# 波浪中を航走する双胴船の双胴間干渉流体力の研究

(その1 Radiation 問題)

正員 柏 木 正\*

Interaction Forces between Twin Hulls of a Catamaran Advancing in Waves
(Part 1: Radiation Problem)

by Masashi Kashiwagi, Member

#### Summary

A new theory is presented of predicting hydrodynamic forces on a catamaran heaving and pitching with forward speed. The theory is based on Newman's unified slender-ship theory and regarded as an extension of the study on tank-wall interaction effects made by the present author to the interaction problem between twin hulls; thus the theory is valid over a wide range of forward speeds including zero, and the computation is of relative ease.

The inner region is defined as the vicinity of one of the twin hulls and hence the inner solution includes not only symmetric but also asymmetric homogeneous components. The matching requirement between the inner and outer solutions gives a coupled integral equation for the strength of 3-D source and doublet distributions in the outer solution, and its numerical solutions determine the unknown coefficients of inner homogeneous components.

Excellent agreement is shown for the zero-speed case between the present theory and a more rigorous 3-D integral-equation method. For the forward-speed case, the forced oscillation tests of heave and pitch are conducted using twin Lewis-form ships at Fn=0.15 and 0.3. Comparison of these results with numerical computations shows that the present theory provides a sizable improvement over the conventional strip method incorporating 2-D exact interaction solutions in accounting for 3-D and forward-speed effects upon the interaction between twin hulls.

#### 1. 緒 言

最近,各種双胴船が数多く建造されるようになっており, それらの耐航性能や波浪荷重,特に双胴間に働く横力 (Side Force)を精度良く推定することが設計上重要となっ ている。

双胴船の問題に対して従来から用いられてきた計算法は、いわゆるストリップ法10~40であり、そのベースとなっている2次元流体力は、横断面内での双胴間の流体力学的干渉を考慮した大楠の方法50や特異点分布法60によって求め

原稿受理 平成5年1月11日 春季講演会において講演 平成5年5月19,20日 られる。この 2 次元計算法では,波のエネルギーが 3 次元 的に拡散する現象を説明できないために,前進速度がゼロ の時でも,低周波数域や双胴間に高い波が発生する同調周 波数の近くでは,流体力学的干渉を過大に推定してしまう"。更に前進速度を有する場合には,各 demi-hull で造られる波のパターンは 3 次元性が強くなって後方に伝播されるようになるため,速度が増すにつれて双胴間の流体力学 的干渉は弱くなってくる。双胴船に対するストリップ法がこのような前進速度影響を説明できないことは,実験値との比較<sup>819</sup>) を見るまでもなく明らかである。

最近では船速影響を合理的に取り入れるために、前進速度がある場合の3次元特異点分布法<sup>10)</sup>を双胴船に適用する試みがなされている<sup>11)</sup>。しかし,双胴船に対してはまだ莫大な計算時間がかかり、計算精度も十分ではないと思われる。一方,高速双胴船を解析対象とした大楠&Faltinsenの

<sup>\*</sup> 九州大学応用力学研究所

細長船理論による研究 $^{12}$ , Kring & Sclavounos の 3 次元 Rankine panel 法による研究 $^{13}$ , 渡辺の Thin-ship theory による研究 $^{14}$  なども最近行なわれているが,高速域だけでなく,速度ゼロの場合をも含んだ広範囲の前進速度に対して,しかも比較的簡単に計算できる方法が望まれるところである。

本論文で示す計算法は、Newman によって単胴船に対して開発された unified theory<sup>15)</sup> の考え方を双胴船に対して適用したものである。著者は以前に、側壁影響のある水路内での動揺問題に対して unified theory を応用し、前進速度の有無を問わず、計算値が実験値と非常に良く一致することを示した<sup>16)</sup>。その際、両側壁での境界条件は無限個の鏡像による流体力学的干渉を考えることによって満足させた。双胴船の場合には2つの細長体の干渉を考えればよいので、側壁影響の計算法と基本的に同じ考え方が適用できる。ただ双胴船の場合には、各 demi-hull がその中心面に関して左右対称形状であっても、流場は流体力学的干渉によって対称成分と反対称成分の両方が混在することに注意すべきである。

ところで Breit & Sclavounos<sup>n</sup> は、unified theory を前 進速度ゼロの双胴船の問題に対して適用しているが、双胴 間の流体力学的干渉を横波中での diffraction 問題として 取り扱っているので、計算はやや複雑であり、前進速度が ある場合への拡張は容易ではないように思われる。

本論文の計算法は彼らの方法とは異なり、各 demi-hull 問りの内部解に、対称波成分の同次解だけでなく、反対称 波成分の同次解も考えているのが特徴的である。同次解の係数は、外部解とのマッチングによって決定されるが、マッチングの結果得られる外部解の吹き出し、ダブレット強 さに関する積分方程式は、流体力学的干渉効果によって連成方程式となることが示されている。勿論この連成積分方程式は、前進速度が増すにつれ、あるいは同じ前進速度でも 双胴間距離が増すにつれて干渉影響が弱くなり、単胴の unified theory における積分方程式に漸近していくことを 容易に示すことができる。

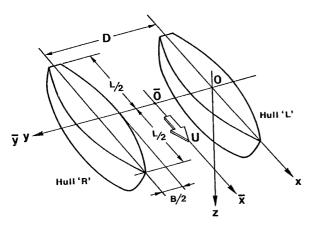


Fig. 1 Coordinate system

本論文では、まず前進速度ゼロの場合に対して、新しい計算法がより厳密な3次元特異点分布法とほぼ同じ計算結果を与えることを示した後、前進速度がある場合に対しては、付加質量、減衰力係数の計算値を対応する水槽実験の結果と比較することによって理論計算法の妥当性を論じている。

本論文は、理論構成を明確にするために heave, pitch の radiation 問題に限定しているが、同じ考え方は他の運動 モード、並びに diffraction 問題に対しても適用できる。また、波浪強制力を計算するだけならば、Haskind-Newman の関係<sup>い</sup>を適用することによって radiation 問題の解だけ から計算することも可能であろう。これらの diffraction 問題に対する理論展開は別の機会に譲ることとする。

#### 2. 座標系と問題の定式化

Fig. 1 に示すように、速度 U で前進する双胴船を考え、各 demi-hull の長さを L,幅を B,双胴間距離を D と表す。また双胴船の中心面と静止水面の交線上に原点を置いた右手系の座標系  $\overline{o}-\overline{x}\,\overline{y}\,\overline{z}$  を考え、 $\overline{x}$  軸は進行方向を正、 $\overline{y}$  軸は右舷方向を正とする。これとは別に後の理論解析の便を考えて、 $\overline{y}$  < 0 にある左舷 demi-hull の中心面と静止水面との交線上に原点を置いた座標系 o-xyz を設定する。 2 つの座標系は y 軸方向に平行移動しているだけであるから  $\overline{y}$  = y-D/2 であり、 $\overline{x}$  と x,  $\overline{z}$  と z を区別する必要はないので以後 x, z を用いる。

本論文では理論の説明を容易にするために,各 demi-hull はそれぞれの中心面に関して左右対称であるとする。 勿論一般的な非対称 demi-hull の場合への拡張には何ら本質的な問題はない。また運動モードは,縦運動の heave (j=3) と pitch (j=5) についてのみ考えるが,横運動に対しても同様の解析が可能である。

さて、流体は非粘性、非回転であるとして速度ポテンシャルを導入し、線形性を仮定することによって次のように表す。

$$\Phi(x, \, \overline{y}, z, t) = U[-x + \phi_s(x, \, \overline{y}, z)] 
+ \operatorname{Re} \left[ i\omega \sum_{i=3,5} \xi_i \phi_i(x, \, \overline{y}, z) e^{i\omega t} \right]$$
(1)

