

$k-\epsilon$ 2 方程式モデルによる球形タンク内 LNG の乱流熱流動解析

正員 古林 義 弘*

Turbulent Thermal Flow Analysis of Liquefied Natural Gas in the Spherical
Tank with the $k-\epsilon$ Two Equations Model

by Yoshihiro Kobayashi, *Member*

Summary

Turbulent thermal buoyancy driven flow of the liquefied gas, LNG and LH₂ (liquefied hydrogen) in the spherical enclosure having a free evaporation surface and uniformly insulated outer wall was analyzed with spherical coordinate system.

The $k-\epsilon$ two equation models were used for the turbulent calculation and the finite difference method was applied for the numerical calculation.

For the discretized spherical coordinate system the numerical satisfaction of the equation of continuity in the nonconservative form is not ensured due to the geometric change of each cell size and to the finite difference approximation of the first order derived from differential equation.

Author introduced the equalized flow for the convection terms of equations of energy, vorticity, turbulent kinetic energy and dissipation rate. The automatic satisfaction of flow continuity over the entire range of control volumes and the stable numerical solutions were obtained by application of this new method.

As for the boundary conditions for free surface liquid two kinds of thermal configurations were considered, one of which was heat flux corresponding to an evaporation equivalent to the heat input and the other was saturated temperature corresponding to the vapor pressure.

Consequently author evaluated briefly the relations between boil off quantity and fluid flow characterized by the tank shape of spherical and square.

1. 緒 言

LNG 船等の貨物タンク内の低温液化ガスは、断熱タンク周囲からの入熱によってタンク壁接液部では温度上昇し、一方自然蒸発によって自由表面部は温度降下が生ずる。これら温度差に基づく流体内部の密度差によって浮力を生じ熱流動が引き起される^{1),2)}。タンク内貯蔵中の流体の静的、動的挙動、即ち流速やその方向等の流れ状態、および温度分布を知るためには熱流動の状態を把握することが重要であり、常温流体にない液化ガス特有の諸現象を精度よ

く解明するためにはこれは不可欠の条件となる。

本研究では球形タンク内の LNG および LH₂(液化水素)の乱流熱流動について、 $k-\epsilon$ 2 方程式乱流モデルによる解析を行った。座標系は球座標系を採用し、数値計算は有限差分法 FDM によった。球座標系での基礎式を FDM によつて離散化すれば、検査体積の大きさが半径や緯度の大きさによって変化する。このため非保存形の離散化式では連続条件が満足されず、温度、渦度等のスカラ量の保存則がこわれ時間と共に発散する結果となる。そこで著者は先に発表した²⁾ スカラ量の流入、流出を中立に保持した逆非平衡流量をそれぞれの輸送方程式の対流項に付加することによって連続条件を満足する方法を考案し、本方法をエネルギー式、渦度式、乱流エネルギーと同エネルギー消散式に採用した。その結果安定解を得ることができ、球形タンク内の超低温貨物流体の温度分布、流速ベクトルおよび流線分布等

* 熊本工業大学 構造工学科

が明らかとなった。

2. 球座標系での乱流熱流動の基礎式の誘導

2.1 基礎式

Fig. 1, 2 に示すタンク系および球座標系 (r, ϕ, ψ) での非圧縮粘性流体の基礎式 (連続の式, 運動方程式および熱エネルギー方程式) を示すと次のようになる。但し r, ϕ, ψ 方向の流速を u, v, w , 温度を θ , 圧力を p , 動粘性係数を ν ,

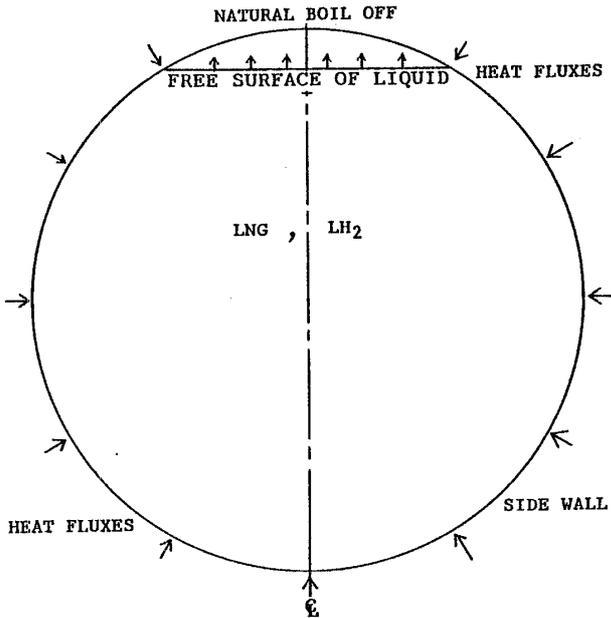


Fig. 1 Calculation model of LNG and LH₂ tank

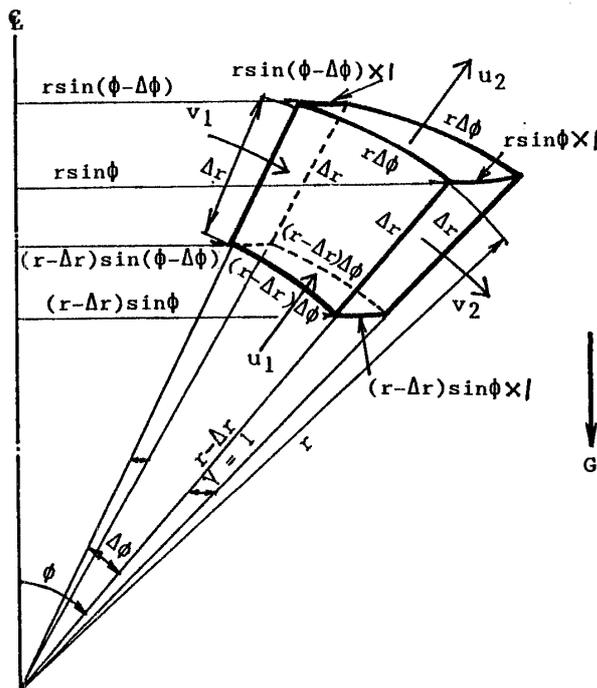


Fig. 2 Spherical coordinate system and cell element

比重量を $\gamma (= \rho g)$, 比熱を c , 熱伝導率を λ とし, r, ϕ, ψ 方向に働く外力を F_r, F_ϕ, F_ψ , 単位体積当りの発熱量を q , 時間を τ とする。運動方程式には円運動特有の遠心力およびコリオリの力が現れる。なお温度に依存した密度 ρ の変化は浮力項においてのみ考慮する Boussinesq 近似を用い, 他の物性値は温度変化が小さいため一定であるとする。

連続の式

$$\frac{1}{r^2} \frac{\partial(r^2 u)}{\partial r} + \frac{1}{r \sin \phi} \frac{\partial(v \sin \phi)}{\partial \phi} + \frac{1}{r \sin \phi} \frac{\partial w}{\partial \psi} = 0 \quad (1)$$

運動方程式 (Navier Stokes 方程式)

$$\begin{aligned} \frac{\partial u}{\partial \tau} + u \frac{\partial u}{\partial r} + \frac{v}{r} \frac{\partial u}{\partial \phi} + \frac{w}{r \sin \phi} \frac{\partial u}{\partial \psi} - \frac{v^2 + w^2}{r} \\ = F_r - \frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial r} \\ + \nu \left\{ \frac{1}{r^2} \frac{\partial}{\partial r} \left(r^2 \frac{\partial u}{\partial r} \right) + \frac{1}{r^2 \sin \phi} \frac{\partial}{\partial \phi} \left(\sin \phi \frac{\partial u}{\partial \phi} \right) \right. \\ \left. + \frac{1}{r^2 \sin^2 \phi} \frac{\partial^2 u}{\partial \psi^2} - \frac{2u}{r^2} - \frac{2}{r^2} \frac{\partial v}{\partial \phi} - \frac{2 \cot \phi}{r^2} v \right. \\ \left. - \frac{2}{r^2 \sin \phi} \frac{\partial w}{\partial \psi} \right\} \quad (2) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial v}{\partial \tau} + u \frac{\partial v}{\partial r} + \frac{v}{r} \frac{\partial v}{\partial \phi} + \frac{w}{r \sin \phi} \frac{\partial v}{\partial \psi} + \frac{uv - w^2 \cot \phi}{r} \\ = F_\phi - \frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{r \partial \phi} \\ + \nu \left\{ \frac{1}{r^2} \frac{\partial}{\partial r} \left(r^2 \frac{\partial v}{\partial r} \right) + \frac{1}{r^2 \sin \phi} \frac{\partial}{\partial \phi} \left(\sin \phi \frac{\partial v}{\partial \phi} \right) \right. \\ \left. + \frac{1}{r^2 \sin^2 \phi} \frac{\partial^2 v}{\partial \psi^2} + \frac{2}{r^2} \frac{\partial u}{\partial \phi} - \frac{v}{r^2 \sin^2 \phi} \right. \\ \left. - \frac{2 \cos \phi}{r^2 \sin^2 \phi} \frac{\partial w}{\partial \psi} \right\} \quad (3) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial w}{\partial \tau} + u \frac{\partial w}{\partial r} + \frac{v}{r} \frac{\partial w}{\partial \phi} + \frac{w}{r \sin \phi} \frac{\partial w}{\partial \psi} + \frac{uw + vw \cot \phi}{r} \\ = F_\psi - \frac{1}{\rho r \sin \phi} \frac{\partial p}{\partial \psi} \\ + \nu \left\{ \frac{1}{r^2} \frac{\partial}{\partial r} \left(r^2 \frac{\partial w}{\partial r} \right) + \frac{1}{r^2 \sin \phi} \frac{\partial}{\partial \phi} \left(\sin \phi \frac{\partial w}{\partial \phi} \right) \right. \\ \left. + \frac{1}{r^2 \sin^2 \phi} \frac{\partial^2 w}{\partial \psi^2} - \frac{w}{r^2 \sin^2 \phi} + \frac{2}{r^2 \sin \phi} \frac{\partial u}{\partial \psi} \right. \\ \left. + \frac{2 \cos \phi}{r^2 \sin^2 \phi} \frac{\partial v}{\partial \psi} \right\} \quad (4) \end{aligned}$$

熱エネルギー方程式

$$\begin{aligned} \frac{\partial \theta}{\partial \tau} + u \frac{\partial \theta}{\partial r} + \frac{v}{r} \frac{\partial \theta}{\partial \phi} + \frac{w}{r \sin \phi} \frac{\partial \theta}{\partial \psi} \\ = \kappa \left\{ \frac{1}{r^2} \frac{\partial}{\partial r} \left(r^2 \frac{\partial \theta}{\partial r} \right) + \frac{1}{r^2 \sin \phi} \frac{\partial}{\partial \phi} \left(\sin \phi \frac{\partial \theta}{\partial \phi} \right) \right. \\ \left. + \frac{1}{r^2 \sin^2 \phi} \frac{\partial^2 \theta}{\partial \psi^2} \right\} + \frac{q}{\gamma c} \quad (5) \end{aligned}$$

但し $\kappa = \lambda / \gamma c$ である。

次に乱流状態での流速, 圧力および温度を近似的にアンサンブル平均値 ($\bar{\quad}$) と変動値 (\prime) との和として $u = \bar{u} + u'$, $v = \bar{v} + v'$, $w = \bar{w} + w'$, $p = \bar{p} + p'$, $\theta = \bar{\theta} + \theta'$ と表示して, これらを式(1)および対流項を保存形表示した式(2), (3),

(4)および(5)に代入し、式全体の平均化操作を行う。ここで球形タンクの形状、並びに船内設置状態からみて内部流は経度 ϕ 方向については一様とみなせるから緯度 ϕ と半径 r 方向のみに変化する軸対称流として取扱う。従って $\bar{w}=0, \partial/\partial\phi=0$ とし、速度変動項 w' のみを残す。

連続の式

$$\frac{\partial \bar{u}}{\partial r} + \frac{1}{r} \frac{\partial \bar{v}}{\partial \phi} + \frac{2\bar{u}}{r} + \frac{\cot \phi}{r} \bar{v} = 0 \quad (6)$$

運動方程式

$$\begin{aligned} \frac{\partial \bar{u}}{\partial \tau} + \bar{u} \frac{\partial \bar{u}}{\partial r} + \frac{\bar{v}}{r} \frac{\partial \bar{u}}{\partial \phi} - \frac{\bar{v}^2}{r} \\ = F_r - \frac{1}{\rho} \frac{\partial \bar{p}}{\partial r} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial}{\partial r} \left\{ r^2 \left(\nu \frac{\partial \bar{u}}{\partial r} - \overline{u'u'} \right) \right\} \\ + \frac{1}{r \sin \phi} \frac{\partial}{\partial \phi} \left\{ \sin \phi \left(\frac{\nu}{r} \frac{\partial \bar{u}}{\partial \phi} - \overline{v'u'} \right) \right\} \\ - \frac{2\nu}{r^2} \frac{\partial \bar{v}}{\partial \phi} - \frac{2\nu}{r^2} (\bar{u} + \bar{v} \cot \phi) + \frac{\overline{v^2 + w^2}}{r} \quad (7) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial \bar{v}}{\partial \tau} + \bar{u} \frac{\partial \bar{v}}{\partial r} + \frac{\bar{v}}{r} \frac{\partial \bar{v}}{\partial \phi} + \frac{\bar{u}\bar{v}}{r} \\ = F_\phi - \frac{1}{\rho r} \frac{\partial \bar{p}}{\partial \phi} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial}{\partial r} \left\{ r^2 \left(\nu \frac{\partial \bar{v}}{\partial r} - \overline{u'v'} \right) \right\} \\ + \frac{1}{r \sin \phi} \frac{\partial}{\partial \phi} \left\{ \sin \phi \left(\frac{\nu}{r} \frac{\partial \bar{v}}{\partial \phi} - \overline{v^2} \right) \right\} \\ + \frac{2\nu}{r^2} \frac{\partial \bar{u}}{\partial \phi} - \frac{\nu \bar{v}}{r^2 \sin^2 \phi} - \frac{\overline{u'v'} - \overline{w^2} \cot \phi}{r} \quad (8) \end{aligned}$$

