	2.44
5BS10	1st	2.58	2.40	2.44	2.30
	2nd	2.57	2.43	2.34	2.29
6BS10	1st	2.60	2.34	2.39	2.40
	2nd	2.67	2.55	2.42	2.33
average		2.60	2.48	2.39	2.34
average / 2.60		1.00	0.95	0.92	0.90

($\times 10^{-2}$ mm/storm)

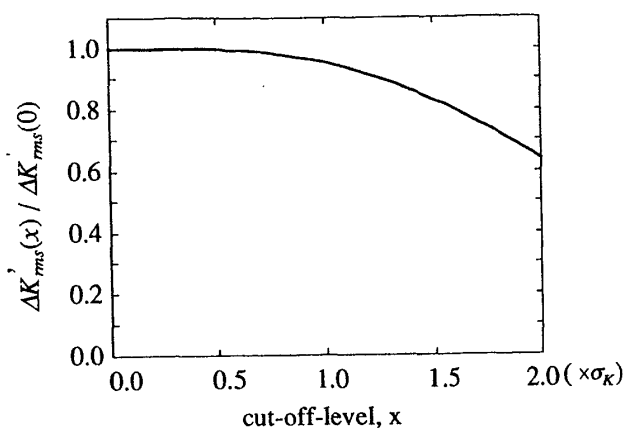
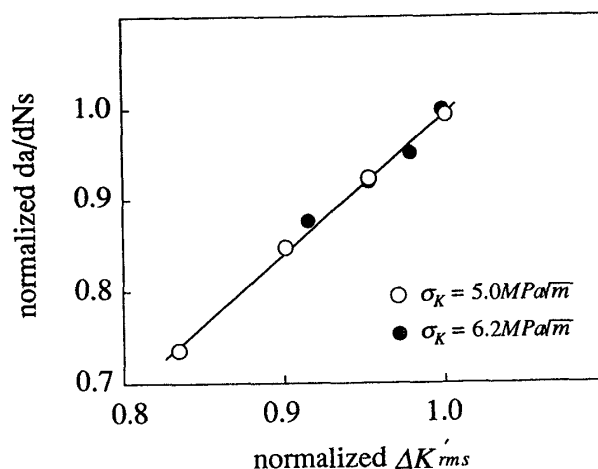
疲労亀裂伝播率との関係について述べる。1 storm 分のランダム負荷の各 cut されなかった部分について残留 ΔK_{rms} を

$$\Delta K'_{rms}(x) = \sqrt{\int_x^\infty (2y)^2 f_{K_p}(y) dy} \quad (3)$$

と定義する。ここで x は cut-off-level で、 f_{K_p} は (1) 式で示した $K(t)$ のピーク値の確率密度関数である。数値計算の結果を Fig. 10 に示す。同図の縦軸は $x=0$ の場合の $\Delta K'_{rms}$ ($=\Delta K_{rms}$) で除した値としている。Fig. 9, Fig. 10 の傾向が良く似ている事が判る。即ち、cut-off-level が大きくなるにつれて実際の ΔK_{rms} が減少し、そのために da/dN_s も減少しているといえる。 $\Delta K'_{rms}$ に対して正規化された da/dN_s をプロットすると Fig. 11 に示すようにほぼ線形関係になった。同図のような実験結果があれば、計算で得られる $\Delta K'_{rms}$ より cut-off-level による疲労亀裂伝播率減少の割合を推定することができる。たまたま、本実験条件で得られた $\Delta K'_{rms} \sim da/dN_s$ は線形関係となっているが、一般的には必ずしも線形になるとは思われない。その時は精度良く cut-off-level の影響を推定するには、本実験で行ったより、多少多くの試験回数を必要とするであろう。

3.3 総試験時間と最適 cut-off-level

K 値制御の実験で、初期亀裂からある長さ a まで伸長さ

Fig. 10 Relationship between $\Delta K'_{rms}$ and cut-off-levelFig. 11 Relationship between normalized $\Delta K'_{rms}$ and normalized da/dN_s

せるのに必要な試験時間を考える。まず cut-off-level, x の時の 1 storm の所用負荷時間 $T_s(x)$ は次式で与えられる。

$$T_s(x) = T_s(0) \times \int_x^\infty f_{K_p}(y) dy \quad (4)$$

ここで、 f_{K_p} は (1) 式で示した $K(t)$ のピーク値の確率密度関数であり、 $T_s(0)$ は原波形を用いた場合の 1 storm の所用負荷時間である。 $T_s(x)$ を Fig. 12 に示す。同図で判るように T_s が $x < 2\sigma_K$ の範囲内では急減少していく。

