

# 順応型 Shifted Integration 法による骨組構造 の座屈崩壊挙動の有限要素解析

正員 都 井 裕\* 正員 磯 部 大吾郎\*\*

Finite Element Analysis of Buckling Collapse Behaviors  
of Framed Structures by Using Adaptively Shifted  
Integration Technique

by Yutaka Toi, *Member* Daigoro Isobe, *Member*

## Summary

In this study, the previously proposed Adaptively Shifted Integration (ASI) technique is applied to the elasto-plastic buckling analysis of framed structures using the cubic beam element based on the Bernoulli-Euler hypothesis. The stiffness matrices with the positions of numerical integration points for the large deformation analysis are described. The minimum number of cubic beam elements needed in the buckling analysis using ASI technique is discussed by studying several cases under different patterns of combined loading. This paper is also concerned with a technique to subdivide each structural member automatically in the process of calculation into the most appropriate number of elements for the frame analysis. By using ASI technique with this automatic resubdivision, sufficiently accurate solutions can be obtained in a minimum calculation time. Elasto-plastic buckling problems of framed structures are analyzed by using this method, and the results are compared with those obtained by using the conventional method.

## 1. 序

通常の3次はり要素による骨組構造の有限要素解析においては、数値積分点の位置あるいは応力評価点の位置が常にガウス積分点にあるために、塑性ヒンジを厳密に部材結合部あるいは集中荷重点に発生させることができず、要素数が少ない場合の塑性崩壊荷重値と変位解の収束性は良くない。

これに対し著者の一人は、応力評価点あるいは塑性ヒンジ発生点の位置が明確な物理モデルである剛体・ばねモデル<sup>1)</sup>と3次はり要素モデルにおけるひずみエネルギー近似式の等価条件を考察することにより、3次はり要素における数値積分点位置と物理的な応力評価点位置の関係を初めて見出し<sup>2),3)</sup>、この関係を用いることにより、塑性ヒンジを

厳密に部材結合部あるいは集中荷重点に発生させることを可能とした。この方法を Shifted Integration 法と呼ぶが、筆者らはこの手法を応用し、要素が弾性変形状態にあるときには線形解析における最適位置に数値積分点を配し、要素の一部が降伏した直後にその位置に塑性ヒンジが発生するように数値積分点をシフトさせる手法、いわゆる Adaptively Shifted Integration 法 (以下 ASI 法と記す) を提案し、有限要素骨組構造解析プログラムに組み込み、平面骨組および空間骨組の塑性崩壊解析を行ってきた。その結果、崩壊荷重・変位双方に対し、最小限の要素数で実用上十分に正確な解を得ることができた<sup>4),5)</sup>。

本報告では、ASI 法を有限変形問題にまで拡張し、3次はり要素を用いて梁柱部材の弾塑性座屈問題の有限要素解析を行い、座屈問題における ASI 法の有効性を論じ、座屈問題を解析するのに必要な最小限の要素数について考察した。さらに、一般的な骨組構造の解析に用いることを想定し、1部材1要素で解析をスタートし、座屈の可能性があると判定された部材に対してのみ自動的に要素細分化を行う手法を考案し、平面骨組および空間骨組構造の座屈解析

\* 東京大学生産技術研究所

\*\* 東京大学大学院

原稿受理 平成5年7月5日

秋季講演会において講演 平成5年11月9, 10日

に適用した。

## 2. ASI法の有限変形問題への適用

Bernoulli-Eulerの仮定に基づく3次はり要素における2つの数値積分点位置  $s_i$  ( $-1 \leq s_i \leq 1$ ) と塑性ヒンジ発生点 (または応力評価点) 位置  $r_i$  ( $-1 \leq r_i \leq 1$ ) の関係は、文献2)より

$$r_i = \mp \frac{1}{3s_2} \quad (i=1, 2; s_1 = -s_2) \quad (1)$$

と表せる。また、増分理論による仮想仕事式を導き出し定式化を行うと、例えば要素内部における曲げモーメント分布は、次式により与えられる。

$$\Delta M_x = EI_{xx} \Delta v'' + EI_{xx} (u' \Delta \theta' + \theta' \Delta u') \quad (2a)$$

$$\Delta M_y = EI_{yy} \Delta u'' - EI_{yy} (v' \Delta \theta' + \theta' \Delta v') \quad (2b)$$