熱エネルギー方程式

$$\begin{aligned} \frac{\partial \bar{\theta}}{\partial \tau} + \frac{\partial (\bar{u}\bar{\theta})}{\partial r} + \frac{1}{r} \frac{\partial (\bar{v}\bar{\theta})}{\partial \phi} + \frac{2\bar{u}\bar{\theta}}{r} + \frac{\cot \phi}{r} \bar{v}\bar{\theta} \\ = \frac{1}{r^2} \frac{\partial}{\partial r} \left\{ r^2 \left(\kappa \frac{\partial \bar{\theta}}{\partial r} - \overline{u'\theta'} \right) \right\} \\ + \frac{1}{r \sin \phi} \frac{\partial}{\partial \phi} \left\{ \sin \phi \left(\frac{\kappa}{r} \frac{\partial \bar{\theta}}{\partial \phi} - \overline{v'\theta'} \right) \right\} + \frac{q}{\gamma c} \quad (9) \end{aligned}$$

式(7)、(8)および(9)に変動値の積の形で新たに出現する項は Reynolds stress および乱流熱流束であり、k-ε 2 方程式モデルでは Reynolds stress は既知の項である平均値 \bar{u} , \bar{v} , 未知量である渦動粘性係数 ν_t , 乱流エネルギー k および経験定数である乱流プラント数 σ_t を用いて、アインシュタイン総和規約によるテンソル表記をすれば次式で表わされる。但し δ_{ij} はクロネッカー δ である。

$$-\overline{u'_i u'_j} = \nu_t \left(\frac{\partial \bar{u}_i}{\partial x_j} + \frac{\partial \bar{u}_j}{\partial x_i} - \frac{2}{3} \frac{\partial \bar{u}_k}{\partial x_k} \delta_{ij} \right) - \frac{2}{3} k \delta_{ij} \quad (10)$$

乱流熱流束についても ν_t , σ_t および平均値 $\bar{\theta}$ を用いて記す。これらを球座標系³⁾の場合で表すと次のようになる。

$$\left. \begin{aligned} -\overline{u'v'} &= \nu_t \left(\frac{1}{r} \frac{\partial \bar{u}}{\partial r} + \frac{\partial \bar{v}}{\partial r} - \frac{\bar{v}}{r} \right) \\ -\overline{u'^2} &= 2\nu_t \frac{\partial \bar{u}}{\partial r} - \frac{2}{3} k \\ -\overline{v'^2} &= 2\nu_t \left(\frac{1}{r} \frac{\partial \bar{v}}{\partial \phi} + \frac{\bar{u}}{r} \right) - \frac{2}{3} k \\ -\overline{w'^2} &= 2\nu_t \left(\frac{\bar{u}}{r} + \frac{\cot \phi}{r} \bar{v} \right) - \frac{2}{3} k \\ -\overline{u'\theta'} &= \frac{\nu_t}{\sigma_t} \frac{\partial \bar{\theta}}{\partial r} \end{aligned} \right\} \quad (11)$$

$$-\overline{v'\theta'} = \frac{\nu_t}{\sigma_t} \frac{1}{r} \frac{\partial \bar{\theta}}{\partial \phi}$$

ここで乱流エネルギー k は $k = (\overline{u'_i u'_i})/2 = (\overline{u'^2} + \overline{v'^2} + \overline{w'^2})/2$ である。外力としては重力のみを考慮すれば、流体の体膨張係数を β , 基準温度を θ_∞ として

$$\left. \begin{aligned} F_r &= \beta g \cos \phi (\bar{\theta} - \theta_\infty) \\ F_\phi &= -\beta g \sin \phi (\bar{\theta} - \theta_\infty) \end{aligned} \right\} \quad (12)$$

となる。

次に次式で定義される渦度 $\bar{\omega}$ を導入する。

$$\bar{\omega} = \frac{\bar{v}}{r} + \frac{\partial \bar{v}}{\partial r} - \frac{1}{r} \frac{\partial \bar{u}}{\partial \phi} \quad (13)$$

式(7)と式(8)の交差微分を行った上で両者の差、即ち $\partial(7)/\partial\phi - \partial(r \times (8))/\partial r$ をとり両辺を $\bar{\omega}$ で整理し、Reynolds stress および外力項を代入し整理すれば圧力 \bar{p} および乱流エネルギー k が消去された渦度 $\bar{\omega}$ の輸送方程式が得られる。同様に熱エネルギー方程式に乱流熱流束を代入し整理する。

次に $\bar{u} = (-1/r^2 \sin \phi) \partial z / \partial \phi$, $\bar{v} = (1/r \sin \phi) \partial z / \partial r$ で定義される流れ関数 z を用いて式(13)から $\bar{\omega} = f(z)$ の形のポアソン方程式を作る。以上をまとめると次のようになる。

連続の式

$$\frac{\partial \bar{u}}{\partial r} + \frac{1}{r} \frac{\partial \bar{v}}{\partial \phi} + \frac{2\bar{u}}{r} + \frac{\cot \phi}{r} \bar{v} = 0 \quad (14)$$

熱エネルギー式

$$\begin{aligned} \frac{\partial \bar{\theta}}{\partial \tau} + \frac{\partial (\bar{u}\bar{\theta})}{\partial r} + \frac{1}{r} \frac{\partial (\bar{v}\bar{\theta})}{\partial \phi} + \frac{2\bar{u}\bar{\theta}}{r} + \frac{\cot \phi}{r} \bar{v}\bar{\theta} \\ = \frac{\partial}{\partial r} \left\{ \left(\kappa + \frac{\nu_t}{\sigma_t} \right) \frac{\partial \bar{\theta}}{\partial r} \right\} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial}{\partial \phi} \left\{ \left(\kappa + \frac{\nu_t}{\sigma_t} \right) \frac{\partial \bar{\theta}}{\partial \phi} \right\} \\ + \left(\kappa + \frac{\nu_t}{\sigma_t} \right) \left(\frac{2}{r} \frac{\partial \bar{\theta}}{\partial r} + \frac{\cot \phi}{r^2} \frac{\partial \bar{\theta}}{\partial \phi} \right) + \frac{q}{\gamma c} \quad (15) \end{aligned}$$

渦度方程式 (運動方程式)

$$\begin{aligned} \frac{\partial \bar{\omega}}{\partial \tau} + \frac{\partial (\bar{u}\bar{\omega})}{\partial r} + \frac{1}{r} \frac{\partial (\bar{v}\bar{\omega})}{\partial \phi} + \frac{\bar{u}\bar{\omega}}{r} \\ = -g\beta \left\{ \sin \phi \frac{\partial (\bar{\theta} - \theta_\infty)}{\partial r} + \frac{\cos \phi}{r} \frac{\partial (\bar{\theta} - \theta_\infty)}{\partial \phi} \right\} \\ + \frac{\partial^2}{\partial r^2} \{ (\nu - \nu_t) \bar{\omega} \} + \frac{2}{r} \frac{\partial}{\partial r} \{ (\nu - 2\nu_t) \bar{\omega} \} \\ + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2}{\partial \phi^2} \{ (\nu + \nu_t) \bar{\omega} \} + \frac{\cot \phi}{r^2} \frac{\partial}{\partial \phi} \{ (\nu + \nu_t) \bar{\omega} \} \\ - \frac{\nu + \nu_t}{r^2 \sin^2 \phi} \bar{\omega} + \frac{2}{r} \left[4 \frac{\partial}{\partial r} \left(\nu_t \frac{\partial \bar{v}}{\partial r} \right) + r \frac{\partial^2}{\partial r^2} \left(\nu_t \frac{\partial \bar{v}}{\partial r} \right) \right. \\ \left. - \frac{1}{r} \left\{ -\frac{\nu_t}{\sin^2 \phi} \frac{\partial \bar{v}}{\partial r} + \cot \phi \frac{\partial}{\partial \phi} \left(\nu_t \frac{\partial \bar{v}}{\partial r} \right) \right. \right. \\ \left. \left. + \frac{\partial^2}{\partial \phi^2} \left(\nu_t \frac{\partial \bar{v}}{\partial r} \right) \right\} - \frac{\partial^2}{\partial r \partial \phi} \left\{ \nu_t \left(\frac{\partial \bar{u}}{\partial r} - \frac{1}{r} \frac{\partial \bar{v}}{\partial \phi} - \frac{\bar{u}}{r} \right) \right. \right. \\ \left. \left. - \frac{3}{r} \frac{\partial}{\partial \phi} \left(\nu_t \frac{\partial \bar{u}}{\partial r} \right) - \cot \phi \frac{\partial}{\partial r} \left\{ \nu_t \left(\frac{\cot \phi}{r} \bar{v} \right. \right. \right. \right. \\ \left. \left. \left. - \frac{1}{r} \frac{\partial \bar{v}}{\partial \phi} \right) \right\} \right] \quad (16) \end{aligned}$$

渦度-流れ関数の式

$$\frac{1}{r \sin \phi} \left\{ \frac{\partial^2 z}{\partial r^2} - \frac{\cot \phi}{r^2} \frac{\partial z}{\partial \phi} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 z}{\partial \phi^2} \right\} = \bar{\omega} \quad (17)$$

流速の式

$$\bar{u} = -\frac{1}{r^2 \sin \phi} \frac{\partial z}{\partial \phi}, \quad \bar{v} = \frac{1}{r \sin \phi} \frac{\partial z}{\partial r} \quad (18)$$

次に渦動粘性係数 ν_t は乱流エネルギー k および乱流エネルギー消散率 ε をもとにして次式で表わされる。

$$\nu_t = c_\mu \frac{k^2}{\varepsilon} \quad (19)$$

但し c_μ は経験定数で $c_\mu = 0.09$ とする。 k および ε の輸送方程式は一般的にテンソル表記すると次のようになる⁴⁾。

$$\frac{\partial k}{\partial \tau} + \frac{\partial}{\partial x_j} (\bar{u}_j k) = \frac{\partial}{\partial x_j} \left[\left(\nu + \frac{\nu_t}{\sigma_k} \right) \frac{\partial k}{\partial x_j} \right] - \bar{u}_j' \bar{u}_i' \frac{\partial \bar{u}_i}{\partial x_j} - \varepsilon \quad (20)$$

$$\frac{\partial \varepsilon}{\partial \tau} + \frac{\partial}{\partial x_j} (\bar{u}_j \varepsilon) = \frac{\partial}{\partial x_j} \left[\left(\nu + \frac{\nu_t}{\sigma_\varepsilon} \right) \frac{\partial \varepsilon}{\partial x_j} \right] - \frac{\varepsilon}{k} \left(C_1 \bar{u}_j' \bar{u}_i' \frac{\partial \bar{u}_i}{\partial x_j} + C_2 \varepsilon \right) \quad (21)$$

これらを球座標系で表示した上で2次元 (r, ϕ) で記す。更に自然対流の場合には重力(浮力)による物体力が作用してそれぞれの式の右辺に生成項として付加される。以上の条件を式(20), (21)に入れて誘導すると次式を得る。

乱流エネルギー方程式

$$\begin{aligned} \frac{\partial k}{\partial \tau} + \frac{\partial \bar{u} k}{\partial r} + \frac{1}{r} \frac{\partial \bar{v} k}{\partial \phi} + \frac{k}{r} (2\bar{u} + \bar{v} \cot \phi) \\ = \frac{\partial}{\partial r} \left[\left(\nu + \frac{\nu_t}{\sigma_k} \right) \frac{\partial k}{\partial r} \right] + \frac{1}{r^2} \frac{\partial}{\partial \phi} \left[\left(\nu + \frac{\nu_t}{\sigma_k} \right) \frac{\partial k}{\partial \phi} \right] \\ + \nu_t \left\{ 2 \left(\frac{\partial \bar{u}}{\partial r} \right)^2 + 2 \left(\frac{1}{r} \frac{\partial \bar{v}}{\partial \phi} + \frac{\bar{u}}{r} \right)^2 \right. \\ \left. + 2 \left(\frac{\bar{u}}{r} + \frac{\bar{v} \cot \phi}{r} \right)^2 + \left(\frac{\partial \bar{v}}{\partial r} + \frac{1}{r} \frac{\partial \bar{u}}{\partial \phi} - \frac{\bar{v}}{r} \right)^2 \right\} \\ - \varepsilon - g\beta \frac{\nu_t}{\sigma_t} \left(\frac{1}{\cos \phi} \frac{\partial \theta}{\partial r} - \frac{1}{r \sin \phi} \frac{\partial \theta}{\partial \phi} \right) \quad (22) \end{aligned}$$