一方、疲労亀裂伝播速度 da/dN_s は cut-off-level の大小に左右されるので、疲労亀裂をある長さ a まで伸長させるのに必要とする総試験時間 $T_i(x)$ は次式で与えられる。

$$T_i(x) = \left(\frac{a}{da} \right) T_s(x) \quad (5)$$

T_i と cut-off-level との関係を図 13 に示す。図中の縦軸の値は原波形での試験時間との比で表している。また、図中の黒い点は今回の実験結果で、曲線は (3) 式、(4) 式および Fig. 11 からの推定結果である。同図より判るように、 T_i は cut-off-level が大きくなるにつれて減少し、 $1.2\sigma_K$ 付近では 50% 程度の試験時間短縮となるが、それを越えると da/dN_s の急速な減少により、総試験時間の減少が鈍く

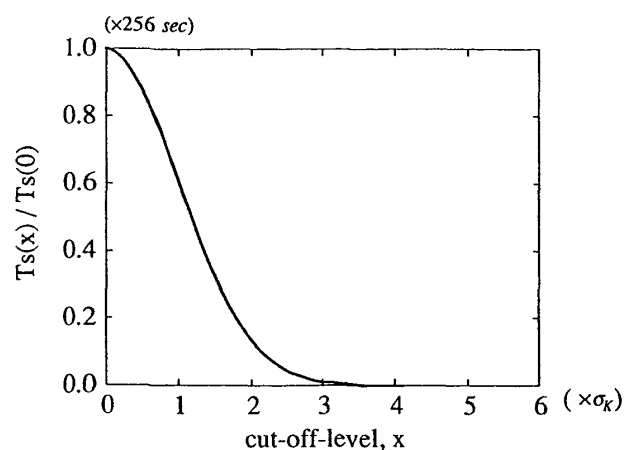


Fig. 12 Relationship between loading time per storm and cut-off-level

なる。一方, Fig. 9 に示した cut-off-level による亀裂伝播率の減少は $1.2 \sigma_K$ 付近を注目すると 10% 程度であるので, 総試験時間の短縮と実験結果から原荷重下の亀裂伝播率を推定するのに必要とする修正の大きさを総合的に考慮すれば, 本実験結果では $1 \sigma_K \sim 1.2 \sigma_K$ の間が最適な cut-off-level と考えてよいであろう。

3.4 シミュレーションとの比較

前節に述べた疲労亀裂伝播率の cut-off-level による減少状況を数値シミュレーションによって調べた。シミュレーション方法の詳細は参考文献 11) に述べてある。

亀裂伝播モデルは, パリス則によるもので次式を用いた^{11,12)}。

$$\frac{da}{dN} = \frac{1}{z(x)} \left(\frac{\Delta K}{K_0} \right)^{m_i} \quad (6)$$

ここで, m_i は i 番目の試験片の m で, 試験毎に異なるが, 試験片内では一定値とし, また $Z(x)$ は試験片内の亀裂先端位置 x における亀裂伝播抵抗係数である。 K_0 は, $Z(x)$ 及び m_i の確率特性を実験的に求めるために導入した, ΔK と同じ単位を持つパラメータである。これらのパラメータについては, 別途に同一供試材による ΔK 値一定疲労試験

Table 4 Estimated values and properties of material parameters

Parameter	Estimated value and property
$Z(x)$	$F(z) = 1 - \exp\left\{-\left(\frac{z-\gamma}{\beta}\right)^\alpha\right\}$ $\alpha = 4.2$ $\beta = 1.62 \times 10^6$ $\gamma = 2.34 \times 10^6$
	$R_{zd}(\tau) = \exp(-b_0 \tau) \cos(2\pi f_0 \tau)$ $b_0 = 0.25$ $f_0 = \frac{1}{64}$
m_i	$N(\bar{m}, \sigma_m^2)$ $\bar{m} = 2.8, \sigma_m^2 = 0.5$ $\sigma_{\max} = 4.0, \sigma_{\min} = 2.0$
K_0	32.5 MPa $\sqrt{\text{mm}}$

* from ref. (11)