ここで、 $\phi_s$  は定常航走による撹乱速度ポテンシャル、 $\phi_j$  は j モードの radiation ポテンシャルであり、 $\xi_j$  は j モードの動揺振幅、 $\omega$  は動揺の円周波数である。

求めるべき速度ポテンシャル  $\phi_j(j=3,5)$  は、次のような線形境界値問題の解として与えられる。

$$\left(\frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2}\right) \phi_j = 0 \quad \text{for } z > 0$$
 (2)

$$\left[ \left( i\omega - U \frac{\partial}{\partial x} \right)^2 + \mu \left( i\omega - U \frac{\partial}{\partial x} \right) - g \frac{\partial}{\partial z} \right] \phi_j = 0$$
on  $z = 0$  (3)

$$\frac{\partial \phi_j}{\partial n} = n_j + \frac{U}{i\alpha} m_j \quad \text{on } S_L + S_R \tag{4}$$

(3)式中の $\mu$ は radiation条件を満足させるための Rayleigh の仮想摩擦係数である。また $n_j$ は法線ベクトルnのj方向成分で,船体から外向きを正方向とし, $n_5=zn_1-xn_3$ と定義する。一方 $m_j$ は,船体表面条件における前進速度影響項 $^{15}$ )であり,次式で計算される。

$$(m_1, m_2, m_3) = -(\mathbf{n} \cdot \nabla) V 
 (m_4, m_5, m_6) = -(\mathbf{n} \cdot \nabla) (\mathbf{r} \times V) 
 V = \nabla[-x + \phi_s(x, \bar{y}, z)]$$
(5)

#### 3. 双胴船に対する細長船理論

双胴船の各 demi-hull は一般的には細長体であるから, $\epsilon$  = B/L とする時, $\epsilon$  は小さな量と考えることができる。そこで各 demi-hull 周りの流れの解析に unified theory  $^{15}$  の考え方を応用する。この際,例えば左舷の demi-hull の近傍を内部領域として定義すると,右舷の demi-hull の影響は外部解として考えるので,双胴間距離は D/L=O(1) と仮定することになる。

#### 3.1 外部解

外部領域では、各 demi-hull による撹乱は、自由表面上のそれぞれの中心線に沿った 3 次元特異点分布によって表すことができる。双胴間の流体力学的干渉によって、各 demi-hull 周りには対称波成分と反対称波成分とが存在するので、特異点としては吹き出し、及びグブレットを考えて

$$\phi_{j}(x, \ \overline{y}, z) = \int_{S_{L}} \left[ Q_{j}(\xi) G\left(x - \xi, \ \overline{y} + \frac{D}{2}, z\right) \right] d\xi$$

$$+ D_{j}(\xi) H\left(x - \xi, \ \overline{y} + \frac{D}{2}, z\right) d\xi$$

$$+ \int_{S_{R}} \left[ Q_{j}(\xi) G\left(x - \xi, \ \overline{y} - \frac{D}{2}, z\right) \right] d\xi$$

$$- D_{j}(\xi) H\left(x - \xi, \ \overline{y} - \frac{D}{2}, z\right) d\xi \quad (6)$$

と表す。ここで G(x,y,z), H(x,y,z) は,それぞれ単位強さの 3次元吹き出し,及び y 軸の正方向に軸を持つ 3次元ダブレットの速度ポテンシャルであり,フーリエ変換を用いることによって次のように与えられる。

$$G(x, y, z) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} G^{*}(k; y, z) e^{-ikx} dk$$
 (7)  

$$G^{*}(k; y, z)$$

$$= -\frac{1}{2\pi} \lim_{\mu \to 0} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{e^{-z\sqrt{k^{2}+\ell^{2}}-ity}}{\sqrt{k^{2}+\ell^{2}}-\nu+i\mu(\omega+kU)} d\ell$$
 (8)

$$H(x, y, z) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} H^*(k; y, z) e^{-ikx} dk$$
 (9)

$$H^*(k; y, z) = -\frac{\partial}{\nu \partial y} G^*(k; y, z)$$
 (10)

ここで,

$$\nu = \frac{1}{g} (\omega + kU)^{2} = K + 2\tau k + \frac{k^{2}}{K_{0}}$$

$$K = \frac{\omega^{2}}{g}, \ \tau = \frac{U\omega}{g}, \ K_{0} = \frac{g}{U^{2}}$$
(11)

(6)式中の  $Q_j$ ,  $D_j$  は、それぞれ吹き出し、ダブレットの強さであり、ここでは未定である。これは後で述べる内部解とのマッチングによって決められるが、そのために、(6)式の内部展開式を求めなければならない。内部領域は左舷demi-hull 近傍と考えるので、(6)式に  $\bar{y}=y-D/2$  を代入して、

$$\phi_{j}(x, y, z) = \int_{L} Q_{j}(\xi) \{G(x - \xi, y, z) + G(x - \xi, y - D, z)\} d\xi + \int_{L} D_{j}(\xi) \{H(x - \xi, y, z) - H(x - \xi, y - D, z)\} d\xi$$
(12)

と表しておく。

 $y=O(\epsilon)$ ,  $z=O(\epsilon)$ , D=O(1) の場合についてグリーン関数の展開式を求めてみると,付録1に示されているように,

$$G^{*}(k; y, z) \sim G_{2D}(y, z) - (1 - Kz)g_{k}^{*}(k)$$

$$H^{*}(k; y, z) \sim H_{2D}(y, z) - Ky \cdot h_{k}^{*}(k)$$

$$G^{*}(k; y - D, z) \sim - (1 - Kz)g_{k}^{*}(k) - Ky \cdot f_{k}^{*}(k)$$

$$H^{*}(k; y - D, z) \sim + (1 - Kz)f_{k}^{*}(k) + Ky \cdot h_{k}^{*}(k)$$
(13)

である。ここで 3 次元影響関数につけられている subscript L は左舷 demi-hull の影響 を表し,R は反対側の右舷 demi-hull の影響であることを表している。

ここで注意すべきは、右舷の吹き出しによって、左舷 demi-hull 近傍には対称波成分のみだけでなく、反対称波成分も誘起され、その影響関数  $f_{\delta}^{*}(k)$  は、ダブレットによる対称波成分の項と同じになっていることである。しかしこれは、(10)式で  $\nu \sim K \rightarrow 0$  の極限を考えれば当然成り立つべき関係式であることがわかる。

(13)式のフーリエ逆変換を(12)式に代入すると,外部解の内部展開式として次式を得る。

$$\phi_{j}(x, y, z) \sim Q_{j}(x) G_{2D}(y, z) \\ -(1 - Kz) \mathcal{L}_{S}(Q_{j}, D_{j}; x) \\ + D_{j}(x) H_{2D}(y, z) \\ - Ky \cdot \mathcal{L}_{A}(Q_{j}, D_{j}; x)$$
(14)

ここで

$$\mathcal{L}_{s} = \int_{L} Q_{j}(\xi) \{g_{L}(x-\xi) + g_{R}(x-\xi)\} d\xi$$

$$+ \int_{L} D_{j}(\xi) f_{R}(x-\xi) d\xi \qquad (15)$$

$$\mathcal{L}_{A} = \int_{L} Q_{j}(\xi) f_{R}(x-\xi) d\xi$$

$$+ \int_{L} D_{j}(\xi) \{h_{L}(x-\xi) + h_{R}(x-\xi)\} d\xi \qquad (16)$$

### 3.2 内部解

内部領域は左舷 demi-hull 近傍とし, x=O(1),  $y=O(\epsilon)$ ,  $z=O(\epsilon)$  と考えるので, unified theory に従うと, 境界値問題は次のようになる。

$$\left(\frac{\partial^2}{\partial y^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2}\right) \phi_j^L = 0 \tag{17}$$