エネルギー消散方程式

$$\begin{aligned} \frac{\partial \varepsilon}{\partial \tau} + \frac{\partial \bar{u} \varepsilon}{\partial r} + \frac{1}{r} \frac{\partial \bar{v} \varepsilon}{\partial \phi} + \frac{\varepsilon}{r} (2\bar{u} + \bar{v} \cot \phi) \\ = \frac{\partial}{\partial r} \left[\left(\nu + \frac{\nu_t}{\sigma_\varepsilon} \right) \frac{\partial \varepsilon}{\partial r} \right] + \frac{1}{r^2} \frac{\partial}{\partial \phi} \left[\left(\nu + \frac{\nu_t}{\sigma_\varepsilon} \right) \frac{\partial \varepsilon}{\partial \phi} \right] \\ + C_1 \nu_t \frac{\varepsilon}{k} \left\{ 2 \left(\frac{\partial \bar{u}}{\partial r} \right)^2 + 2 \left(\frac{1}{r} \frac{\partial \bar{v}}{\partial \phi} + \frac{\bar{u}}{r} \right)^2 \right. \\ \left. + 2 \left(\frac{\bar{u}}{r} + \frac{\bar{v} \cot \phi}{r} \right)^2 + \left(\frac{\partial \bar{v}}{\partial r} + \frac{1}{r} \frac{\partial \bar{u}}{\partial \phi} - \frac{\bar{v}}{r} \right)^2 \right\} \\ - C_2 \frac{\varepsilon^2}{k} - C_3 g\beta \frac{\varepsilon}{k} \frac{\nu_t}{\sigma_t} \left(\frac{1}{\cos \phi} \frac{\partial \theta}{\partial r} - \frac{1}{r \sin \phi} \frac{\partial \theta}{\partial \phi} \right) \quad (23) \end{aligned}$$

但し経験定数である次の諸定数は $C_1 = 1.44$, $C_2 = 1.92$, $\sigma_k = 1.0$, $\sigma_\varepsilon = 1.3$, $\sigma_t = 1.0$ とした。 ε 式の右辺に生ずる浮力による生成項係数 C_3 の値は $C_3 = 0.7$ とした。

更に各変数を ν (流体の沸点における動粘性係数), R (球半径), $\theta_a - \theta_{lo}$ (θ_a : 外部温度, $\theta_{lo} = \theta_\infty$: 流体の初期温度) を基準値として無次元化して() で示す。

$$\bar{r} = \frac{\nu}{R^2} \bar{r}, \quad \bar{\phi} = \frac{r}{R}, \quad \bar{u} = \frac{R}{\nu} \bar{u}, \quad \bar{v} = \frac{R}{\nu} \bar{v},$$

$$\begin{aligned} \bar{k} = \frac{R^2}{\nu^2} k, \quad \bar{\varepsilon} = \frac{R^4}{\nu^3} \varepsilon, \quad \bar{\theta} = \frac{\theta - \theta_{lo}}{\theta_a - \theta_{lo}}, \\ \bar{\omega} = \frac{R^2}{\nu} \bar{\omega}, \quad \bar{z} = \frac{z}{\nu R}, \quad \bar{\nu}_t = \frac{\nu_t}{\nu} \quad (24) \end{aligned}$$

式(13)~(23)を無次元化変数を用いて書き直すと次の諸式を得る。

渦度の式

$$\bar{\omega} = \frac{\bar{v}}{\bar{r}} + \frac{\partial \bar{v}}{\partial \bar{r}} - \frac{1}{\bar{r}} \frac{\partial \bar{u}}{\partial \phi} \quad (25)$$

連続の式

$$\frac{\partial \bar{u}}{\partial \bar{r}} + \frac{1}{\bar{r}} \frac{\partial \bar{v}}{\partial \phi} + \frac{2\bar{u}}{\bar{r}} + \frac{\cot \phi}{\bar{r}} \bar{v} = 0 \quad (26)$$

熱エネルギー方程式

$$\begin{aligned} \frac{\partial \bar{\theta}}{\partial \bar{r}} + \frac{\partial (\bar{u} \bar{\theta})}{\partial \bar{r}} + \frac{1}{\bar{r}} \frac{\partial (\bar{v} \bar{\theta})}{\partial \phi} + \frac{2\bar{u} \bar{\theta}}{\bar{r}} + \frac{\cot \phi}{\bar{r}} \bar{v} \bar{\theta} \\ = \left(\frac{1}{Pr} + \frac{\bar{\nu}_t}{\sigma_t} \right) \left(\frac{2}{\bar{r}} \frac{\partial \bar{\theta}}{\partial \bar{r}} + \frac{\cot \phi}{\bar{r}^2} \frac{\partial \bar{\theta}}{\partial \phi} \right) \\ + \frac{\partial}{\partial \bar{r}} \left\{ \left(\frac{1}{Pr} + \frac{\bar{\nu}_t}{\sigma_t} \right) \frac{\partial \bar{\theta}}{\partial \bar{r}} \right\} + \frac{1}{\bar{r}^2} \frac{\partial}{\partial \phi} \\ \times \left\{ \left(\frac{1}{Pr} + \frac{\bar{\nu}_t}{\sigma_t} \right) \frac{\partial \bar{\theta}}{\partial \phi} \right\} + \frac{gR^2}{\nu \gamma C (\theta_a - \theta_{lo})} \quad (27) \end{aligned}$$

渦度方程式

$$\begin{aligned} \frac{\partial \bar{\omega}}{\partial \bar{r}} + \frac{\partial (\bar{u} \bar{\omega})}{\partial \bar{r}} + \frac{1}{\bar{r}} \frac{\partial (\bar{v} \bar{\omega})}{\partial \phi} + \frac{\bar{u} \bar{\omega}}{\bar{r}} \\ = -G_r \left(\sin \phi \frac{\partial \bar{\theta}}{\partial \bar{r}} + \frac{\cos \phi}{r} \frac{\partial \bar{\theta}}{\partial \phi} \right) \\ + \frac{\partial^2}{\partial \bar{r}^2} \{ (1 - \bar{\nu}_t) \bar{\omega} \} + \frac{2}{\bar{r}} \frac{\partial}{\partial \bar{r}} \{ (1 - 2\bar{\nu}_t) \bar{\omega} \} \\ + \frac{1}{\bar{r}^2} \frac{\partial^2}{\partial \phi^2} \{ (1 + \bar{\nu}_t) \bar{\omega} \} + \frac{\cot \phi}{\bar{r}} \frac{\partial}{\partial \phi} \{ (1 + \bar{\nu}_t) \bar{\omega} \} \\ - \frac{1 + \bar{\nu}_t}{\bar{r}^2 \sin^2 \phi} \bar{\omega} + \frac{2}{\bar{r}} \left[4 \frac{\partial}{\partial \bar{r}} \left(\bar{\nu}_t \frac{\partial \bar{v}}{\partial \bar{r}} \right) \right. \\ \left. + \bar{r} \frac{\partial^2}{\partial \bar{r}^2} \left(\bar{\nu}_t \frac{\partial \bar{v}}{\partial \bar{r}} \right) \right. \\ \left. - \frac{1}{\bar{r}} \left\{ -\frac{\bar{\nu}_t}{\sin^2 \phi} \frac{\partial \bar{v}}{\partial \bar{r}} + \cot \phi \frac{\partial}{\partial \phi} \left(\bar{\nu}_t \frac{\partial \bar{v}}{\partial \bar{r}} \right) \right\} \right. \\ \left. + \frac{\partial^2}{\partial \phi^2} \bar{\nu}_t \frac{\partial \bar{v}}{\partial \bar{r}} \right] - \frac{\partial^2}{\partial \bar{r} \partial \phi} \left\{ \bar{\nu}_t \left(\frac{\partial \bar{u}}{\partial \bar{r}} - \frac{1}{\bar{r}} \frac{\partial \bar{v}}{\partial \phi} - \frac{\bar{u}}{\bar{r}} \right) \right. \\ \left. - \frac{3}{\bar{r}} \frac{\partial}{\partial \phi} \left(\bar{\nu}_t \frac{\partial \bar{u}}{\partial \bar{r}} \right) \right. \\ \left. - \cot \phi \frac{\partial}{\partial \bar{r}} \left\{ \bar{\nu}_t \left(\frac{\cot \phi}{\bar{r}} \bar{v} - \frac{1}{\bar{r}} \frac{\partial \bar{v}}{\partial \phi} \right) \right\} \right] \quad (28) \end{aligned}$$

乱流エネルギー方程式

$$\begin{aligned} \frac{\partial \bar{k}}{\partial \bar{r}} + \frac{\partial (\bar{u} \bar{k})}{\partial \bar{r}} + \frac{1}{\bar{r}} \frac{\partial (\bar{v} \bar{k})}{\partial \phi} + \frac{\bar{k}}{\bar{r}} (2\bar{u} + \bar{v} \cot \phi) \\ = \frac{\partial}{\partial \bar{r}} \left\{ \left(1 + \frac{\bar{\nu}_t}{\sigma_k} \right) \frac{\partial \bar{k}}{\partial \bar{r}} \right\} + \frac{1}{\bar{r}^2} \frac{\partial}{\partial \phi} \left\{ \left(1 + \frac{\bar{\nu}_t}{\sigma_k} \right) \frac{\partial \bar{k}}{\partial \phi} \right\} \\ + \bar{\nu}_t \left\{ 2 \left(\frac{\partial \bar{u}}{\partial \bar{r}} \right)^2 + 2 \left(\frac{1}{\bar{r}} \frac{\partial \bar{v}}{\partial \phi} + \frac{\bar{u}}{\bar{r}} \right)^2 \right. \\ \left. + 2 \left(\frac{\bar{u}}{\bar{r}} + \frac{\bar{v} \cot \phi}{\bar{r}} \right)^2 + \left(\frac{\partial \bar{v}}{\partial \bar{r}} + \frac{1}{\bar{r}} \frac{\partial \bar{u}}{\partial \phi} - \frac{\bar{v}}{\bar{r}} \right)^2 \right\} \\ - \bar{\varepsilon} - G_r \frac{\bar{\nu}_t}{\sigma_t} \left(\frac{1}{\cos \phi} \frac{\partial \bar{\theta}}{\partial \bar{r}} - \frac{1}{\bar{r} \sin \phi} \frac{\partial \bar{\theta}}{\partial \phi} \right) \quad (29) \end{aligned}$$

エネルギー消散方程式

$$\begin{aligned}
& \frac{\partial \bar{\varepsilon}}{\partial \bar{r}} + \frac{\partial \bar{u} \bar{\varepsilon}}{\partial \bar{r}} + \frac{1}{\bar{r}} \frac{\partial \bar{v} \bar{\varepsilon}}{\partial \phi} + \frac{\bar{\varepsilon}}{\bar{r}} (2\bar{u} + \bar{v} \cot \phi) \\
&= \frac{\partial}{\partial \bar{r}} \left\{ \left(1 + \frac{\bar{v}_t}{\sigma_\varepsilon} \right) \frac{\partial \bar{\varepsilon}}{\partial \bar{r}} \right\} + \frac{1}{\bar{r}^2} \frac{\partial}{\partial \phi} \left\{ \left(1 + \frac{\bar{v}_t}{\sigma_\varepsilon} \right) \frac{\partial \bar{\varepsilon}}{\partial \phi} \right\} \\
&+ C_1 \bar{v}_t \frac{\bar{\varepsilon}}{k} \left\{ 2 \left(\frac{\partial \bar{u}}{\partial \bar{r}} \right)^2 + 2 \left(\frac{1}{\bar{r}} \frac{\partial \bar{v}}{\partial \phi} + \frac{\bar{u}}{\bar{r}} \right)^2 \right. \\
&+ 2 \left(\frac{\bar{u}}{\bar{r}} + \frac{\bar{v} \cot \phi}{\bar{r}} \right)^2 + \left. \left(\frac{\partial \bar{v}}{\partial \bar{r}} + \frac{1}{\bar{r}} \frac{\partial \bar{u}}{\partial \phi} - \frac{\bar{v}}{\bar{r}} \right)^2 \right\} \\
&- C_2 \frac{\bar{\varepsilon}^2}{k} - C_3 G_r \frac{\bar{\varepsilon}}{k} \frac{\bar{v}_t}{\sigma_t} \left(\frac{1}{\cos \phi} \frac{\partial \bar{\theta}}{\partial \bar{r}} \right. \\
&\left. - \frac{1}{\bar{r}} \frac{1}{\sin \phi} \frac{\partial \bar{\theta}}{\partial \phi} \right) \quad (30)
\end{aligned}$$

渦動粘性係数

$$\bar{v}_t = c_\mu \frac{\bar{k}^2}{\bar{\varepsilon}} \quad (31)$$

渦度-流れ関数の式

$$\frac{1}{\bar{r} \sin \phi} \left(\frac{\partial^2 \bar{z}}{\partial \bar{r}^2} - \cot \phi \frac{\partial \bar{z}}{\partial \phi} + \frac{1}{\bar{r}^2} \frac{\partial^2 \bar{z}}{\partial \phi^2} \right) = \bar{\omega} \quad (32)$$

流速の式

$$\bar{u} = -\frac{1}{\bar{r}^2 \sin \phi} \frac{\partial \bar{z}}{\partial \phi}, \quad \bar{v} = \frac{1}{\bar{r} \sin \phi} \frac{\partial \bar{z}}{\partial \bar{r}} \quad (33)$$

但し $P_r = \nu/k = \gamma c \nu / \lambda$: プラントル数,

$G_r = \beta g (\theta_a - \theta_{Lo}) R^3 / \nu^2$: グラスホフ数である。

2.2 境界条件および初期条件

(1) 熱エネルギー

流体境界面垂直方向の全熱流束を考えると $Q = \gamma c u' \theta' - \lambda \partial \bar{\theta} / \partial n$ となるが、タンク壁面、自由表面および対称面を横切る流れはないから $u' = 0$ とすれば $Q = -\lambda \partial \bar{\theta} / \partial n$ となる。一方タンク壁面からの入熱量は液温度変化が小さいため一定とみてよい。そこで先ず全面断熱 $\partial \bar{\theta} / \partial n = 0$ とした上で、単位体積当りのタンク壁面からの入熱量、自由表面からの蒸発潜熱および中心面での対称条件を熱エネルギー基礎式の自己発熱項 q に与えることにする。即ち

$$\left. \begin{aligned}
& \text{タンク壁面: } q = \kappa_s \Delta S (\theta_a - \theta_b) / \Delta v \\
& \text{自由表面: } q = -w_e L \Delta S / \Delta v \\
& \text{中心面: } q = 0
\end{aligned} \right\} \quad (34)$$