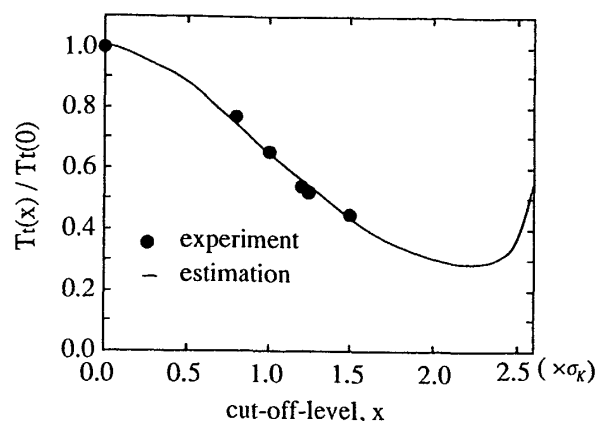


Fig. 13 Relationship between total experiment hours and cut-off-level

より Table 4 に示すような結果が既に得られている¹¹⁾。この結果を基にして, Shinozuka 等の開発した非ガウス確率過程のシミュレーション¹³⁾ を用いて $Z(x)$ を大量に得る事ができ, また m_i は, $N(\bar{m}, \sigma_m^2)$ の正規分布に従うガウス乱数を発生させて得ることができる。

亀裂伝播シミュレーションは, ランダム荷重振幅 1 回毎の亀裂進展量 da_j 及びその時の亀裂長さ a を

$$da_j = \frac{1}{z(x)} \left(\frac{\Delta K_j}{K_0} \right)^{m_i} \quad (7)$$

$$a = \sum da_j \quad (8)$$

によって求めた。同様に亀裂伝播抵抗 $Z(x)$ は 0.4 mm 間隔でシミュレートしてある。初期亀裂長さ a_0 からスタートして, a が予め定めた限界亀裂長さに達したとき試験片 1 本分の亀裂伝播シミュレーションを終了する。

Fig. 14 にシミュレーションによって得られた疲労亀裂伝播率と cut-off-level との関係を示す。比較のため実験結果を点線で示してある。シミュレーションの結果は $1 \sigma_K$ 以内では実験結果とよく一致したがそれ以上になるとシミュレーションの方が減少傾向が大きい。これは実験における

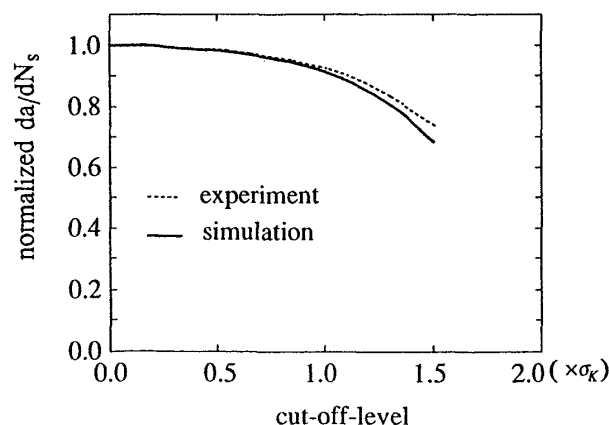


Fig. 14 Comparison of relationship between normalized da/dN_s and cut-off-level by simulation and by experiment

負荷順序などによる遅延効果のためとも考えられる。本実験に限って言えば、シミュレーションによる伝播寿命の推定は、安全側の推定値を与えうると言える。

3.5 ランダム荷重下の疲労寿命推定手順

本研究に基づいたランダム荷重下の疲労亀裂伝播寿命推定の手順は次のようになる。

(1) 一定 ΔK とランダム ΔK 負荷を用いて、 ΔK_{rms} 値制御の下でそれぞれ2〜3本の試験片を使って亀裂伝播試験を行なう。1つの試験片内で一定間隔で、一定 ΔK とランダム ΔK を交互に負荷する。その結果、亀裂伝播率の平均値、分散等の統計的特性値において2種類の負荷の間の差が無視出来る程度ならば、ランダム荷重試験を省略し、 ΔK 制御の一定振幅試験による材料特性のばらつきを調べ⁶⁾、その結果に基づいてシミュレーションによるランダム荷重下の疲労亀裂伝播寿命を推定する。

(2) もし、(1)の仮定が成立しなければ、即ち、荷重順序、大小の振幅の混在の影響により、供試材が ΔK_{rms} により整理しても一定 ΔK の場合とはかなり異なった挙動を示す場合には、ランダム荷重を用いた疲労試験により疲労寿命を推定する必要がある。その時には試験時間削減を図るため初期亀裂長と限界亀裂長に対応する K 値の範囲を決め、この範囲内で適当な σ_K の異なる2種類のランダム K 値履歴を用意し、各々2, 3本ぐらいの試験片を用いて本文で述べた σ_K 制御のもとで、 $0.5 \sigma_K \sim 1.5 \sigma_K$ の間で幾つの cut-off-level を設定し、小荷重振幅を除去し、実験を行う。その結果から小荷重振幅の疲労亀裂伝播に及ぼす影響が σ_K で表せるかどうかを確認する (Fig. 9 参考)。もし、その関係の確認ができれば、続いて、亀裂伝播率の減少と残留 ΔK_{rms} との関係を確認する (Fig. 11 参考)。そして、総試験時間と推定精度を総合的に考えて適切な cut-off-level (ΔK 値の大きさ) を定め、 ΔK 値が cut-off-level 以下になるような荷重振幅を除去して実験を行う。このようにして得られた実験結果を亀裂伝播率の減少と残留 ΔK_{rms} との関係に基づいて亀裂伝播率の減少率を求め、求めた減少率を用いて実験結果に修正を加え、原荷重下の亀裂伝播率を求め、そして、原荷重下の疲労寿命を推定する。