ここで、各式の第一項は線形項、第二項は非線形項であり、 $-1 \leq s_i \leq 1$  の要素内局所座標を用いて数値積分点の位置を示すことによって、各変位成分は

$$\left. \begin{aligned} \Delta u'' &= \frac{6s_i}{l^2} \Delta u_1 + \frac{1}{l} (3s_i - 1) \Delta \theta_{y1} - \frac{6s_i}{l^2} \Delta u_2 \\ &\quad + \frac{1}{l} (3s_i + 1) \Delta \theta_{y2} \\ \Delta v'' &= \frac{6s_i}{l^2} \Delta v_1 - \frac{1}{l} (3s_i - 1) \Delta \theta_{x1} - \frac{6s_i}{l^2} \Delta v_2 \\ &\quad - \frac{1}{l} (3s_i + 1) \Delta \theta_{x2} \\ \Delta u' &= \frac{3}{2l} (s_i^2 - 1) \Delta u_1 + \frac{1}{4} (3s_i + 1) (s_i - 1) \Delta \theta_{y1} \\ &\quad - \frac{3}{2l} (s_i^2 - 1) \Delta u_2 + \frac{1}{4} (3s_i - 1) (s_i + 1) \Delta \theta_{y2} \\ \Delta v' &= \frac{3}{2l} (s_i^2 - 1) \Delta v_1 - \frac{1}{4} (3s_i + 1) (s_i - 1) \Delta \theta_{x1} \\ &\quad - \frac{3}{2l} (s_i^2 - 1) \Delta v_2 - \frac{1}{4} (3s_i - 1) (s_i + 1) \Delta \theta_{x2} \\ \Delta \theta' &= -\frac{1}{l} \Delta \theta_{z1} + \frac{1}{l} \Delta \theta_{z2} \end{aligned} \right\} (3)$$

と表すことができる。

要素全体が弾性変形状態にある場合は、ガウス積分点 ( $s_i = \pm 1/\sqrt{3}$ ) が最適な積分点位置であり、有限変形問題における剛性マトリックスは以下のように表される。

$$\begin{aligned} [K] &= \frac{L}{2} \left\{ \left[ B_0 \left( -\frac{1}{\sqrt{3}} \right) \right]' \right. \\ &\quad + \left[ B_L \left( -\frac{1}{\sqrt{3}} \right) \right]' \left[ D_e \left( -\frac{1}{\sqrt{3}} \right) \right] \\ &\quad \times \left( \left[ B_0 \left( -\frac{1}{\sqrt{3}} \right) \right] + \left[ B_L \left( -\frac{1}{\sqrt{3}} \right) \right] \right) \\ &\quad + \left( \left[ B_0 \left( \frac{1}{\sqrt{3}} \right) \right]' + \left[ B_L \left( \frac{1}{\sqrt{3}} \right) \right]' \right) \left[ D_e \left( \frac{1}{\sqrt{3}} \right) \right] \\ &\quad \times \left. \left( \left[ B_0 \left( \frac{1}{\sqrt{3}} \right) \right] + \left[ B_L \left( \frac{1}{\sqrt{3}} \right) \right] \right) \right\} \quad (4) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} [K_c] &= \frac{L}{2} \left\{ \left[ G \left( -\frac{1}{\sqrt{3}} \right) \right]' \left[ S \left( -\frac{1}{\sqrt{3}} \right) \right] \left[ G \left( -\frac{1}{\sqrt{3}} \right) \right] \right. \\ &\quad + \left. \left[ G \left( \frac{1}{\sqrt{3}} \right) \right]' \left[ S \left( \frac{1}{\sqrt{3}} \right) \right] \left[ G \left( \frac{1}{\sqrt{3}} \right) \right] \right\} \quad (5) \end{aligned}$$