次に自由表面については別の境界条件として、蒸発潜熱を奪われ冷却された後の液温はタンク気相部圧力の飽和温度に等しくなっているとの考えで

$$\text{自由表面: } \theta = \theta_{Lo} \quad (35)$$

のケースも同時に考察した。但し κ_s : 断熱材の熱貫流率, ΔS : タンク壁面或いは自由表面の表面積, Δv : 流体体積, θ_b : タンク壁に接した流体温度で初期温度 θ_{Lo} に等置する, w_e : 単位自由表面積で単位時間当りの蒸発量, L : 蒸発潜熱である。

(2) 流速

壁面近傍では高レイノルズ数モデルを採用する。速度分布は実験値とのマッチングが良好な 1/7 乗則⁶⁾ で表わし、これで粘性底層部をまたがして壁面と乱流混合部をつなぐ壁法則を適用する。即ち壁近傍における壁平行方向

流速 u は壁からの垂直距離を y , 比例定数を k とすれば $u = ky^{1/7}$ で表わされる。タンク中心面では対称条件, 自由表面では free slip 条件とする。

(3) 渦度

境界面での流速 \bar{u} , \bar{v} 分布を与えて式(13) $\bar{\omega} = \bar{v}/r + \partial \bar{v} / \partial r - (1/r)(\partial \bar{u} / \partial \phi)$ より計算する。

(4) 乱流エネルギーおよびエネルギー消散率

全境界線上で $k=0$, $\varepsilon=0$ 即ち差分表示をすれば境界線に接したセルを m , 外部仮想セルを $m+1$ と付番して $k_m + k_{m+1} = 0$, $\varepsilon_m + \varepsilon_{m+1} = 0$ とする。

(5) 流れ関数

境界面に垂直方向の流れはないから次の関係式を得る。

$$\text{側壁: } u = (1/r^2 \sin \phi) \partial z / \partial \phi = 0,$$

$$\text{対称面: } v = (-1/r \sin \phi) \partial z / \partial r = 0$$

$$\text{自由表面: } u = (1/r^2 \sin \phi) \partial z / \partial \phi = 0,$$

$$\text{球中心: } u = (1/r^2 \sin \phi) \partial z / \partial \phi = 0$$

従って各境界面の第一セルにおいて $z = \text{const.} = 0$ とおく。

次に初期条件としては $\tau=0$ において $\theta = \theta_{Lo}$, $u, v = 0$, $\omega = 0$ とする。乱流計算開始時の初期条件としては $\nu_t = \nu$ と物性値を与え, $k=0$, $\varepsilon=0$ からスタートする。

2.3 基礎式の離散化と計算法

以下においては各変数の時間平均化並びに無次元化記号の() を省略して表示する。

(1) 離散化式

無次元化基礎式(25)~(33)を有限差分法によって離散化する。時間微分は1次の前進差分, 対流項はセル境界上での平均流速で与える Donnar cell 法による実質2次の風上差分, 拡散項は2次の中心差分, 或いは Lax-Wendroff 法⁹⁾ による2次の中心差分で表示し, 時間項に関しては陽解法をとった。各変数の定義位置は Fig.3 に示すように温度, 渦度, 乱流エネルギー, エネルギー消散率および流れ関数のスカラー量を格子中央とし, 流速を格子の境界線上垂直方向に隣接セル流速の平均値としてとる Staggered grid 法を採用した。即ち

$$\begin{aligned}
u_1 &= \frac{u_{i-1j} + u_{ij}}{2}, & u_2 &= \frac{u_{ij} + u_{i+1j}}{2}, \\
v_1 &= \frac{v_{ij-1} + v_{ij}}{2}, & v_2 &= \frac{v_{ij} + v_{ij+1}}{2}
\end{aligned} \quad (36)$$

格子分割は Fig.4 に示すように r, ϕ 方向に 20 等分割し, 格子間隔を $\Delta r, \Delta \phi$, 時間間隔を $\Delta \tau$ とする。セル番号として r, ϕ 方向に i, j , 時間方向に p とする。以上によって式(25)~(33)の差分方程式を求め θ, ω, k および ε に関する1時間ステップ前進値 ($p+1$) を表す式を記すと次のようになる。

連続の式

$$\frac{u_2 - u_1}{\Delta r} + \frac{v_2 - v_1}{r_i \Delta \phi} + \frac{2u_1}{r_i} + \frac{\cot \phi_j}{r_i} v_1 = 0 \quad (37)$$

$$u_1 = \frac{u_{i-1j} + u_{ij}}{2}, \quad u_2 = \frac{u_{ij} + u_{i+1j}}{2}$$

$$v_1 = \frac{v_{i,j-1} + v_{ij}}{2}, \quad v_2 = \frac{v_{ij} + v_{i,j+1}}{2}$$

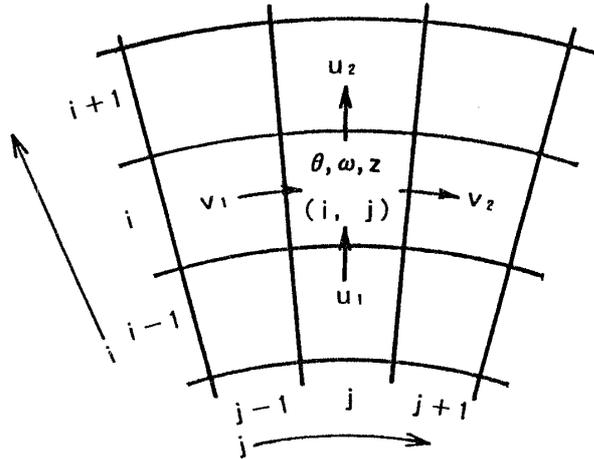


Fig. 3 Staggered grid method

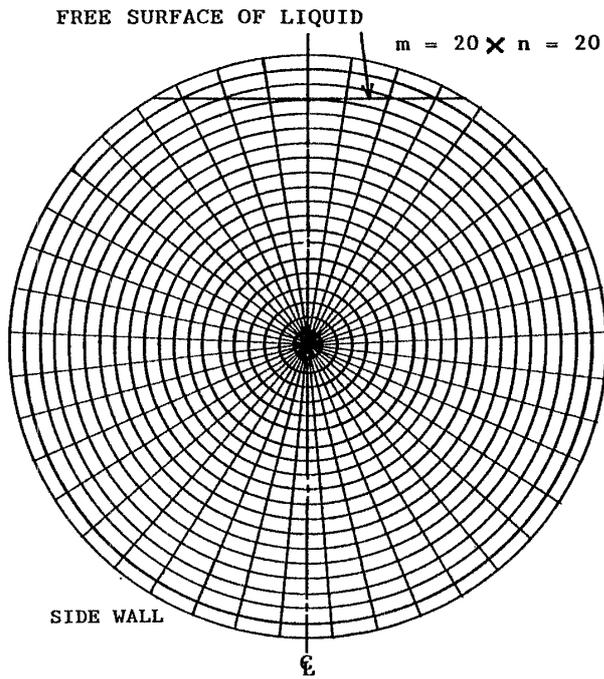


Fig. 4 Grid illustration in the tank

熱エネルギー方程式

$$\theta_{ij}^{p+1} = \theta_{ij}^p + \left[\frac{1}{2\Delta r} \{ (u_1 + |u_1|)\theta_{i-1j} - (u_2 - |u_2|)\theta_{i+1j} \right.$$

$$+ (u_1 - |u_1| - u_2 - |u_2|)\theta_{ij} \}$$

$$+ \frac{1}{2r_i\Delta\phi} \{ (v_1 + |v_1|)\theta_{ij-1} - (v_2 - |v_2|)\theta_{ij+1} \}$$

$$+ (v_1 - |v_1| - v_2 - |v_2|)\theta_{ij} \}$$

$$- (2u_1 + v_1 \cot \phi_j) \frac{\theta_{ij}}{r_i} - g_{ij}^0 \theta_{ij}$$

$$+ \left(\frac{1}{P_r} + \frac{\nu_{ij}}{\sigma_t} \right) \left(\frac{2}{r_i} \frac{\theta_{i+1j} - \theta_{i-1j}}{2\Delta r} \right.$$

$$+ \frac{\cot \phi_j}{r_i^2} \frac{\theta_{ij+1} - \theta_{ij-1}}{2\Delta\phi} \left. \right)$$

$$+ \frac{1}{2\Delta r^2} \left\{ \left(\frac{2}{P_r} + \frac{\nu_{ii+1j} + \nu_{ij}}{\sigma_t} \right) (\theta_{i+1j} - \theta_{ij}) \right.$$

$$- \left(\frac{2}{P_r} + \frac{\nu_{ij} + \nu_{ii-1j}}{\sigma_t} \right) (\theta_{ij} - \theta_{i-1j}) \left. \right\}$$

$$+ \frac{1}{2r_i^2\Delta\phi^2} \left\{ \left(\frac{2}{P_r} + \frac{\nu_{ij+1} + \nu_{ij}}{\sigma_t} \right) (\theta_{ij+1} - \theta_{ij}) \right.$$

$$- \left(\frac{2}{P_r} + \frac{\nu_{ij} + \nu_{ij-1}}{\sigma_t} \right) (\theta_{ij} - \theta_{ij-1}) \left. \right\}$$

$$+ \frac{qR^2}{\nu\gamma C(\theta_a - \theta_{to})} \Big] \Delta\tau \quad (38)$$

渦度の式

$$\omega_{ij}^{p+1} = \omega_{ij}^p + \left[\frac{1}{2\Delta r} \{ (u_1 + |u_1|)\omega_{i-1j} - (u_2 - |u_2|)\omega_{i+1j} \right.$$

$$+ (u_1 - |u_1| - u_2 - |u_2|)\omega_{ij} \} + \frac{1}{2r_i\Delta\phi} \{ (v_1 + |v_1|)\omega_{ij-1} \}$$

$$- (v_2 - |v_2|)\omega_{ij+1} + (v_1 - |v_1| - v_2 - |v_2|)\omega_{ij} \}$$

$$- \frac{u_{ij}}{r_i} \omega_{ij} - g_{ij}^0 \omega_{ij} - G_r \left(\sin \phi_j \frac{\theta_{i+1j} - \theta_{i-1j}}{2\Delta r} \right.$$

$$+ \frac{\cos \phi_i}{r_i} \frac{\theta_{ij+1} - \theta_{ij-1}}{2\Delta\phi} \left. \right) + \frac{1}{\Delta r^2} \{ (1 - \nu_{ii+1j})\omega_{i+1j} \}$$

$$- (1 - \nu_{ii-1j})\omega_{i-1j} + \frac{1}{r_i\Delta r} \{ (1 - 2\nu_{ii+1j})\omega_{i+1j} \}$$

$$- (1 - 2\nu_{ii-1j})\omega_{i-1j} + \frac{1}{r_i^2\Delta\phi} \{ (1 + \nu_{ij+1})\omega_{ij+1} \}$$

$$- (1 + \nu_{ij-1})\omega_{ij-1} + \frac{\cot \phi_j}{2r_i^2\Delta\phi} \{ (1 + \nu_{ij+1})\omega_{ij+1} \}$$

$$- (1 + \nu_{ij-1})\omega_{ij-1} - \frac{1 + \nu_{ij}}{r_i^2 \sin^2 \phi_j} \omega_{ij} \}$$

$$\textcircled{2}$$

$$+ \frac{2}{r_i} \left[\frac{4}{2\Delta r^2} \{ (\nu_{ii+1j} + \nu_{ij})(v_{i+1j} - v_{ij}) \right.$$

$$- (\nu_{ij} + \nu_{ii-1j})(v_{ij} - v_{i-1j}) \}$$

$$+ \frac{2r_i}{\Delta r^3} \{ (\nu_{ii+1j} + \nu_{ij})(v_{i+1j} - v_{ij}) \}$$

$$- 2\nu_{ij}(v_{i+1j} - v_{i-1j}) + (\nu_{ij} + \nu_{ii-1j})(v_{ij} - v_{i-1j}) \}$$

$$\textcircled{3}$$

$$- \frac{1}{r_i} \left[- \frac{\nu_{ij}}{\sin^2 \phi_j} \frac{v_{i+1j} - v_{i-1j}}{2\Delta r} + \frac{\cot \phi_j}{8\Delta r\Delta\phi} \right.$$

$$\times \{ (\nu_{ij} + \nu_{ij+1})(v_{i+1j+1} + v_{i+1j} - v_{i-1j+1} - v_{i-1j}) \}$$

$$- (\nu_{ij} + \nu_{ij-1})(v_{i+1j} + v_{i+1j-1} - v_{i-1j} - v_{i-1j-1}) \}$$

$$+ \frac{1}{2\Delta r\Delta\phi^2} \{ (\nu_{ij+1} + \nu_{ij})(v_{i+1j+1} + v_{i+1j} \}$$

$$- v_{i-1j+1} - v_{i-1j}) - 8\nu_{ij}(v_{i+1j} - v_{i-1j}) \}$$

$$+ (\nu_{ij} + \nu_{ij-1})(v_{i+1j} + v_{i+1j-1} - v_{i-1j} - v_{i-1j-1}) \}$$

$$- \frac{1}{4\Delta r^2\Delta\phi} \{ (\nu_{ii+1j+1} + \nu_{ij+1})(u_{i+1j+1} - u_{ij+1}) \}$$