122

$$\left(K + \frac{\partial}{\partial z}\right)\phi_j^L = 0$$
 on  $z = 0$  (18)

$$\frac{\partial \phi_L^L}{\partial N} = N_j + \frac{U}{i\omega} M_j \qquad \text{on } S_L$$
 (19)

ここで、速度ポテンシャルは左舷 demi-hull 近傍の流場だけを表すので、superscript L を付けた。また  $N_i$ ,  $M_i$  は、(4)式における  $n_i$ ,  $m_i$  の細長体近似であり、N は横断面内での外向き法線を表している。

(17) $\sim$ (19)式を満たす解を unified theory の考え方にならい、次のように特解と同次解の和で表す。

$$\phi_{j}^{L}(x; y, z) = \varphi_{j}(x; y, z) + \frac{U}{i\omega} \widehat{\varphi}_{j}(x; y, z) + C_{j}^{S}(x) \{ \varphi_{3}(x; y, z) - \overline{\varphi_{3}(x; y, z)} \} + C_{j}^{A}(x) \{ \varphi_{2}(x; y, z) - \overline{\varphi_{2}(x; y, z)} \}$$
(20)

ここで右辺第1行目が特解であり、 $\varphi_i$ 、 $\widehat{\varphi}_i$  は demi-hull 上 で

$$\frac{\partial \varphi_j}{\partial N} = N_j (j=2, 3, 5), \quad \frac{\partial \widehat{\varphi}_j}{\partial N} = M_j (j=3, 5)$$
 (21)

を満たすように決定されているとする。(j=2)は横断面内での sway モードを表し,(20)式中の overbar は複素共役を表す。)従って,(20)式の右辺第 2 行目は左右対称波成分の同次解,第 3 行目は反対称波成分の同次解となっている。各 demi-hull は左右対称で,縦運動のみを考えているにもかかわらず,双胴間の流体力学的干渉によって反対称成分も誘起されるため,(20)式のように反対称波成分の同次解を含めているのが特徴的である。

さて、同次解の係数  $C_{\lambda}^{N}(x)$ ,  $C_{\lambda}^{N}(x)$  は、マッチングによって決められる未知数であるが、外部解とのマッチングのために(20)式の外部展開式を求めると次式となる。

$$\phi_{j}^{L}(x; y, z) \sim \left[\sigma_{j}(x) + \frac{U}{i\omega}\widehat{\sigma}_{j}(x) + C_{j}^{S}(x)\left[\sigma_{3}(x) - \overline{\sigma_{3}(x)}\right]\right]G_{2D}(y, z) + 2iC_{j}^{S}(x)\overline{\sigma_{3}(x)}e^{-Kz}\cos Ky + C_{j}^{A}(x)\left\{\mu_{2}(x) - \overline{\mu_{2}(x)}\right\}H_{2D}(y, z) + 2iC_{j}^{A}(x)\overline{\mu_{2}(x)}e^{-Kz}\sin Ky$$

$$(22)$$

ここで $\sigma_j$ ,  $\hat{\sigma}_j$ ,  $\mu_2$  は 2 次元理論での Kochin 関数であり、速度ポテンシャル $\varphi_j$ ,  $\hat{\varphi}_j$  から計算することができる。

#### 3.3 マッチング

外部解の内部展開式(14)と内部解の外部展開式(22)を比較することによって,次のような関係式を得ることができる。

$$Q_{j} = \sigma_{j} + \frac{U}{i\omega} \hat{\sigma}_{j} + C_{j}^{s} \{ \sigma_{3} - \overline{\sigma_{3}} \}$$
 (23)

$$\mathcal{L}_{S} = -2iC_{j}^{S} \cdot \overline{\sigma_{3}} \tag{24}$$

$$D_j = C_j^A \{ \mu_2 - \overline{\mu_2} \} \tag{25}$$

$$\mathcal{L}_A = -2iC_j^A \cdot \overline{\mu_2} \tag{26}$$

(23), (24)式から  $C_i^s$ , (25), (26)式から  $C_i^s$  を消去すると, 外部解の吹き出し強さ  $Q_i$ , ダブレット強さ  $D_i$  に関する

次のような積分方程式が得られる。

$$Q_{j} - \frac{i}{2} (\sigma_{3} / \overline{\sigma_{3}} - 1) \mathcal{L}_{s}(Q_{j}, D_{j}; x) = \sigma_{j} + \frac{U}{i\omega} \widehat{\sigma}_{j} \quad (27)$$

$$D_{j} - \frac{i}{2} (\mu_{2}/\overline{\mu_{2}} - 1) \mathcal{L}_{A}(Q_{j}, D_{j}; x) = 0$$
 (28)

(15)、(16)式に示されているように、 $\mathcal{L}_s$ 、 $\mathcal{L}_A$  はともに  $Q_j$ 、 $D_j$  を被積分関数に含むので、(27)、(28)式は  $Q_j$ 、 $D_j$  に関する連成の積分方程式である。

ところで(15)、(16)式で前進速度がある場合を考えると、速度が増すにつれて、あるいは一定の速度に対しては双胴間距離が増すにつれて、右舷 demi-hull の影響項(subscript R の付いた関数)は小さくなっていく。その時  $\mathcal{L}_s$  は  $Q_i$  だけの関数となり、反対に  $\mathcal{L}_A$  は  $D_i$  だけの関数となるので、(28)式から直ちに  $D_i(x)=0$ 、(25)式から  $C_i^A(x)=0$ が得られ、双胴間の流体力学的干渉は自動的にゼロとなる。またこの時、(15)式から

$$\mathcal{L}_{s}(Q_{j}; x) = \int Q_{j}(\xi)g_{L}(x-\xi)d\xi \tag{29}$$

となるが、付録 1 に示されているように、 $g_L(x-\xi)$  は単胴に対する unified theory 0 3 次元影響項と同じ結果 $^{10}$  であることがわかる。このことから、双胴間の流体力学的干渉を説明する上で、(15)、(16) 式に示された  $f_R(x)$  という核関数が極めて重要な役割を果たしていることが理解できる。

なお、(27)、(28)式を連立させて解いた後、内部解における同次解の係数  $C_{2}^{3}$ 、 $C_{2}^{4}$ はそれぞれ(23)、(25)式から容易に求められ、流体力の計算に必要な内部解が確定する。

## 4. 付加質量,減衰力係数

内部解は左舷 demi-hull 近傍の流れ場を表す速度ポテンシャルであるから,まず左舷 demi-hull に働く j 方向の流体力を考え,これを次のように表す。

$$F_j^L = -(i\omega)^2 \sum_{k=3,5} [A_{jk}^L + B_{jk}^L/i\omega] \xi_k$$
 (30)

ここで

 $A_{ik}^{L}+B_{ik}^{L}/i\omega$ 

$$=-\rho\iint_{S_{\epsilon}}\left(n_{j}-\frac{U}{i\omega}m_{j}\right)\phi_{k}^{L}(x;y,z)dS\tag{31}$$

 $A_{Jh}$ ,  $B_{Jh}$  は k モードの動揺による j 方向に働く流体力のうち,それぞれ加速度に比例する項(付加質量),速度に比例する項(減衰力係数)を意味する。