ここに、 $[K]$  は増分剛性マトリックス、 $[K_c]$  は初期応力マトリックス、 $[B_0]$  は一般化ひずみ・節点変位マトリックスの線形成分、 $[B_L]$  は一般化ひずみ・節点変位マトリックスの非線形成分、 $[D_e]$  は弾性変形の場合の断面力・一般化ひずみマトリックス、 $[G]$  は変位勾配マトリックス、 $[S]$  は前ステップの応力マトリックス、 $L$  は要素長である。従来の有限要素解析では、ガウス積分点に数値積分点を配置した上式の剛性マトリックスを終始用いることになる。一方、ASI法の場合には、2方向の曲げモーメント、軸力、およびねじりモーメントにより表現された降伏条件を用いて要素両端のどちらか一端 (ここでは左端を仮定) の塑性化が判定された直後の増分ステップにおいて、要素内の2つの数値積分点を(1)式に従ってシフトする。すなわち、上式の表記方法に従った以下の式のような剛性マトリックスを用いることになる。

$$\begin{aligned} [K] &= \frac{L}{2} \left\{ \left( \left[ B_0 \left( -\frac{1}{3} \right) \right]' + \left[ B_L \left( -\frac{1}{3} \right) \right]' \right) \left[ D_p \left( -1 \right) \right] \right. \\ &\quad \times \left( \left[ B_0 \left( -\frac{1}{3} \right) \right] + \left[ B_L \left( -\frac{1}{3} \right) \right] \right) \\ &\quad + \left( \left[ B_0 \left( \frac{1}{3} \right) \right]' + \left[ B_L \left( \frac{1}{3} \right) \right]' \right) \left[ D_e \left( 1 \right) \right] \\ &\quad \times \left. \left( \left[ B_0 \left( \frac{1}{3} \right) \right] + \left[ B_L \left( \frac{1}{3} \right) \right] \right) \right\} \quad (6) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} [K_c] &= \frac{L}{2} \left\{ \left[ G \left( -\frac{1}{3} \right) \right]' \left[ S \left( -1 \right) \right] \left[ G \left( -\frac{1}{3} \right) \right] \right. \\ &\quad + \left. \left[ G \left( \frac{1}{3} \right) \right]' \left[ S \left( 1 \right) \right] \left[ G \left( \frac{1}{3} \right) \right] \right\} \quad (7) \end{aligned}$$

ここに、 $[D_p]$  は塑性変形の場合の断面力・一般化ひずみマトリックスである。また、 $[B_0]$ 、 $[B_L]$ 、 $[G]$  の括弧内の数値は数値積分点位置、 $[D_e]$ 、 $[D_p]$ 、 $[S]$  の括弧内の数値は物理的な応力評価点位置を示し、要素右端も塑性化すると(6)式における  $[D_e(1)]$  は  $[D_p(1)]$  に変化する。

(1)式の関係は線形項に当てはまる関係であり、 $[B_L]$  や  $[G]$  に対する数値積分点位置と塑性ヒンジ発生点との関係は、まだ導き出されていない。上記のシフトパターン以外にも、非線形項は全て通常の有限要素法で解析するパターン、初期応力マトリックスだけを通常の有限要素法で解析するパターンなど、様々なシフトパターンを試行してみたが、いずれもアルゴリズムが複雑になる割には収束性の向上が認められず、骨組構造が主に曲げ崩壊することも考慮して、本研究では上記のシフトパターンを採用することにした。

## 3. 梁柱部材の弾塑性座屈解析

骨組構造の座屈解析にASI法を適用することを想定し、Fig. 1に示すような、両端支持の柱、および一端固定の柱に対して様々な組合せ比例荷重を加える弾塑性座屈問題を解析した。ここでは、荷重の加え方によってASI法の有効性が損なわれることがないことを立証するために、数種類の