$$- (\nu_{ii+1j-1} + \nu_{ij-1})(u_{i+1j-1} - u_{ij-1}) \}$$

$$\begin{aligned}
& -(\nu_{ij+1} + \nu_{i-1j+1})(u_{ij+1} - u_{i-1j+1}) \\
& + (\nu_{ij-1} + \nu_{i-1j-1})(u_{ij-1} - u_{i-1j-1}) \\
& + \frac{1}{4\Delta r \Delta \phi^2} \left\{ \frac{1}{r_{i+1}} (\nu_{ii+1j+1} + \nu_{ii+1j}) (v_{i+1j+1} - v_{i+1j}) \right. \\
& - \frac{1}{r_{i-1}} (\nu_{ii-1j+1} + \nu_{ii-1j}) (v_{i-1j+1} - v_{i-1j}) \\
& - \frac{1}{r_{i+1}} (\nu_{ii+1j} + \nu_{ii+1j-1}) (v_{i+1j} - v_{i+1j-1}) \\
& + \frac{1}{r_{i-1}} (\nu_{ii-1j} + \nu_{ii-1j-1}) (v_{i-1j} - v_{i-1j-1}) \\
& + \frac{1}{4\Delta r \Delta \phi} \left\{ \frac{1}{r_{i+1}} (\nu_{ii+1j+1} \cdot u_{i+1j+1} - \nu_{ii+1j-1} \cdot u_{i+1j-1}) \right. \\
& - \frac{1}{r_{i-1}} (\nu_{ii-1j+1} \cdot u_{i-1j+1} - \nu_{ii-1j-1} \cdot u_{i-1j-1}) \\
& - \frac{3}{8r_i \Delta r \Delta \phi} \{ (\nu_{ij} + \nu_{ij+1})(u_{i+1j+1} + u_{i+1j} - u_{i-1j+1} \\
& - u_{i-1j}) - (\nu_{ij} + \nu_{ij-1})(u_{i+1j} + u_{i+1j-1} - u_{i-1j} \\
& - u_{i-1j-1}) \} - \frac{\cot^2 \phi_j}{2\Delta r} \left(\frac{1}{r_{i+1}} \nu_{ii+1j} v_{i+1j} - \frac{1}{r_{i-1}} \nu_{ii-1j} v_{i-1j} \right) \\
& + \frac{\cot \phi_j}{8\Delta r \Delta \phi} \left\{ \left(\frac{\nu_{ij}}{r_i} + \frac{\nu_{ii+1j}}{r_{i+1}} \right) \right. \\
& \times (v_{i+1j+1} + v_{ij+1} - v_{i+1j-1} - v_{ij-1}) \\
& - \left. \left(\frac{\nu_{ij}}{r_i} + \frac{\nu_{ii-1j}}{r_{i-1}} \right) (v_{ij+1} + v_{i-1j+1} - v_{ij-1} \right. \\
& \quad \textcircled{2} \quad \textcircled{1} \\
& \left. - v_{i-1j-1}) \right\} \Bigg]^p \Delta \tau \quad (39)
\end{aligned}$$

但し [②] は [①] と同じ数字同志の括弧位置が対応していることを意味する。

乱流エネルギー式

$$\begin{aligned}
k_{ij}^{p+1} &= k_{ij}^k + \left[\frac{1}{2\Delta r} \{ (u_1 + |u_1|) k_{i-1j} - (u_2 - |u_2|) k_{i+1j} \right. \\
& + (u_1 - |u_1| - u_2 - |u_2|) k_{ij} \} + \frac{1}{2r_i \Delta \phi} \{ (v_1 + |v_1|) k_{ij-1} \\
& - (v_2 - |v_2|) k_{ij+1} + (v_1 - |v_1| - v_2 - |v_2|) k_{ij} \} \\
& + \frac{1}{2\Delta r^2} \left\{ \left(2 + \frac{\nu_{ii+1j} + \nu_{ii+1j}}{\sigma_k} \right) (k_{i+1j} - k_{ij}) \right. \\
& - \left. \left(2 + \frac{\nu_{ii+1j} + \nu_{ii-1j}}{\sigma_k} \right) (k_{ij} - k_{i-1j}) \right\} \\
& + \frac{1}{2r_i^2 \Delta \phi^2} \left\{ \left(2 + \frac{\nu_{ii+1j+1} + \nu_{ii+1j}}{\sigma_k} \right) (k_{ij+1} - k_{ij}) \right. \\
& - \left. \left(2 + \frac{\nu_{ii+1j} + \nu_{ii-1j}}{\sigma_k} \right) (k_{ij} - k_{ij-1}) \right\} + \nu_{ij} \left\{ 2 \left(\frac{u_2 - u_1}{\Delta r} \right)^2 \right. \\
& + \frac{2}{r_i^2} \left(\frac{v_2 - v_1}{\Delta \phi} + u_2 \right)^2 + \frac{2}{r_i^2} (u_1 + v_1 \cot \phi_j)^2 \\
& + \left. \left(\frac{v_{i+1j} - v_{i-1j}}{2\Delta r} + \frac{1}{r_i} \frac{u_{ij+1} - u_{ij-1}}{2\Delta \phi} - \frac{v_2}{r_i} \right)^2 \right\} \\
& - (2u_1 + v_1 \cot \phi_j) \frac{k_{ij}}{r_i} - \varepsilon_{ij} - g_{ij}^k k_{ij} \\
& - G_r \frac{\nu_{ii+1j}}{\sigma_t} \left(\frac{1}{\cos \phi_j} \frac{\theta_{i+1j} - \theta_{i-1j}}{2\Delta r} \right. \\
& \left. - \frac{1}{r_i \sin \phi_j} \frac{\theta_{ij+1} - \theta_{ij-1}}{2\Delta \phi} \right) \Bigg]^p \Delta \tau \quad (40)
\end{aligned}$$

エネルギー消散式

$$\begin{aligned}
\varepsilon_{ij}^{p+1} &= \varepsilon_{ij}^k + \left[\frac{1}{2\Delta r} \{ (u_1 + |u_1|) \varepsilon_{i-1j} - (u_2 - |u_2|) \varepsilon_{i+1j} \right. \\
& + (u_1 - |u_1| - u_2 - |u_2|) \varepsilon_{ij} \} + \frac{1}{2r_i \Delta \phi} \{ (v_1 + |v_1|) \varepsilon_{ij-1} \\
& - (v_2 - |v_2|) \varepsilon_{ij+1} + (v_1 - |v_1| - v_2 - |v_2|) \varepsilon_{ij} \} \\
& + \frac{1}{2\Delta r^2} \left\{ \left(2 + \frac{\nu_{ii+1j} + \nu_{ii+1j}}{\sigma_\varepsilon} \right) (\varepsilon_{i+1j} - \varepsilon_{ij}) \right. \\
& - \left. \left(2 + \frac{\nu_{ii+1j} + \nu_{ii-1j}}{\sigma_\varepsilon} \right) (\varepsilon_{ij} - \varepsilon_{i-1j}) \right\} \\
& + \frac{1}{2r_i^2 \Delta \phi^2} \left\{ \left(2 + \frac{\nu_{ii+1j+1} + \nu_{ii+1j}}{\sigma_\varepsilon} \right) (\varepsilon_{ij+1} - \varepsilon_{ij}) \right. \\
& - \left. \left(2 + \frac{\nu_{ii+1j} + \nu_{ii-1j}}{\sigma_\varepsilon} \right) (\varepsilon_{ij} - \varepsilon_{ij-1}) \right\} \\
& + C_1 \nu_{ij} \frac{\varepsilon_{ij}}{k_{ij}} \left\{ 2 \left(\frac{u_2 - u_1}{\Delta r} \right)^2 + \frac{2}{r_i^2} \left(\frac{v_2 - v_1}{\Delta \phi} + u_2 \right)^2 \right. \\
& + \frac{2}{r_i^2} (u_1 + v_1 \cot \phi_j)^2 + \left. \left(\frac{v_{i+1j} - v_{i-1j}}{2\Delta r} \right. \right. \\
& + \left. \frac{1}{r_i} \frac{u_{ij+1} - u_{ij-1}}{2\Delta \phi} - \frac{v_2}{r_i} \right)^2 \Bigg\} - (2u_1 + v_1 \cot \phi_j) \frac{\varepsilon_{ij}}{r_i} \\
& - g_{ij}^k \varepsilon_{ij} - C_2 \frac{\varepsilon_{ij}^2}{k_{ij}} - C_3 G_r \frac{\varepsilon_{ij}}{k_{ij}} \frac{\nu_{ii+1j}}{\sigma_t} \left(\frac{1}{\cos \phi_j} \frac{\theta_{i+1j} - \theta_{i-1j}}{2\Delta r} \right. \\
& \left. - \frac{1}{r_i \sin \phi_j} \frac{\theta_{ij+1} - \theta_{ij-1}}{2\Delta \phi} \right) \Bigg]^p \Delta \tau \quad (41)
\end{aligned}$$

渦動粘性係数

$$\nu_{ij}^{p+1} = C_\mu \frac{(k_{ij}^{p+1})^2}{\varepsilon_{ij}^{p+1}} \quad (42)$$

但し []^p は [] 内の変数がすべて時刻 p における値であることを示す。

本式中の g_{ij}^k , g_{ij}^k , g_{ij}^k , g_{ij}^k は以下に定義される式で、物理的意味は (2) において述べる。

$$g_{ij}^k = g_{ij}^k = g_{ij}^k = \{ u_1 (r_i - 2\Delta r) \Delta \phi - u_2 r_i \Delta \phi + v_1 (1 - \Delta \phi \cot \phi_j) \Delta r - v_2 \Delta r \} / (r_i \Delta r \Delta \phi) \quad (43)$$

$$g_{ij}^k = \{ u_i (r_i - \Delta r) \Delta \phi - u_2 r_i \Delta \phi + v_1 \Delta r - v_2 \Delta r \} / (r_i \Delta r \Delta \phi) \quad (44)$$

次に渦度-流れ関数の式(32)は次式に示すように仮想時間軸で(差分表示時間軸 k)をとって非定常拡散式に変換した上で、各時間ステップ p での ω 値を与えて漸近定常解 z_{ij}^k を逐次過緩和方式のSOR法によって求める。

$$\frac{\partial z}{\partial \tau} = \frac{1}{r \sin \phi} \left(\frac{\partial^2 z}{\partial r^2} - \frac{\cot \phi}{r^2} \frac{\partial z}{\partial \phi} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 z}{\partial \phi^2} \right) - \omega \quad (45)$$

式(45)を差分表示し、安定条件を満足する最大時間間隔 $\Delta \tau'$ を採用して時間前進値 z^{k+1} を求めると次のようになる。

$$z_{ij}^{k+1} = z_{ij}^k + (\xi/D) (Az_{i+1j}^k + Az_{i-1j}^k + Bz_{ij}^{k+1} + Cz_{ij-1}^k - Dz_{ij}^k - \omega_{ij}^k) \quad (46)$$

但し

$$A = 1 / (r_i \Delta r^2 \sin \phi_j),$$

$$B = (1/\Delta \phi - \cot \phi_j/2) / (r_i^2 \Delta \phi \sin \phi_j),$$

$$C = (1/\Delta \phi + \cot \phi_j/2) / (r_i^2 \Delta \phi \sin \phi_j),$$

$$D = 2(1 + \Delta r^2 / r_i^2 \Delta \phi^2) / (r_i \Delta r^2 \sin \phi_j)$$

ここで収束までの繰返し回数を支配する加速係数 ξ の

値は数値実験の結果 $\zeta=1.49$ で最小回数近辺の値が得られたためこれを採用した。次にセル中央での流速は次式から求める。

流速の式

$$u_{ij} = -\frac{1}{r_i^2 \sin \phi_j} \frac{z_{ij+1} - z_{ij-1}}{2\Delta\phi},$$

$$v_{ij} = \frac{1}{r_i \sin \phi_j} \frac{z_{i+1j} - z_{i-1j}}{2\Delta r} \quad (47)$$

(2) 質量保存則

連続の式は流れ関数を微分して得られる流速解によって満足されるが、直角座標系の場合にはセルの大きさが一様であるため、流れ関数の差分値での流速は自動的に差分表示の連続の式を満足する。球座標系では、非保存形で表した対流項の場合にはセルの大きさが r, ϕ の位置によって異なるため、有限の刻み幅で離散化して得られた流速解群を一つの Control volume について整理するとその質量収支は 0 とならない。このことは各々の輸送方程式でセルに流入、流出するスカラ量が非平衡であることを意味しており、このままでは時間と共に発散現象が起こる。

そこで著者は各セルの非平衡量を増減させてスカラ量の平衡条件を満足させる方法によって安定解を得ることができた。 θ, k および ε については連続式(37)で2次の微小量を見掛けた質量収支の式を作ると非平衡量 $g_{ij}^{\theta}, g_{ij}^k, g_{ij}^{\varepsilon}$ は式(43)で表わされる。渦度については遠心力やコリオリの力の項の存在のため見掛けの対流項は式(28)の様に円柱座標相当の式となり、非平衡量 g_{ij}^{ω} は式(44)で表わされる。セル (i, j) のスカラ量の必要補正量を $-g_{ij}^{\theta}\theta_{ij}, -g_{ij}^k k_{ij}, -g_{ij}^{\varepsilon}\varepsilon_{ij}$ および $-g_{ij}^{\omega}\omega_{ij}$ として、これを各々の式の対流項に付加する。 $g_{ij}^{\theta, k, \varepsilon, \omega}$ は連続の式を差分表示したものであるから $\Delta r, \Delta\phi$ を小さく即ち分割数を大きくすれば 0 に漸近するため、補正量が小さくなり精度向上が計られることを意味している。

(3) 境界条件

自由表面でのセル配列は分割数によって異なるが 20×20 等分割の場合を Fig.5 に示し、98 volume % の液位でのセルに(イ), (ロ), (ハ), (ニ)と付番し、全セル共に流体が充実しているとする。更に中心部セルの両端(1, 1), (1, n)を(ヘ), (ト), 底部セル (m, n) を(ホ)とする。