各 demi-hull はその中心面に関して左右対称としているので、(20)式を代入すると(31)式は次のようになる。

 $A_{jk}^L + B_{jk}^L/i\omega$ 

$$= -\rho \int_{L} dx \int_{C_{L}} \left( N_{j} - \frac{U}{i\omega} M_{j} \right) \left\{ \varphi_{k} + \frac{U}{i\omega} \widehat{\varphi}_{k} \right\} ds$$

$$-\rho \int_{L} C_{k}^{S}(x) dx \int_{C_{L}} \left( N_{j} - \frac{U}{i\omega} M_{j} \right) \left\{ \varphi_{3} - \overline{\varphi_{3}} \right\} ds$$
for  $j = 3, 5$  (32)

$$A_{jk}^L + B_{jk}^L/i\omega$$

$$= -\rho \int_{L} C_{k}^{A}(x) dx \int_{C_{L}} \left( N_{j} - \frac{U}{i\omega} M_{j} \right) \{ \varphi_{2} - \overline{\varphi_{2}} \} ds$$
for  $j = 2, 4, 6$  (33)

ここで  $N_j$ ,  $M_j$  は、 $n_j$ ,  $m_j$  の細長船近似である。

内部解の構成から明らかなように、特解  $\rho_k$ ,  $\hat{\rho}_k$  は単胴に対するもので、双胴間の流体力学的干渉影響は同次解の係数  $C_k^{\ell}$ ,  $C_k^{\ell}$  に含まれている。すなわち、(32)式右辺の第1行目は単胴に対するストリップ法と同じ結果を与え、第2行目がその他の全ての影響、すなわち3次元影響、前進速度影響、双胴間干渉影響を表している。

ここで注目すべきは,(33)式に示されているように,縦運動時に流体力学的干渉によって生じる内力としての横力 (j=2),モーメント (j=4,6) が,反対称波成分の同次解から計算できるという点である。これらは右舷 demi-hull に働く力の成分と大きさ等しく方向反対であるから,双胴船全体に働く力を考える際にはゼロとなる。勿論 j=3,5 に対しては

$$F_j = F_j^L + F_j^R = 2F_j^L$$
 for  $j = 3, 5$  (34)  
となる。

## 5. 数值計算法

本論文の計算法では,まず単胴に対してx軸方向をN個の segment に分割し,x軸に直角な各横断面において2次元境界値問題を解くことが必要である。そのために,本論文では左右非対称断面にも適用できる2次元積分方程式法を用いたが,計算を容易にするため,定常撹乱速度ポテンシャルの寄与を省略した。すなわち, $\nabla \phi_s < O(1)$ と仮定

し,
$$N_i$$
, $M_i$ の計算を

$$N_{5} = -xN_{3}, N_{6} = xN_{2}, N_{4} = yN_{3} - zN_{2} 
M_{5} = N_{3}, M_{6} = -N_{2}, 
M_{j} = 0 mtext{ (for } j = 2, 3, 4)$$

と近似した。

次に(27)、(28)式の連成積分方程式を解かなければならないが、本論文では、N 個に分割された各節点での特異点強さを $Q_j^n$ 、 $D_j^n(n=1,2,\cdots,N+1)$  とし、segment 内では $Q_j$ 、 $D_j$  は直線的に変化すると仮定して(27)、(28)式を $Q_j^n$ 、 $D_j^n$  に関する連立方程式に変換して解いた。また分割数Nは、本論文では全てN=40 である。

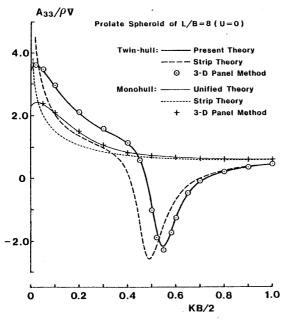
積分方程式の核関数は数値積分して求めなければならないが、これには Clenshaw-Curtis 法を用い、誤差が  $10^{-4}$  以下となるように指定して行った。

## 6. 計算結果及び実験値との比較

## 6.1 前進速度なしの場合

まず U=0 の場合に対して,付加質量,減衰力係数を 3 次元積分方程式法による"厳密"な計算値と比較した。計算は各 demi-hull が B/L=1/8 の半没回転楕円体で,双胴間距離が D/B=2 の場合について行ったが,これは Breit & Sclavounos<sup>7)</sup> が行ったものと同じである。本論文の理論は, $B/L=O(\epsilon)$ ,D/L=O(1) の仮定のもとに構成されているので,D/B=2 の値はやや厳しい計算条件と思われる。

Fig. 2 に heave の付加質量  $A_{33}$ , 減衰力係数  $B_{33}$  を, Fig. 3 に pitch の付加慣性モーメント  $A_{55}$ , 減衰力係数  $B_{55}$  を示している。太い実線が双胴間干渉を考慮した細長船理論の



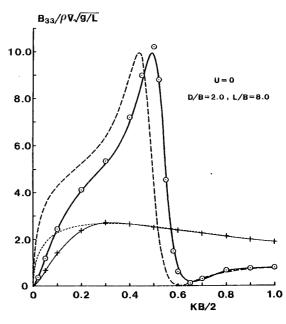


Fig. 2 Heave added-mass and damping coefficients of twin half-immersed spheroids with B/L=1/8 and D/B=2 at U=0

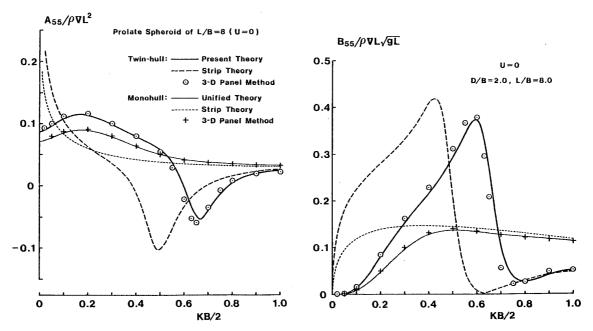


Fig. 3 Pitch added moment of inertia and damping coefficients of twin half-immersed spheroids with B/L=1/8 and D/B=2 at U=0

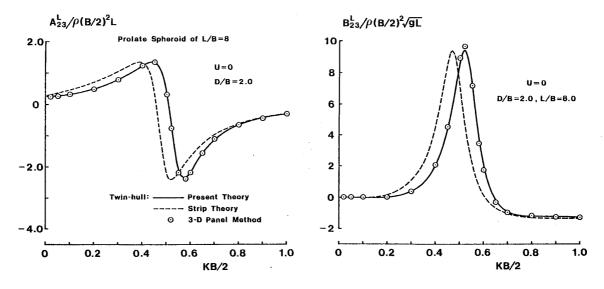


Fig. 4 Side force on the left hull, induced by heaving of twin half-immersed spheroids with B/L=1/8 and D/B=2 at U=0

結果で、対応する3次元積分方程式による結果は白丸で示している。また双胴間干渉に対する3次元影響を調べるために、ストリップ法の結果も破線で示している。ストリップ法のベースとなった2次元流体力の計算は、2物体に対する厳密な2次元積分方程式によって行っており、従って進行波成分だけでなく、local wave の影響も全て考慮したものである。Figs. 2、3には、双胴間の流体力学的干渉の程度を知るために、単胴に対する計算結果も示してある。

双胴間距離が狭いにもかかわらず,本論文で示した細長 船理論の結果は3次元積分方程式の結果とよく一致してい ると言える。また、本論文の計算法は Breit & Sclavounos<sup>n</sup> の方法と異なるが、文献 7) に示された図を見る限り、ほとんど同じ計算結果を与えている。 3次元影響は低周波数域で大きく、heave よりも pitch において顕著であるが、これは単胴の場合でも同じである。また、ストリップ法による流体力のピークは 3次元の計算結果よりも低周波数側に存在している。