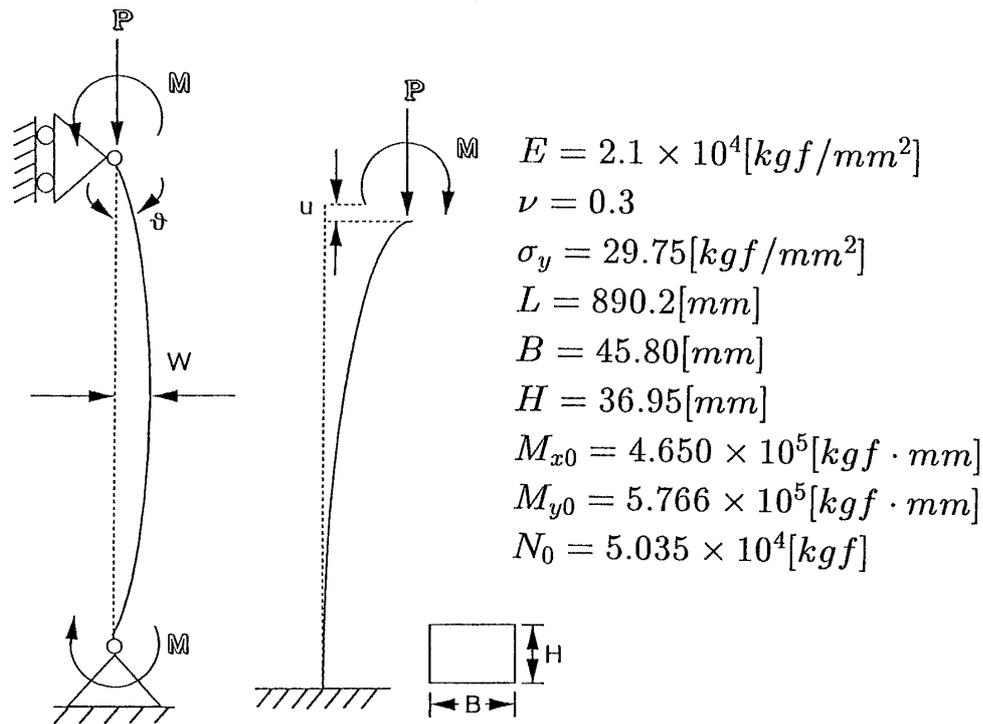


Fig. 1 Analyzed beam-column

Table 1 Combined loading patterns used in the analysis

No.	N	$M_x$	$M_y$	$M_z$
1	$0 \rightarrow N_0$	0	0	0
2	$0 \rightarrow N_0$	$0 \rightarrow M_{x0}$	0	0
3	0	$0 \rightarrow M_{x0}$	0	0
4	$0 \rightarrow N_0$	$0 \rightarrow M_{x0}$	$0 \rightarrow M_{y0}$	$0 \rightarrow M_{z0}$
5	$0 \rightarrow N_0$	$0 \rightarrow M_{x0}$	0	0

荷重パターンに対して解析を行っている。解析に用いた荷重パターンを Table 1 に示す。両端支持の柱には case 1~4, 一端固定の柱に対しては case 5 の荷重パターンを加えている。

また、解析において仮定された降伏条件は、次式により表現される。

$$\left(\frac{M_x}{M_{x0}}\right)^2 + \left(\frac{M_y}{M_{y0}}\right)^2 + \left(\frac{N}{N_0}\right)^2 + \left(\frac{M_z}{M_{z0}}\right)^2 - 1 = 0 \quad (8)$$

ここに、 $M_x$ ,  $M_y$ ,  $N$  および  $M_z$  はそれぞれ、2成分の曲げモーメント、軸力およびねじりモーメントである。下添字'0'は、各断面力成分が単独で部材断面に作用した場合の全断面塑性値を意味する。