熱エネルギーの場合には 2.2(1)に述べた様に、先ず全境界を断熱条件としてタンク周囲および自由表面で自己発熱項として取扱い、それぞれのセルに式(34)を適用する。セル(ニ)は自由表面とタンク表面の両者を有することになる。

蒸発量 w は流体の初期温度での全入熱量に相当する蒸発量を自由表面積の全体で除して求める。境界セル座標を (i, j) , 隣接した外部仮想セル座標を $(i \pm 1, j \pm 1)$ とすれば断熱条件は $\theta_{ij} = \theta_{i \pm 1, j}, \theta_{ij} = \theta_{i, j \pm 1}$ となる。

一方自由表面の温度を固定する場合には $\theta_{ij} = \theta_{Lo}$, 無次

元化すれば $\bar{\theta}_{ij} = 0$ とする。

流速に関しては壁面部で 1/7 乗則を適用するため、流体内の第1セル中心点を乱流域において、そこを通る 1/7 乗則式に接線を引いて流速を仮定すると Fig.6 に示すように第1セル, 壁面上および外部仮想セル中心点での壁平行方向流速はそれぞれ $u, 6u/7, 5u/7$ となる。

渦度に関しては境界面での流速分布から次のようになる。但し (f, g) は自由表面のセル座標 (i, j) を示す。

側壁 : $\omega_{m1}^{p+1} = \{v/r + \partial v/\partial r - (1/r)(\partial u/\partial \phi)\}_{i=m}^p = v_{m1}^p + (2/7)(v_{m1}^p/\Delta r)$

上下対称面 : $\omega_{i1}^{p+1}, \omega_{m1}^{p+1} = 0$

球中心 : $\omega_{fg}^{p+1} = v_{fg}^p/\Delta r + (4v_{2j} - v_{3j} - 3v_{1j})^p/2\Delta r$

自由表面(イ) : $\omega_{f1}^{p+1} = 0$

〃 (ロ) : $\omega_{fg}^{p+1} = v_{fg}^p/\Delta r + (v_{fg} - v_{f-1g})^p/2\Delta r$

〃 (ハ), (ニ) : $\omega_{fg}^{p+1} = (-4v_{f-1g} + v_{f-2g})^p/2\Delta r$

底部 (ホ) : ω_{mn}^{p+1}

球中心(ヘ), (ト) : $\omega_{i1}^{p+1}, \omega_{1n}^{p+1} = 0 \quad (48)$

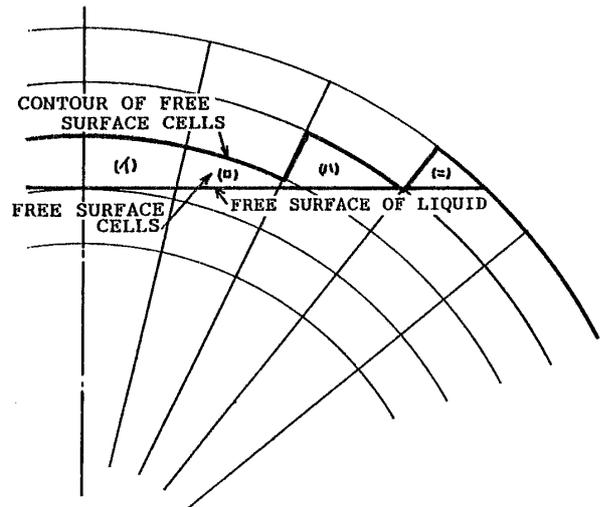


Fig.5 Modelling of free surface cells

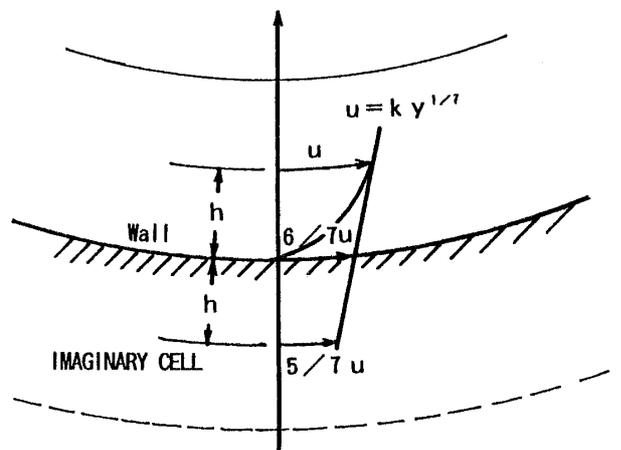


Fig.6 Velocity boundary condition for rigid wall

3. 数値計算

3.1 計算スキーム

計算手順は初期条件として、一様な初期温度の静止流体状態から 1 時間ステップ経過後の温度分布を式(38)から求める。次に浮力項を考慮した式(39)から渦度分布を求める。以降先ず層流計算を実行する。即ち式(46), (47)から z, u, v を求め、再び温度計算へ戻りこれを 200 ステップ実行し流体全域に亘って流速を十分に発達させる。然る後に乱流計算を開始する。先ず $v_i = v$ (無次元表示では $\bar{v}_i = 1$), $k = 0, \varepsilon = 0$ として式(40)から $k^{(1)}$ を計算する。次に $\varepsilon^{(1)}$ を式(42)から $\varepsilon^{(1)} = c_\mu(k^{(1)})^2$ として求め $\nu_i^{(1)} = c_\mu(k^{(1)})^2/\varepsilon^{(1)}$ を求める。得られた各値を用いて 2 回目以降は式(38), (39), (40), (41), (42), (46) および(47)の順序で繰り返し計算を行う。但し k, ε 式の浮力項は 1000 ステップ目から投入する。

以上の計算を $\theta, \omega, k, \varepsilon$ の定常解が得られるまで繰返す。変数は倍精度とし、得られたより若い座標位置の値は次の座標での計算に用いて収束を早めた。

それぞれの変数の収束判定条件としては全セルについて 1 時間ステップ間の変動値として LNG で 10^{-6} °C/step 即ち $|\theta^{p+1} - \theta^p|/(\theta_a - \theta_{Lo}) \leq 5.5 \times 10^{-8}$, LH₂ で 10^{-7} °C/step 同様に 3.7×10^{-9} , 渦度, 流れ関数では LNG, LH₂ 共通に $|(\omega^{p+1} - \omega^p)/\omega_p| \leq 10^{-3}$, $|z^{k+1} - z^k|/z^k \leq 10^{-7}$ とした。 k および ε については成り行き値としたが実際の変動割合は 10^{-4} 程度の収束状態となる。

3.2 安定条件

Explicit 型の差分方程式の場合には時間間隔 $\Delta\tau$ の大きさは、解が振動発散を起さぬための安定条件からの制約を受ける。ここでは Neumann の式⁷⁾に従って時間 p および $p+1$ のときの解 V の比を増幅係数 $G (= V^{p+1}/V^p)$ として $|G|^2 = G \cdot \bar{G} \leq 1$ の条件から最大時間間隔を求めた。本条件にあてはめて基礎式および境界条件式での $\Delta\tau$ を求めると以下ようになる。これらのうちの最小値 $\times 0.5$ を $\Delta\tau^{p+1}$ の値として採用した。

熱エネルギー式: $1 \leq i \leq m, 1 \leq j \leq n$

$$\begin{aligned} \Delta\tau_i^{p+1} \leq & 2 / \left[\frac{1}{2\Delta r} \{ (u_1 + |u_1|) T_{i-1j} - (u_2 - |u_2|) T_{i+1j} \right. \\ & + (u_1 - |u_1| - u_2 - |u_2|) T_{ij} \\ & + \frac{1}{2r_i \Delta\phi} \{ (v_1 + |v_1|) T_{i-1j} - (v_2 - |v_2|) T_{i+1j} \\ & + (v_1 - |v_1| - v_2 - |v_2|) T_{ij} \} \\ & - \left(\frac{2u_1 + v_1 \cot \phi_j + g_{ij}^0}{r_i} T_{ij} + \left(\frac{1}{P_r} + \frac{\nu_{ij}}{\sigma_t} \right) \right. \\ & \times \left(\frac{2}{r_i} \frac{T_{i+1j} - T_{i-1j}}{2\Delta r} + \frac{\cot \phi_j}{r_i^2} \frac{T_{i+1j} - T_{i-1j}}{2\Delta\phi} \right) \\ & \left. + \frac{1}{2\Delta r^2} \left\{ \left(\frac{2}{P_r} + \frac{\nu_{i+1j} + \nu_{ij}}{\sigma_t} \right) (T_{i+1j} - T_{ij}) \right. \right. \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} & \left. - \left(\frac{2}{P_r} + \frac{\nu_{ij} + \nu_{i-1j}}{\sigma_t} \right) (T_{ij} - T_{i-1j}) \right\} \\ & + \frac{1}{2r_i^2 \Delta\phi^2} \left\{ \left(\frac{2}{P_r} + \frac{\nu_{ij+1} + \nu_{ij}}{\sigma_t} \right) (T_{ij+1} - T_{ij}) \right. \\ & \left. - \left(\frac{2}{P_r} + \frac{\nu_{ij} + \nu_{ij-1}}{\sigma_t} \right) (T_{ij} - T_{ij-1}) \right\} \Bigg]^p \quad (49) \end{aligned}$$

但し $2 \leq i \leq m-1, 2 \leq j \leq n-1$ のとき $T_{i-1j}, T_{i+1j}, T_{ij-1}, T_{ij+1} = 1, T_{ij} = -1, i=1$ or $m, j=1$ or n のとき $T_{i\pm 1j}, T_{ij\pm 1} = -1$ である。

渦度式: $2 \leq i < m-1, 2 \leq j \leq n-1$

$$\begin{aligned} \Delta\tau_j^{p+1} \leq & 2 / \left[\frac{1}{2\Delta r} \{ (u_1 + |u_1|) W_{i-1j} - (u_2 - |u_2|) W_{i+1j} \right. \\ & + (u_1 - |u_1| - u_2 - |u_2|) W_{ij} \} + \frac{1}{2r_i \Delta\phi} \{ (v_1 + |v_1|) W_{ij-1} \\ & - (v_2 - |v_2|) W_{ij+1} + (v_1 - |v_1| - v_2 - |v_2|) W_{ij} \} \\ & - \left(\frac{u_{ij}}{r_i} + g_{ij}^0 + \frac{1 + \nu_{ij}}{r_i^2 \sin^2 \phi_j} \right) W_{ij} \\ & + \frac{1}{\Delta r^2} \{ (1 - \nu_{i+1j}) W_{i+1j} - (1 - \nu_{i-1j}) W_{i-1j} \} \\ & + \frac{1}{r_i \Delta r} \{ (1 - 2\nu_{i+1j}) W_{i+1j} - (1 - 2\nu_{i-1j}) W_{i-1j} \} \\ & + \frac{1}{r_i^2 \Delta\phi} \{ (1 + \nu_{ij+1}) W_{ij+1} - (1 + \nu_{ij-1}) W_{ij-1} \} \\ & \left. + \frac{\cot \phi_j}{2r_i^2 \Delta\phi} \{ (1 + \nu_{ij+1}) W_{ij+1} - (1 + \nu_{ij-1}) W_{ij-1} \} \right]^p \quad (50) \end{aligned}$$

但し, $W_{i-1j}, W_{i+1j}, W_{ij-1}, W_{ij+1} = 1, W_{ij} = -1$ である。乱流エネルギー式: $1 \leq i \leq m, 1 \leq j \leq n$

$$\begin{aligned} \Delta\tau_j^{p+1} \leq & 2 / \left[\frac{1}{2\Delta r} \{ (u_1 + |u_1|) K_{i-1j} - (u_2 - |u_2|) K_{i+1j} \right. \\ & + (u_1 + |u_1| - u_2 - |u_2|) K_{ij} \} \\ & + \frac{1}{2r_i \Delta\phi} \{ (v_1 + |v_1|) K_{ij-1} - (v_2 - |v_2|) K_{ij+1} \\ & + (v_1 - |v_1| - v_2 - |v_2|) K_{ij} \} - (2u_1 + v_1 \cot \phi_j) \frac{K_{ij}}{r_i} \\ & - g_{ij}^k K_{ij} + \frac{1}{2\Delta r^2} \left\{ \left(2 + \frac{\nu_{i+1j} + \nu_{ij}}{\sigma_k} \right) (K_{i+1j} - K_{ij}) \right. \\ & - \left(2 + \frac{\nu_{ij} + \nu_{i-1j}}{\sigma_k} \right) (K_{ij} - K_{i-1j}) \Bigg\} \\ & + \frac{1}{2r_i^2 \Delta\phi^2} \left\{ \left(2 + \frac{\nu_{ij+1} + \nu_{ij}}{\sigma_k} \right) (K_{ij+1} - K_{ij}) \right. \\ & \left. - \left(2 + \frac{\nu_{ij} + \nu_{ij-1}}{\sigma_k} \right) (K_{ij} - K_{ij-1}) \right\} \Bigg]^p \quad (51) \end{aligned}$$