本論文の計算法では(33)式に示したように、縦運動によって各 demi-hull に誘起される反対称流体力も計算できるが、その計算例を示したのが Figs. 4,5 である。これは、

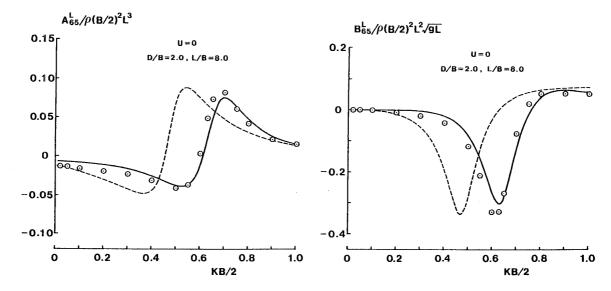


Fig. 5 Yaw-connecting moment on the left hull, induced by pitching of twin half-immersed spheroids with B/L=1/8 and D/B=2 at U=0

Table 1 Principal particulars of Lewis-form ship

_				_
_	Length	L (m)	1.5	
	Breadth	B (m)	0.25	
	Draft	d (m)	0.125	
	Displacement	∆ (kgf)	30.91	
	Block coeff.	Св	0.659	
	Midship section coeff.	См	0.942	
	Waterplane area coeff.	Cw	0.732	

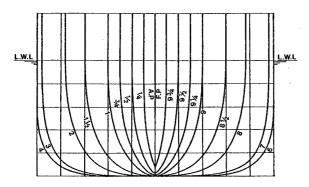


Fig. 6 Body plan of Lewis-form ship used as demi-hull of a catamaran

それぞれ heaving する時の横力, pitching する時の足開き モーメントであるが、 3 次元積分方程式法との一致度は良 好である。

以上のことから、本論文で示した細長船理論の妥当性が、 少なくとも U=0 の場合には確かめられたと言うことができる。

## 6.2 前進速度がある場合

前進速度がある場合には、3次元積分方程式法による信頼できる数値計算が不可能であるので、九州大学応用力学研究所、津屋崎海洋災害実験所内の大水槽にて実験を行い、

実験値と計算値を比較した。実験は,Fn=0.15 及び 0.3 について強制 heave,強制 pitch を実施し,供試船として,各demi-hull が前後対称で横断面形状がルイスフォームで表される数学船型(ルイスフォーム船型と呼ぶ)を用いた。その主要目を Table 1 に,Body plan を Fig. 6 に示すが,B/L=1/6 であり,これは双胴船の demi-hull としてはややblunt である。また双胴間距離は D/B=2 に設定したが,これは理論の仮定である B/L= $O(\epsilon)$ ,D/L=O(1) から判断すると,前進速度なしの場合と同様に厳しい比較の条件と言うことができる。

まず、Fig. 7 に Fn=0.15 の場合の heave の付加質量、減衰力係数を示している。計算は、実線で示した本論文での細長船理論の他に、ストリップ法でも行い、その結果を破線で示している。ストリップ法による  $A_{33}$ 、 $B_{33}$  の計算には前進速度影響が含まれないので、破線の値は全てのフルード数に対して共通である。

細長船理論の結果は、 $B_{33}$ のピークを与える周波数付近で若干実験結果と異なっているが、前進速度影響で双胴間の流体力学的干渉が弱くなること、同調周波数の値がU=0の時よりも低周波数側へ移動していることなどは非常によく説明されている。

同様の比較を pitch の付加慣性モーメント ( $A_{55}$ ), 減衰力係数 ( $B_{55}$ ) についても行い, Fig. 8 に示している。若干の違いが見られるものの, 双胴間隔が狭いこと, demi-hull がやや blunt であることなどを考えると, 計算値と実験値との一致度は概ね良好である。

前後対称船型であれば、U=0の時には heave と pitch の連成流体力はゼロであるが、前進速度を有する場合には、前進速度影響によってゼロとはならない。 それを示したのが Fig. 9 であり、 $A_{35}$ 、 $B_{35}$  は pitching による上下方向の

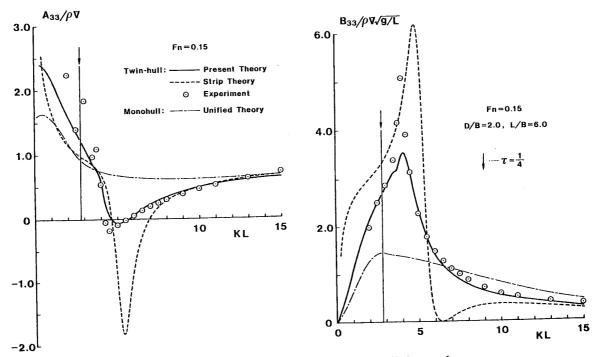


Fig. 7 Heave added-mass and damping coefficients of twin Lewis-form ships with D/B=2 at Fn=0.15

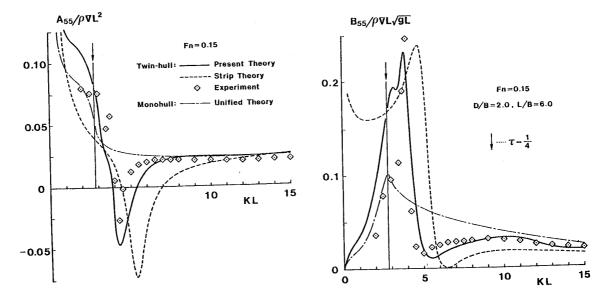


Fig. 8 Pitch added moment of inertia and damping coefficients of twin Lewis-form ships with D/B = 2 at Fn=0.15

力, $A_{53}$ , $B_{53}$  は heaving による pitch モーメントを表している。これらは Timman-Newman の関係 $^{19}$  に従うならば $A_{35}$ = $-A_{53}$ , $B_{35}$ = $-B_{53}$  となるはずであるが,この関係は実験的にも非常に良く満足されていることがわかる。計算値は,細かく見れば実験値と少し違いはあるものの,傾向的には良く合っているということができよう。

続いてFn=0.3の場合の結果を示す。まずFig. 10には

heave の付加質量、減衰力係数を、Fig. 11 には pitch の付加慣性モーメント、減衰力係数を、Fig. 12 には heave とpitch の連成流体力を示している。Fig. 10 の  $A_{33}$ ,  $B_{33}$  で気づくことは、低周波数域(とは言っても  $\tau$ =0.25 よりも少し大きい範囲)で計算と実験に差が見られるという点である。原因としては、定常撹乱速度ポテンシャルの影響を無視して  $M_3$ =0 と計算していることが考えられる。あるいは、Fn

## 波浪中を航走する双胴船の双胴間干渉流体力の研究

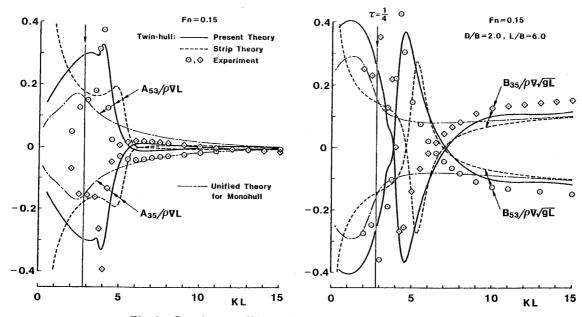


Fig. 9 Coupling coefficients between heave and pitch of twin Lewis-form ships with D/B=2 at Fn=0.15