(3) もし、(1)、(2)、ともに成立しない場合には原荷重履歴下の疲労亀裂伝播試験をやらなければならないであろう。その時には、時間、予算、精度を総合的に考え、推定方法も工夫し、最適な実験計画を立てる必要がある。

4. 結 言

疲労伝播に関する安全性の考察には、先ず作用する荷重過程が deterministic とみなし得るか否か、もしランダム過程としなければならない時はその過程が広帯域かどうか等を検討し、次いで求める結果が平均値であるか、それともばらつきも必要か、あるいは、確率分布関数を必要とするか等の要求を決め、その条件に応じてデータ収集のための

実験計画を立てねばならないという観点から行ってきた従来の研究の一環として、狭帯域ランダム荷重過程について小荷重振幅を取り除いた実験に依って試験時間を短縮する可能性について考察した。その結果、本報告で述べたような実験法に依れば、小荷重振幅除去の影響を実験的に非常に明確に決定する事が出来るので、小荷重振幅を除去し時間を短縮した実験の結果から、充分な精度で実働荷重下の亀裂伝播に関する統計的考察を行える事を示した。なお、仮定の内いくつかは成立しない場合、例えば、荷重順序の影響を無視し得ない時などには比較的多数の実験を行わなければならないが、その時には、精度との兼ね合いではあるが、ベイズの方法等で総試験時間を短縮する事を工夫せねばならない。

参 考 文 献

- 1) J. M. Barsom: Fatigue Crack Growth Under Variable-Amplitude Loading in Various Bridge Steels, ASTM STP 595 (May 1976), p. 217
- 2) C. M. Hudson: A Root-Mean-Square Approach for Predicting Fatigue Crack Growth under Random Loading, ASTM STP 748 (October, 1981), p. 41
- 3) 北川英夫, 福田収一, 西山晟人: ランダム荷重下の鋼板中の疲労き裂伝播特性, 日本機械学会論文集, 第43巻371号 (昭和52-7), p. 2439
- 4) 薄一平, 岡村弘之: 定常ランダム荷重下の疲労亀裂進展, 日本機械学会論文集 (A編), 第45巻390号 (昭和54-2), p. 92
- 5) 町田進, 大岡俊之, 渡辺佐千雄他: 実働荷重下の疲労亀裂伝播の研究, 日本造船学会論文集, 第154号 (1983), p. 396
- 6) 板垣浩, 石塚鐵夫, 黄培彦: 疲労亀裂伝播寿命の確率分布推定に関する実験的研究, 日本機械学会論文集 (A編), 第525号, 第56巻 (1990), p. 1082
- 7) 市川昌弘, 中村武夫: 疲労亀裂伝播速度の試験片内変動と試験片間変動の分離, 材料, 36-408, (1986)
- 8) Keith Oritiz and Anne S. Kiremidjian: "Time Series Analysis of Fatigue Crack Growth Rate Data", Eng. Fracture Mechanics, 24-5 (1986)
- 9) 板垣浩, 石塚鐵夫, 関根登他: ランダム荷重による疲労亀裂伝播 (第1報), 日本造船学会論文集, 第159号 (1987), p. 358
- 10) 板垣浩, 石塚鐵夫, 関隆広: ランダム荷重による疲労亀裂伝播 (第2報), 日本造船学会論文集, 第168号 (1990), p. 583
- 11) 板垣浩, 石塚鐵夫, 関隆広: 疲労亀裂伝播への狭帯域ランダム荷重波形の影響, JCROSSAR'91 論文集, (1991), p. 411
- 12) 関隆広: 疲労亀裂伝播への狭帯域ランダム荷重波形の影響, 横浜国立大学学位 (修士) 論文, 1990
- 13) Yamazaki, H and Shinozuka, M.: "Digital Generation of Non-Gaussian Stochastic Fields", Technical Report, Department of Civil Engineering Mechanics, Columbia University, (1986)