但し $K_{i-1j}, K_{i+1j}, K_{ij-1}, K_{ij+1} = 1, K_{ij} = -1$ である。

エネルギー消散率式: $1 \leq i \leq m, 1 \leq j \leq n$

$$\begin{aligned} \Delta\tau_j^{p+1} \leq & 2 / \left[\frac{1}{2\Delta r} \{ (u_1 + |u_1|) E_{i-1j} - (u_2 - |u_2|) E_{i+1j} \right. \\ & + (u_1 - |u_1| - u_2 - |u_2|) E_{ij} \} \\ & + \frac{1}{2r_i \Delta\phi} \{ (v_1 + |v_1|) E_{ij-1} - (v_2 - |v_2|) E_{ij+1} \\ & + (v_1 - |v_1| - v_2 - |v_2|) E_{ij} \} + \frac{C_1 \nu_{ij}}{k_{ij}} \left\{ 2 \left(\frac{u_2 - u_1}{\Delta r} \right)^2 \right. \\ & \left. + \frac{1}{r_i^2} \left(\frac{v_2 - v_1}{\Delta\phi} + u_2 \right)^2 + \frac{2}{r_i^2} (u_1 + v_1 \cot \phi_j)^2 \right\} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 & + \left(\frac{v_{i+1j} - v_{i-1j}}{2\Delta r} + \frac{1}{r_i} \frac{u_{ij+1} - u_{ij-1}}{2\Delta\phi} - \frac{v_2}{r_i} \right)^2 E_{ij} \\
 & - \left\{ \frac{2u_i + v_i \cot \phi_j}{r_i} + g_{ij}^e + \frac{C_2}{k_{ij}} + \frac{C_3 G_r}{k_{ij}} \frac{\nu_{ij}}{\sigma_i} \right. \\
 & \times \left(\frac{1}{\cos \phi_j} \frac{\theta_{i+1j} - \theta_{i-1j}}{2\Delta r} \right. \\
 & \left. - \frac{1}{r_i \sin \phi_j} \frac{\theta_{ij+1} - \theta_{ij-1}}{2\Delta\phi} \right) \left. \right\} E_{ij} \\
 & + \frac{1}{2\Delta r^2} \left\{ \left(2 + \frac{\nu_{ii+1j} + \nu_{ijj}}{\sigma_e} (E_{i+1j} - E_{ij}) \right. \right. \\
 & \left. \left. - \left(2 + \frac{\nu_{ijj} + \nu_{ijj-1}}{\sigma_e} \right) (E_{ij} - E_{i-1j}) \right) \right\} \\
 & + \frac{1}{2r_i^2 \Delta\phi^2} \left\{ \left(2 + \frac{\nu_{ij+1j} + \nu_{ijj}}{\sigma_e} (E_{ij+1} - E_{ij}) \right. \right. \\
 & \left. \left. - \left(2 + \frac{\nu_{ijj} + \nu_{ijj-1}}{\sigma_e} \right) (E_{ij} - E_{ij-1}) \right) \right\}^p \quad (52)
 \end{aligned}$$

但し $E_{i-1j}, E_{i+1j}, E_{ij-1}, E_{ij+1}=1, E_{ij}=-1$ である。

3.3 数値諸元

球形タンクは 120,000 m³ 型 LNG 船の直径 39.5 m ($R=19.75$ m) とした。タンク断熱の熱貫流率は LNG で $\kappa_s=0.1$ kcal/m²h°C および 0.2 kcal/m²h°C, LH₂ では高真空断熱として $\kappa_s=0.0018$ kcal/m²h°C とした。相当 BOR は cargo 成分をメタン, 水素とし, 且つスカートからの入熱分を無視すればそれぞれ 0.128%/day (LNG), 0.256%/day (LNG), 0.0236%/day (LH₂) となる。タンクの周囲温度は $\theta_a=20^\circ\text{C}$, 液レベルは 98% filling ratio とした。その他計算に使用した数値は LNG (LH₂) で次の通りである。 $G_r=6.49 \times 10^{17} (9.81 \times 10^{18})$, $\lambda=0.165 (0.1012)$ kcal/mh°C, $c=0.828 (2.31)$ kcal/kg°C, $\gamma=426 (71)$ kg/m³, $Pr=2.1 (1.14)$, $\beta=3.6 \times 10^{-3} (1.83 \times 10^{-2})$ K⁻¹, $\nu=9.94 \times 10^{-4} (7.06 \times$

$10^{-4})$ m²/h, $L=122 (107)$ kcal/kg, $\theta_{i0}=-162 (-253)^\circ\text{C}$, $w=2.14 (0.0658)$ kg/m²h, 自由表面半径 $r_f=10.12$ m。自己発熱項 q の大きさは各セルで次のようになる。

$$\begin{aligned}
 q(i) &= -64.34 w (-56.44 w), \quad q(\cap) = -97.64 w (-85.64 w), \\
 q(\vee) &= -99.30 w (-87.09 w), \quad q(\ominus) = -66.29 w (-58.14 w) \\
 &+ \kappa_s (\theta_a - \theta_{i0}) / R \Delta r \times (4^\circ / 8.75^\circ), \quad q_{\text{tank wall}} = \kappa_s (\theta_a
 \end{aligned}$$

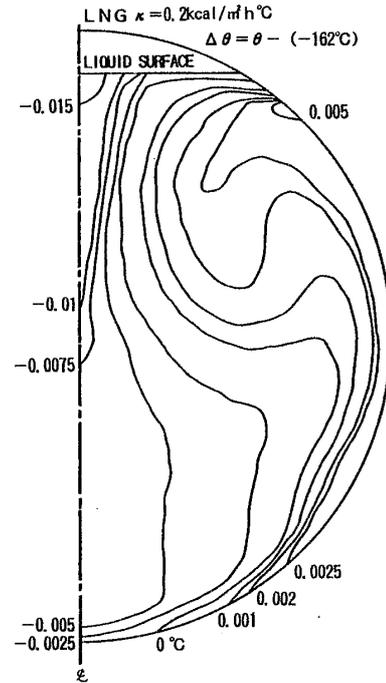


Fig. 8 Isotherm contours for LNG, $\kappa_s=0.2$ kcal/m²h°C

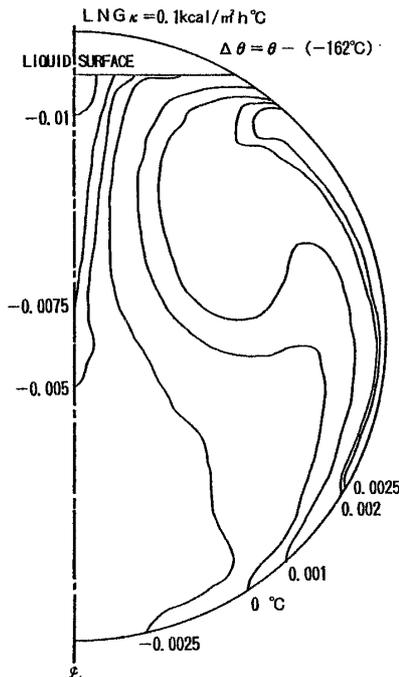


Fig. 7 Isotherm contours for LNG, $\kappa_s=0.1$ kcal/m²h°C

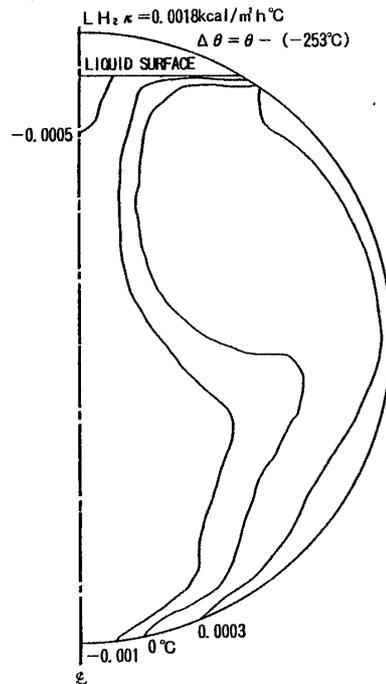


Fig. 9 Isotherm contours for LH₂, $\kappa_s=0.0018$ kcal/m²h°C

$-\theta_{L0})/R\Delta r$

3.4 結果の考察

3.4.1 自由表面で侵入熱量と等価のボイルオフを与えた場合

(1) 温度分布 (Fig. 7, 8, 9) : タンク周辺部で暖められ, 自由表面で冷却される条件となるため, 温度分布もタ

ンク周辺で高く, 自由表面および中心部で低い形となっている。この傾向は断熱材の熱貫流率が大きい程顕著である。LNG と高断熱の LH₂ は定性的には同じことが言える。球全体でみると熱平衡が保たれているため平均温度は沸点に維持されている。

(2) 流れ関数および流速分布 (Fig. 10~15) : 流線分布は下半球で粗で, 上半球では密であり, 上半球に一つの

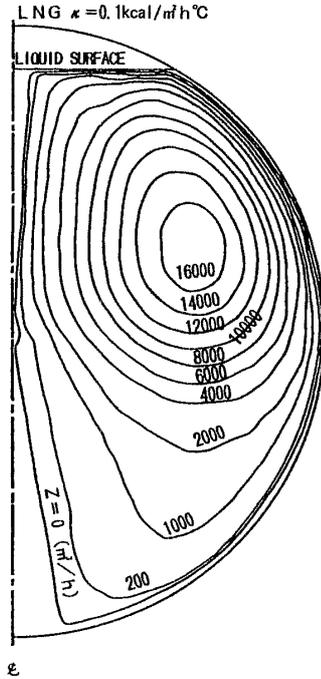


Fig. 10 Stream function contours for LNG, $\kappa_s = 0.1 \text{ kcal/m}^2\text{h}^\circ\text{C}$

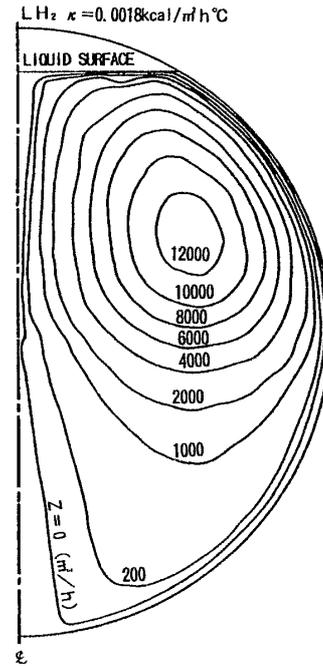


Fig. 12 Stream function contours for LH₂, $\kappa_s = 0.0018 \text{ kcal/m}^2\text{h}^\circ\text{C}$

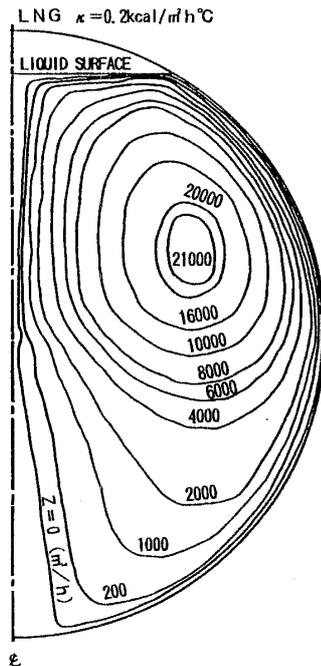


Fig. 11 Stream function contours for LNG, $\kappa_s = 0.2 \text{ kcal/m}^2\text{h}^\circ\text{C}$

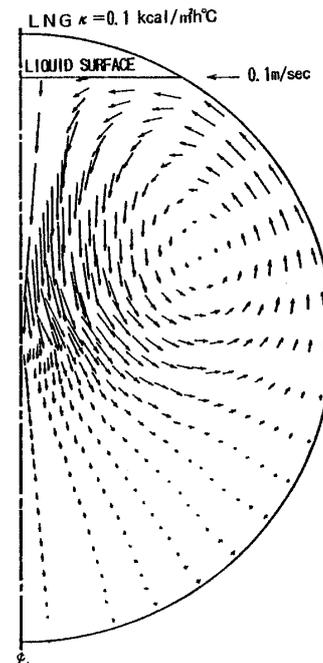


Fig. 13 Velocity profiles for LNG, $\kappa_s = 0.1 \text{ kcal/m}^2\text{h}^\circ\text{C}$

流れの渦が生じている。流れ関数の値はタンクからの入熱が大きい程大である。流速は上半球で大きく、最大値はタンク中心線に沿った下降流で0.1~0.2 m/secに達するが、下半球では0.01 m/sec前後と非常に小さく、むしろ静止状態に近いと言えよう。

(3) 乱流エネルギー k , 同消散率 ϵ および渦動粘性係数 ν_t の分布 (Fig. 16, 17, 18) : LNG, $\kappa_s=0.1 \text{ kcal/m}^2\text{h}^\circ\text{C}$ の

場合でみると、無次元値で、 k は $10^{11} \sim 10^{13}$ の大ききで分布しており、球の中心部で大きく、下半球、特にタンク周辺部で小さい。 ϵ は $10^{17} \sim 10^{20}$ の分布で球中心部で高く、下半球タンク周辺部で小さい。これらの分布は流速分布と関連している。 ν_t は物性値の $10^4 \sim 8 \times 10^4$ 倍程度で赤道部と上半球部に最大値が存在し、下半球タンク周辺と中心部で小

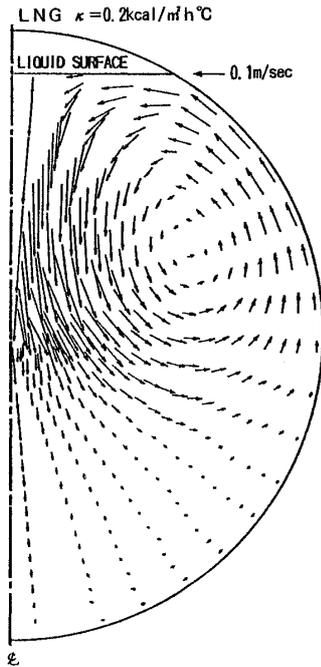


Fig. 14 Velocity profiles for LNG, $\kappa_s=0.2 \text{ kcal/m}^2\text{h}^\circ\text{C}$