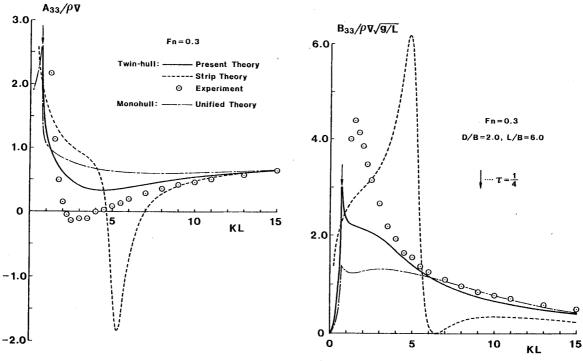


Fig. 10 Heave added-mass and damping coefficients of twin Lewis-form ships with D/B=2 at Fn=0.3

=0.3 は unified theory の仮定から考えてやや厳しいのかもしれない。すなわち,unified theory における内部解は,自由表面条件が前進速度に無関係であるので,外部解とのマッチングを正当化するには付録 1 で示したように  $(\nu-K)r$  < O(1) が必要であり,これは前進速度が比較的小さいことを意味している。

ストリップ法は, 従来から言われているように前進速度 が増すにつれ実験値との不一致が大きくなっているが, そ れに比べて本論文の計算法は,干渉流体力に対する前進速 度影響を良く説明できていると思われる。

最後に、実験結果は得られていないが、heaving によって 左舷 demi-hull に誘起される横力の計算結果を Fig. 13 に 示している。ストリップ法による値は前進速度に無関係で あるが、本論文で示した理論では前進速度影響が合理的に 考慮でき、前進速度が増すにつれて双胴間の流体力学的干 渉が弱くなり、横力が小さくなっていくことが計算されて

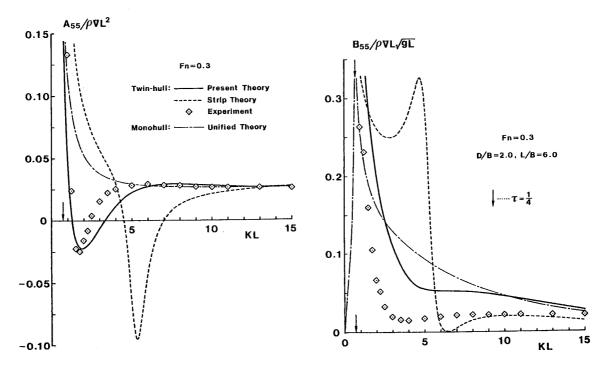


Fig. 11 Pitch added moment of inertia and damping coefficients of twin Lewis-form ships with D/B = 2 at Fn=0.3

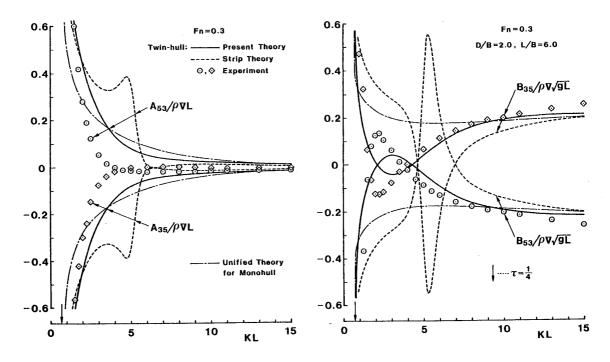


Fig. 12 Coupling coefficients between heave and pitch of twin Lewis-form ships with D/B=2 at Fn=0.3

いる。

7. 結 言

本論文では、単胴船に対する unified theory の考え方を

双胴船に対して適用し, 前進速度ゼロの場合を含んだ広範 囲の前進速度に対して, 比較的簡単に計算できる新しい理 論計算法を示した。

理論の特徴は,一方の demi-hull 近傍を内部領域として

## \_波浪中を航走する双胴船の双胴間干渉流体力の研究

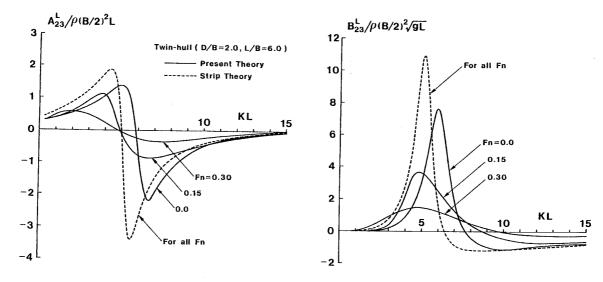


Fig. 13 Forward-speed effects on side force acting on the left hull, induced by heaving of twin Lewisform ships with D/B=2

捉え,内部解に対称波成分の同次解だけでなく,反対称波成分の同次解も含めている点にある。他方の demi-hull の影響は外部解として捉えることにより,内部解における同次解の係数は,外部解の吹き出し強さ,ダブレット強さに関する連立積分方程式の数値解から決定されている。

前進速度なしの場合の計算結果は、厳密な3次元積分方程式法による結果とほぼ完全に一致していることを示した。また前進速度がある場合に対しては、フルード数0.15、0.3の強制動揺実験を新たに行い、計算値と比較した。それにより、従来のストリップ法では説明できなかった双胴間干渉流体力に対する3次元影響、前進速度影響が、本論文の計算法によって的確に説明できていることを示した。

最後に、日頃から有益な助言、励ましを頂いている応用力学研究所、大楠 丹教授、並びに水槽実験に協力して頂いた稲田 勝技官に謝意を表します。また本論文の数値計算は、全て応用力学研究所の FACOM M 760/8 によって行われたことを付記します。

#### 参考文献

- 大楠丹,高木幹雄:双胴船の運動について、日本造船学会論文集、第129号、(1971)、pp. 29-40
- 日根野元裕,小林正典:非対称双胴体の横波中の運動について(第1報),西部造船会々報,第51号, (1975),pp. 179-193
- 3) Fang, M. C.: The Motions of SWATH Ships in Waves, J. S. R., Vol. 32, No. 4, (1988), pp. 238-245
- 4) 梶正和, 岡本耕一,山下寛,池渕哲朗:リフトフィン付双胴船に働く波浪変動圧力と構造応答,関西造船協会誌,第211号,(1989),pp.179-188
- 5) 大楠丹: Multihull Ship の波の中の運動について, 西部造船会々報,第40号,(1970),pp. 19-47
- 6) 竹沢誠二, 前田久明, 白木東, 江口純弘: 双胴船に

- 作用する流体力について,日本造船学会論文集,第 131号,(1972),pp.65-76
- 7) Breit, S. R. and Sclavounos, P. D.: Wave Interaction between Adjacent Slender Bodies, J. F. M., Vol. 165, (1986), pp. 273-296
- 8) Lee, C. M., Jones, H. D. and Curphey, R. M.: Prediction of Motion and Hydrodynamic Loads of Catamarans, Marine Tech., Vol. 10, No. 4, (1973), pp. 392-405
- 9) 竹沢誠二,神宮紀夫:水槽側壁を利用した双胴船の 縦運動に関する実験的研究,日本造船学会論文集, 第138号,(1975),pp.247-255
- 10) 岩下英嗣,大楠丹:特異点法による波浪中を航走する船に作用する流体力の研究,日本造船学会論文集, 第 166 号, (1989), pp. 187-205
- 11) 小林正典,島田潔,西村勝好:前進速度を有する SSC 船型に働く波浪荷重,日本造船学会論文集,第 168号,(1990),pp.159-170
- 12) 大楠丹, Faltinsen, O. M., 安永誠, 稲田勝: 高速双 胴船の耐航性能の推定法に関する研究, 日本造船学 会論文集, 第 170 号, (1991), pp. 153-161
- 13) Kring, D. and Sclavounos, P. D.: A New Method for Analyzing the Seakeeping of Multi-Hull Ships, Proc. of FAST '91, (1991)
- 14) Watanabe, I.: A New Method of Calculating Unsteady Hydrodynamic Forces Acting upon High-Speed Catamaran Ships, Proc. of 19th ONR Symp. in Seoul, (1992)
- 15) Newman, J. N.: The Theory of Ship Motions, Adv. Appl. Mech, Vol. 18, (1978), pp. 221-283
- 16) 柏木正,大楠丹,稲田勝:波浪中を前進する船に働く流体力への水路側壁影響の研究,日本造船学会論 文集,第168号,(1990),pp.227-242
- 17) Newman, J. N.: The Exciting Forces on a Moving Body in Waves, J. S. R., Vol. 9, No. 3, (1965),

130

pp. 190-199

- 18) 柏木正,大楠丹:細長船理論による船の付加質量, 減衰力係数に対する水路の側壁影響の研究,日本造 船学会論文集,第165号,(1989),pp.153-162
- 19) Timman, R. and Newman, J. N.: The Coupled Damping Coefficients of a Symmetric Ship, J. S. R., Vol. 5, No. 4, (1962), pp. 1-7

## 付録1. グリーン関数の内部展開式について

本文(8)式は次のように変形することができる。

$$G^{*}(k; y, z) = -\frac{1}{\pi} \int_{0}^{\infty} \frac{n \cos nz - \nu \sin nz}{n^{2} + \nu^{2}}$$

$$\times \frac{n}{\sqrt{n^{2} + k^{2}}} e^{-|y|/\sqrt{n^{2} + k^{2}}} dn$$

$$+ \begin{bmatrix} \frac{\mp i}{\sqrt{1 - k^{2}/\nu^{2}}} e^{-\nu z \pm i\nu|y|/\sqrt{1 - k^{2}/\nu^{2}}} \\ \frac{-1}{\sqrt{k^{2}/\nu^{2} - 1}} e^{-\nu z - \nu|y|/\sqrt{k^{2}/\nu^{2} - 1}} \end{bmatrix}$$

(A.1)

ここで、[ ] 内の上段は  $\nu > |k|$  に対して、下段は  $\nu < |k|$  に対して適用される。また上段に現れている複号は、 $\pm = -\mathrm{sgn}(\omega + kU)$  である。以後これらの表記方法を用いることにする。

さて(A.1)式の内部展開式,すなわち  $y=r\sin\theta$ , $z=r\cos\theta$  とおく時の  $Kr=O(\epsilon)$  に対する展開式から始める。式変形は文献 18)の付録 A で示した方法でも可能であるが,(A.1)式は unified theory に用いられているグリーン関数と同じであるから,その内部展開式は既に知られており $^{15}$ 0、次のようにまとめられる。

$$G^*(k; y, z) \sim G_{2D}(y, z) - (1 - Kz)g_L^*(k) + O(K^2r^2, (\nu - K)r)$$
 (A.2)

ただし

$$G_{2D}(y,z) = -\frac{1}{\pi} \lim_{\mu \to 0} \int_{0}^{\infty} \frac{e^{-tz} \cos \ell y}{\ell - K + i\mu} d\ell$$

$$\sim \frac{1}{\pi} (1 - Kz) (\ln Kr + \gamma + \pi i)$$

$$+ \frac{1}{\pi} Kr (\cos \theta + \theta \sin \theta) + \cdots \qquad (A.3)$$

$$g_{L}^{*}(k) = i + \frac{1}{\pi} \ln \frac{2K}{|k|}$$

$$- \frac{1}{\pi} \left[ \frac{1}{\sqrt{1 - k^{2}/\nu^{2}}} \left\{ \cosh^{-1} \left( \frac{\nu}{|k|} \right) + \pi i \right\} \right]$$

$$\frac{1}{\sqrt{k^{2}/\nu^{2} - 1}} \left\{ \cos^{-1} \left( \frac{\nu}{|k|} \right) - \pi \right\}$$

$$(A.4)$$

反対称成分のグリーン関数 (単位強さのダブレット) に対しては、(10)式によって(A.1)式から次式を得る。

$$H^{*}(k; y, z) = -\frac{\operatorname{sgn}(y)}{\pi \nu} \int_{0}^{\infty} \frac{n \cos nz - \nu \sin nz}{n^{2} + \nu^{2}} \times ne^{-|y|\sqrt{n^{2} + k^{2}}} dn$$
$$-\operatorname{sgn}(y) \begin{bmatrix} e^{-\nu z \pm i\nu|y|\sqrt{1 - k^{2}/\nu^{2}}} \\ e^{-\nu z - \nu|y|\sqrt{k^{2}/\nu^{2} - 1}} \end{bmatrix} \quad (A.5)$$

y>0 として(A.5)式の内部展開式を求めると、付録 2 に示す式変形によって次式を得る。

$$H^{*}(k; y, z) \sim -\frac{1}{\pi \nu} \left\{ \frac{\sin \theta}{r} + \frac{1}{2} |k|^{2} r \sin \theta \left( \ln \frac{|k| r}{2} + \gamma - \frac{1}{2} \right) + \cdots \right\} + \frac{1}{\pi} \left\{ -\theta (1 - \nu z) + \nu y \left( \ln \frac{|k| r}{2} + \gamma - 1 \right) \right\} + \cdots + \frac{1}{\pi} \nu y \left[ \frac{\sqrt{1 - k^{2} / \nu^{2}} \left\{ \cosh^{-1} \left( \frac{\nu}{|k|} \right) \mp \pi i \right\}}{-\sqrt{k^{2} / \nu^{2} - 1} \left\{ \cos^{-1} \left( \frac{\nu}{|k|} \right) - \pi \right\}} \right]$$
(A.6)

従って次のようにまとめることができる。

$$H^*(k; y, z) \sim H_{2D}(y, z) - Ky \cdot h_L^*(k) + O(K^2 r^2, (\nu - K) r, |k|^2 r / \nu) \quad (A.7)$$

ただし

$$H_{2D}(y,z) = -\frac{1}{\pi} \left\{ \frac{\sin \theta}{Kr} + \lim_{\mu \to 0} \int_{0}^{\infty} \frac{e^{-tz} \sin \ell y}{\ell - K + i\mu} d\ell \right\}$$

$$\sim -\frac{1}{\pi} \left\{ \frac{\sin \theta}{Kr} + \theta (1 - Kz) - Ky (\ln Kr + \gamma - 1) \right\} + iKy + \cdots \quad (A.8)$$

$$h_{L}^{*}(k) = i + \frac{1}{\pi} \ln \frac{2K}{|k|}$$

$$-\frac{1}{\pi} \left[ \frac{\sqrt{1 - k^{2}/\nu^{2}} \left\{ \cosh^{-1} \left( \frac{\nu}{|k|} \right) + \pi i \right\}}{-\sqrt{k^{2}/\nu^{2} - 1} \left\{ \cos^{-1} \left( \frac{\nu}{|k|} \right) - \pi \right\}} \right] \quad (A.9)$$

(A.7)式において、 $|k|^2r\sin\theta(\ln|k|r+{\rm const.})$  の項を省略したが、この項は付録 2 の式変形でもわかるように、無限流体中での 3 次元影響を表している。 $K\to 0$  でこの項を省略することは、O(Kr) である自由表面影響項を残すことから考えると inconsistent であるが、 $r=O(\epsilon)$ 、 $K=O(\epsilon^{-1+a})$ 、 $0<\alpha<1$  の場合には、

$$\frac{1}{Kr} = O(\epsilon^{-\alpha}) > Kr = O(\epsilon^{\alpha}) > \frac{r}{K} = O(\epsilon^{2-\alpha})$$