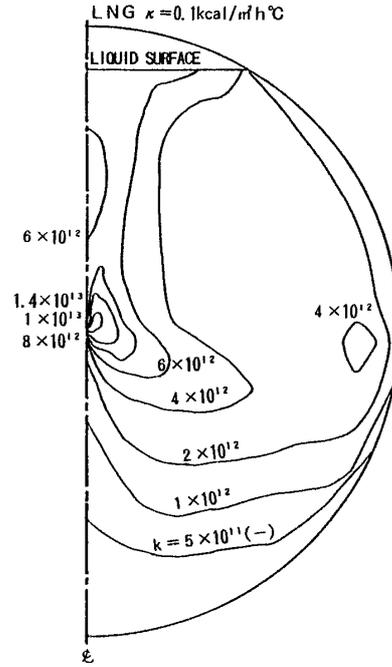


Fig. 16 Turbulence kinetic energy k contours for LNG, $\kappa_s=0.1 \text{ kcal/m}^2\text{h}^\circ\text{C}$

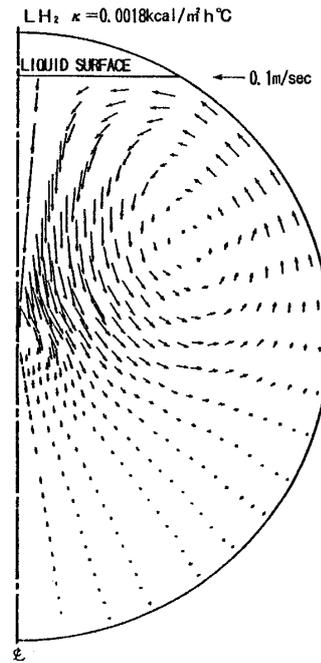


Fig. 15 Velocity profiles for LH₂, $\kappa_s=0.0018 \text{ kcal/m}^2\text{h}^\circ\text{C}$

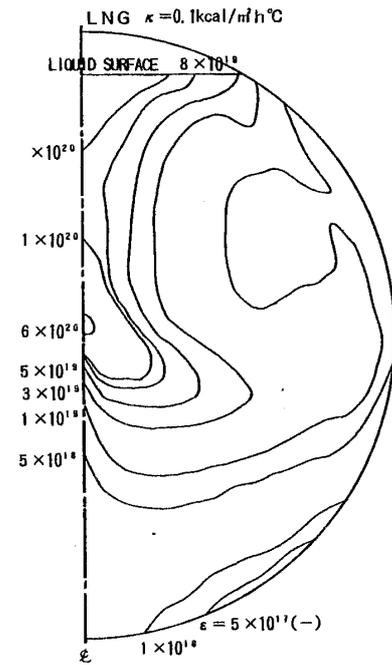


Fig. 17 Turbulence dissipation rate ϵ contours for LNG, $\kappa_s=0.1 \text{ kcal/m}^2\text{h}^\circ\text{C}$

さい。

(4) 0 方程式モデルとの相違：乱流モデルとして $\nu_t = 10 \times \nu = \text{const.}$ とした 0 方程式モデル²⁾ と比較すると、温度分布は温度の高低差がかなり小さくなっている。流れ関数値は均等に分布していたのが上半球に片寄った分布となり、且つ値も大きい。渦の位置が下半球から上半球に移っ

ている。流速分布も全体に分布していたものが上半球に移り、下半球はむしろ静止状態に近い。

3.4.2 自由表面液温を沸点で固定した場合

タンク壁面からの入熱量が 3.4.1 の場合と同じであるのに対し、自由表面での熱流束の大きさを規定していないた

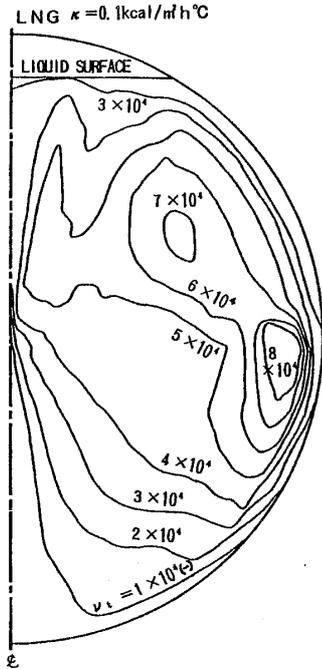


Fig. 18 Eddy kinematic viscosity ν_t contours for LNG, $\kappa_s = 0.1 \text{ kcal/m}^2\text{h}^\circ\text{C}$

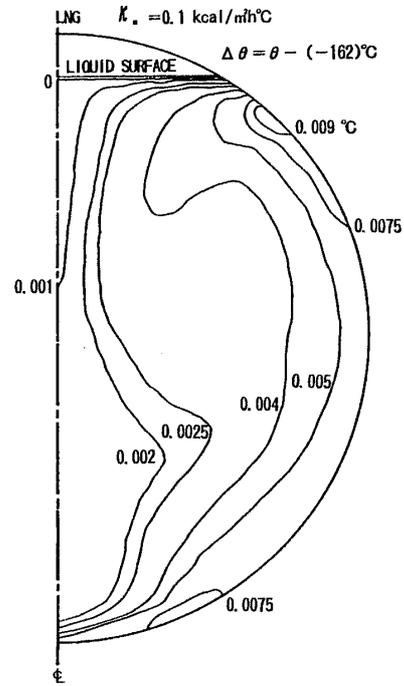


Fig. 20 Isotherm contours for LNG in case of free surface temp -162°C at 4 000 steps

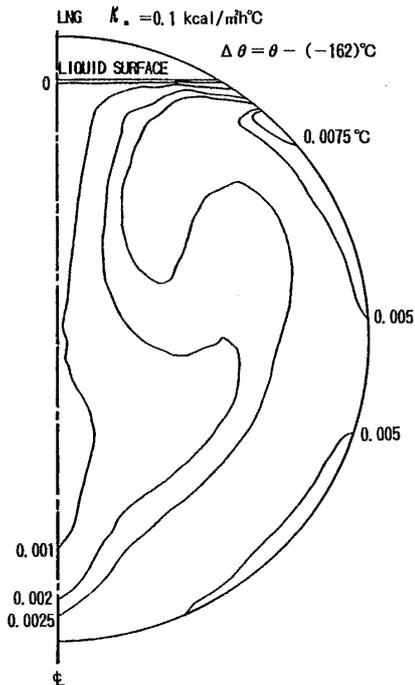


Fig. 19 Isotherm contours for LNG in case of free surface temp -162°C at 2 000 steps

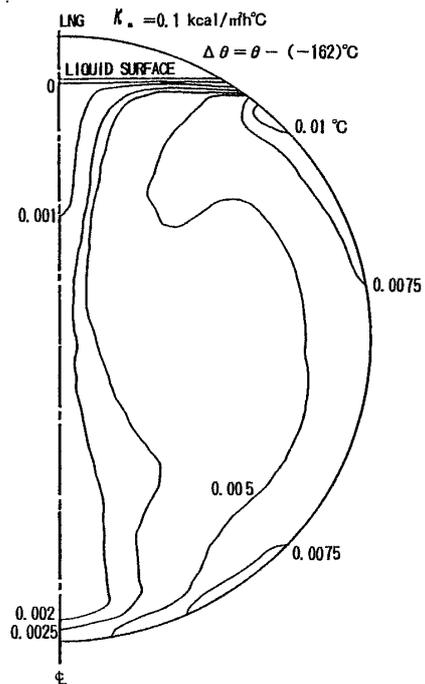


Fig. 21 Isotherm contours for LNG in case of free surface temp -162°C at 6 000 steps

め、タンク全体での熱平衡はバランスしていない。むしろ入熱量過多の状態となっているためタンク系の収斂は期待できず徐々に液温が上昇してゆく非定常状態が続くことになる。一例として LNG で $\kappa_s = 0.1 \text{ kcal/m}^2\text{h}^\circ\text{C}$ で 2,000

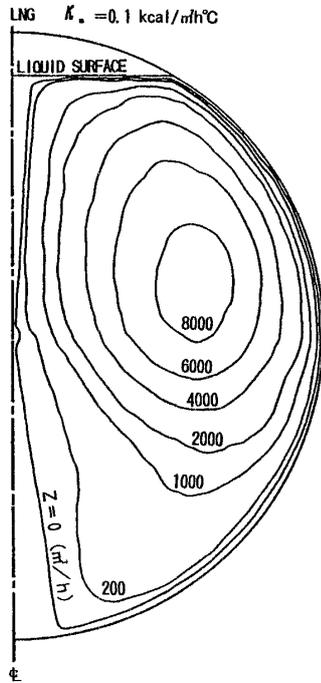


Fig. 22 Stream function contours for LNG in case of free surface temp -162°C at 6 000 steps

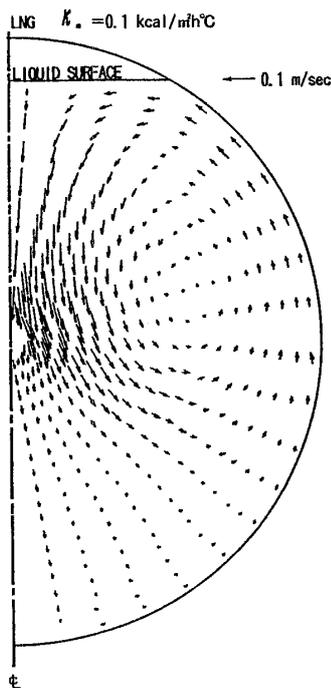


Fig. 23 Velocity profiles for LNG in case of free surface temp -162°C at 6 000 steps

step, 4 000 step および 6 000 step での温度分布を示すと Fig. 19, 20 および 21 の通りで、タンク壁周辺から形成された高温域が時間と共にタンク中心方向へ広がり、且つやや上昇していくのが見られる。このときのタンク平均温度はそれぞれ約 3×10^{-3} , 4×10^{-3} および $5 \times 10^{-3} \text{ }^\circ\text{C}$ となっている。次に 6 000 step での流線および流速ベクトルを Fig. 22 および 23 に示すが、3.4.1 の場合に比べて流れ関数値、流速共におよそ 1/2 になり、ゆるやかな流れとなっている。これは自由表面での低温生成が沸点に制限されるため下降流が弱いためである。

この様に自由表面での境界条件の与え方で大きく異なった様相を呈するが、実タンクでは気相部は殆んど大気圧に近く保持されているから自由表面での温度は沸点より下ることは考えられない。つまり最低温度が押えられている。もし入熱量とバランスする蒸発量が自由表面から起きて、相当分の冷却がなされていれば 3.4.1 に示した様に沸点以下の流体が生じ、これが下降して低温域が形成される筈である。高精度の温度計測ができないため明言はできないがタンク液温の実測値からもこれは観測されていない。これらを勘案すると 3.4.2 の条件がより実タンクに適合したものと言えよう。そうであるならば自然蒸発で処理できていない分だけ液温は時間と共に上昇していき、この傾向は自由表面積の大きいメンブレン方式の矩形タンクよりも自由表面積の小さい球形タンクで大きいだろう。即ち同一断熱値タンクおよび周辺条件の場合、球形タンクでは B.O.R が小さ目に出る代りに航行中の液温上昇があり、矩形タンクでは B.O.R が大き目の代りに航行中の液昇温が小さいと言えよう。

メンブレンタンクと球形タンクの LNG 船の B.O.R 実測値比較で球形タンクの方が小さ目に出る傾向がある事が本現象を側面から物語っていると思われる。球形タンクの場合ドーム容積を大きくとって、気相部容積即ち Filling ratio 条件を満たした上で液位を上げて自由表面積を小さくすれば、液温は上昇するが B.O.R を更に小さく出来ると思われる。同時に入熱量に相当する B.O.R という現在の考え方はタンク形状によっては修正が必要となろう。

4. 結 論

MOSS 型球形タンクに貯蔵された超低温液体である LNG および LH_2 の乱流熱流動現象の解析を行った。乱流計算は $k-\epsilon$ 2 方程式モデルを用い、球座標系での展開を行った。数値計算のための微分方程式の離散化は有限差分法によった。高次の項を省略して離散化された式のままで球座標系の非保存形での質量保存則を満足させることは出来ない。そこで著者は全検査体積について逆非平衡を付加して θ , ω , k および ϵ のスカラー量の平衡を計る方法を用いて安定解を得ることができた。

本手法を用いて LNG, LH_2 の実タンク規模での断熱、貨

物積付状態で数値計算を行い、温度、流線、速度ベクトルの分布、更に乱流エネルギー、同消散率および渦動粘性係数の分布を示した。

ここで自由表面の境界条件として①入熱相当の蒸発量がある…タンク系全体としての熱平衡が維持されている。②表面液温は気相圧力相当の沸点にあるの2条件を設定した。その結果、前者では低温流体が自由表面で生成されタンク中心軸に沿った下降流として低温流域が形成されること、流れ、温度場としての定常状態が存在することが分った。後者では流れの様式はほとんど同じであるが、自由表面での低温生成が弱いため、上半球からの下降流が弱くなること、全体としては時間と共に昇温して行く非定常状態の連続であることが判明した。現実のタンクではタンクのあり方および実測値からみて後者の状態であろうと推論した。最後にタンク形式のちがいによる BOR の相異について推論を行った。

参 考 文 献

- 1) 古林, 極低温液化ガス船の2次元矩形タンク内流体の乱流熱流動について, 西部造船会会報, 第81号, 平成3年3月, pp.291-306
- 2) 古林, 球座標系による球形タンク内 LNG の熱流動解析, 西部造船会会報, 第85号, 平成5年
- 3) 今井, 流体力学(前編), 裳華房, 1991, pp.400-404
- 4) 保原, 大宮司編, 数値流体力学(基礎と応用), 東京大学出版会, 1992, pp.240, 241
- 5) 村上, 加藤, 須山, 乱流数値シミュレーションの診断システムに関する研究(第4報)(昭和60年度), 日本建築学会関東支部研究報告集, pp.149-152
- 6) 日本機械学会編, 熱と流れのコンピュータアナリシス, 昭和61年, コロナ社, pp.19-22
- 7) J. ローチェ著, 高橋訳, コンピュータによる流体力学(上), 昭和62年, 構造計画研究所, pp.60-64