となり省略することは正当化させる。いずれにしても,双 胴間の干渉流体力を考える際には本質的な問題ではないの で,(A.7)式を内部展開式として用いることにする。

続いて、 $G^*(k; y-D, z)$ 、 $H^*(k; y-D, z)$ の  $Kr=O(\epsilon)$  に対する展開式について考える。これは D=O(1) と 仮定しているので  $r\to 0$  の時でも特異性はなく、普通の Taylor 展開が可能である。従って y-D<0 に注意し、

$$n \cos nz - \nu \sin nz \sim n(1 - \nu z)$$

$$e^{-|y-D|\nu\alpha} \sim (1 + \alpha \nu y)e^{-\alpha \nu D}$$

$$e^{-\nu z} \sim (1 - \nu z)$$
(A.10)

などを用いることによって、(A.1)式、(A.5)式から直ちに次の展開式を得る。

$$G^*(k; y-D, z) \sim -(1-Kz)g_k^*(k) - Ky \cdot f_k^*(k) + O(K^2r^2)$$
 (A.11)

ただし

$$g_{R}^{*}(k) = \frac{1}{\pi} \int_{0}^{\infty} \frac{n^{2}}{n^{2} + \nu^{2}} \frac{1}{\sqrt{n^{2} + k^{2}}} e^{-D\sqrt{n^{2} + k^{2}}} dn$$

$$+ \begin{bmatrix} \frac{\pm i}{\sqrt{1 - k^{2}/\nu^{2}}} e^{\pm i\nu D\sqrt{1 - k^{2}/\nu^{2}}} \\ \frac{1}{\sqrt{k^{2}/\nu^{2} - 1}} e^{-\nu D\sqrt{k^{2}/\nu^{2} - 1}} \end{bmatrix}$$

$$f_{R}^{*}(k) = \frac{1}{\pi K} \int_{0}^{\infty} \frac{n^{2}}{n^{2} + \nu^{2}} e^{-D\sqrt{n^{2} + k^{2}}} dn$$

$$+ \begin{bmatrix} e^{\pm i\nu D\sqrt{1 - k^{2}/\nu^{2}}} \\ e^{-\nu D\sqrt{k^{2}/\nu^{2} - 1}} \end{bmatrix}$$
(A.13)

同様に

$$H^*(k; y-D, z) \sim +(1-Kz)f_k^*(k)+Ky\cdot h_k^*(k) +O(K^2r^2)$$
 (A.14)

ただし

$$h_{R}^{*}(k) = \frac{1}{\pi K^{2}} \int_{0}^{\infty} \frac{n^{2} \sqrt{n^{2} + k^{2}}}{n^{2} + \nu^{2}} e^{-D\sqrt{n^{2} + k^{2}}} dn$$

$$+ \begin{bmatrix} \mp i \sqrt{1 - k^{2} / \nu^{2}} e^{\pm i\nu D\sqrt{1 - k^{2} / \nu^{2}}} \\ \sqrt{k^{2} / \nu^{2} - 1} e^{-\nu D\sqrt{k^{2} / \nu^{2} - 1}} \end{bmatrix}$$
(A.15)

る。

### 付録 2. (A.6)式の導出について

y>0 として以下の式変形を考える。まず、(A.5)式中の 積分をJとおくと、

$$J = \int_0^\infty \frac{n \cos nz - \nu \sin nz}{n^2 + \nu^2} ne^{-|y|\sqrt{n^2 + k^2}} dn$$

$$= \frac{|k|y}{r} K_1(|k|r)$$

$$-\nu \int_0^\infty \frac{|k|ye^{-\nu v}}{\sqrt{y^2 + (z - v)^2}} K_1\{|k|\sqrt{y^2 + (z - v)^2}\} dv$$
(A.16)

と変形できる。 $K_{l}(x)$  は第2種変形ベッセル関数であり、

$$K_1(x) \sim \frac{1}{x} + \frac{x}{2} \left( \ln \frac{x}{2} + \gamma \right) - \frac{x}{4} + \cdots \text{ as } x \to 0$$

の性質を有する。そこで  $y=O(\epsilon)$ 、 $z=O(\epsilon)$  に対して、 (A.16)式の積分は次のように変形できる。

$$A = \int_0^\infty \frac{|k| y e^{-\nu v}}{\sqrt{y^2 + (z - v)^2}} K_1\{|k| \sqrt{y^2 + (z - v)^2}\} dv$$

$$=|k|y\int_{0}^{\infty}\frac{e^{-\nu v}}{\sqrt{y^{2}+(z-v)^{2}}}$$
×  $\left[K_{1}\{|k|\sqrt{y^{2}+(z-v)^{2}}\}-\frac{1}{|k|\sqrt{y^{2}+(z-v)^{2}}}\right]dv$ 
+  $\lim_{0}^{\infty}\frac{e^{-\nu v}}{v-(z+iy)}dv$ 
~ $|k|y\int_{0}^{\infty}\frac{e^{-\nu v}}{v}\left[K_{1}(|k|v)-\frac{1}{|k|v}\right]dv+O(r^{2})$ 
+  $\lim_{0}^{\infty}\left[e^{-\nu(z+iy)}E_{1}\{-\nu(z+iy)\}\right]$  (A.17)
だし、 $E_{1}(x)$  は指数積分関数である。その級数展開式を代

ただし、 $E_1(x)$  は指数積分関数である。その級数展開式を代 入し, 更に変形すると次式を得る。

$$A \sim \nu y \left[ \left( 1 - \frac{k^2}{\nu^2} \right) \nu \int_0^\infty e^{-\nu v} K_0(|k|v) dv + \ln \frac{|k|}{2\nu} \right] + (\pi - \theta)(1 - \nu z) + \nu y (\ln \nu r + \gamma - 1) + O(r^2)$$
(A.18)

$$\nu \int_{0}^{\infty} e^{-\nu v} K_{0}(|k|v) dv = \begin{bmatrix} \frac{1}{\sqrt{1 - k^{2}/\nu^{2}}} \cosh^{-1}\left(\frac{\nu}{|k|}\right) \\ \frac{1}{\sqrt{k^{2}/\nu^{2} - 1}} \cos^{-1}\left(\frac{\nu}{|k|}\right) \end{bmatrix}$$
(A.19)

以上の結果をまとめて(A.5)式に代入すると,

$$H^{*}(k; y, z) \sim -\frac{1}{\pi\nu} \left\{ \frac{\sin \theta}{r} + \frac{1}{2} |k|^{2} r \sin \theta \left( \ln \frac{|k| r}{2} + \gamma - \frac{1}{2} \right) + \cdots \right\} + \frac{1}{\pi} \left\{ -\theta (1 - \nu z) + \nu y (\ln \nu r + \gamma - 1) \right\} + (1 - \nu z) + \frac{1}{\pi} \nu y \ln \frac{|k|}{2\nu} + \frac{1}{\pi} \nu y \left[ \frac{\sqrt{1 - k^{2}/\nu^{2}} \cosh^{-1} \left( \frac{\nu}{|k|} \right)}{-\sqrt{k^{2}/\nu^{2} - 1} \cos^{-1} \left( \frac{\nu}{|k|} \right)} \right] - (1 - \nu z) + \nu y \left[ \frac{\mp i \sqrt{1 - k^{2}/\nu^{2}}}{\sqrt{k^{2}/\nu^{2} - 1}} \right]$$
(A. 20)

を得るが、これを整理すれば(A.6)式となっていることが わかる。