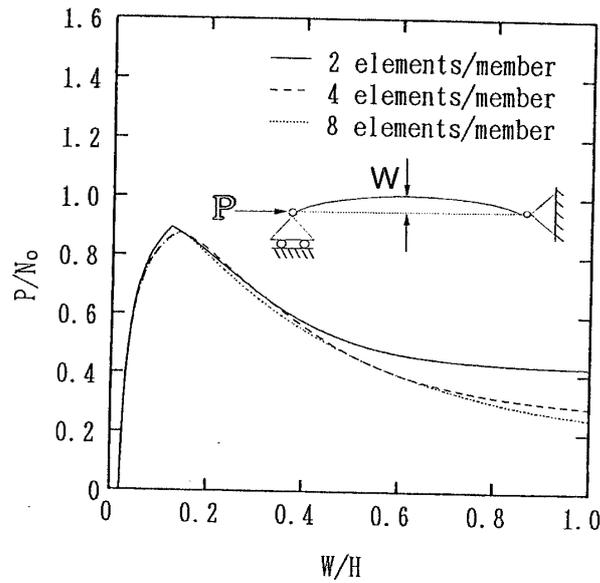
Fig. 2 に、両端支持の柱に軸力のみを作用させた場合 (case 1) についての軸荷重-たわみ曲線を示す。ここでは、各要素において数値積分点が常にガウス積分点 ( $s_i = \pm 1/\sqrt{3}$ ) に位置している、通常の有限要素法による解析結

果と、前章で有限変形問題に拡張した ASI 法による解析結果とが比較されている。通常法 (図 (a)) においては、 $W/H = 0.4$  ぐらいまでは比較的解の精度が良いが、それ以降の座屈後の曲げ挙動が卓越してくる領域では、解の精度はあまり良くない。逆に ASI 法においては、図 (b) に示されているように、座屈点付近では多少解のばらつきがあるものの、塑性崩壊荷重値に関しては良好な解が得られている。また、座屈後の曲げ挙動が卓越する領域の精度はかなり良好である。これは、曲げ崩壊挙動に対しては順応的に数値積分点が最適な点にシフトされ、精度の良い解が得られていることに起因する。

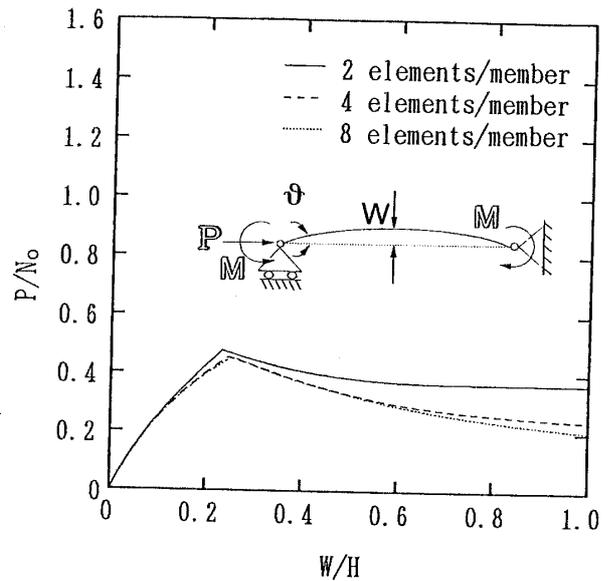
部材両端に軸力と 1 軸回りの曲げモーメントを比例増分的に加えた解析の結果を Fig. 3 に示す。また、Fig. 4 には、軸力は加えずに曲げモーメントのみを加えた解析結果を示す。いずれの場合も、通常の有限要素法に比べ、ASI 法の収束性が良好であることがわかる。特に Fig. 4 の曲げ支配の問題では、座屈問題とは異なり部材両端に塑性ヒンジが発生するため、要素両端に塑性ヒンジを正確に表現できる ASI 法が圧倒的に有利であることが一目瞭然である。

次に、軸力、2 軸回りの曲げモーメント、およびねじりモーメントを全て比例増分的に加えて解析した。解析結果を Fig. 5 に示す。この解析においても、ASI 法の収束性は、通常法に比べて十分に維持されていることがわかる。

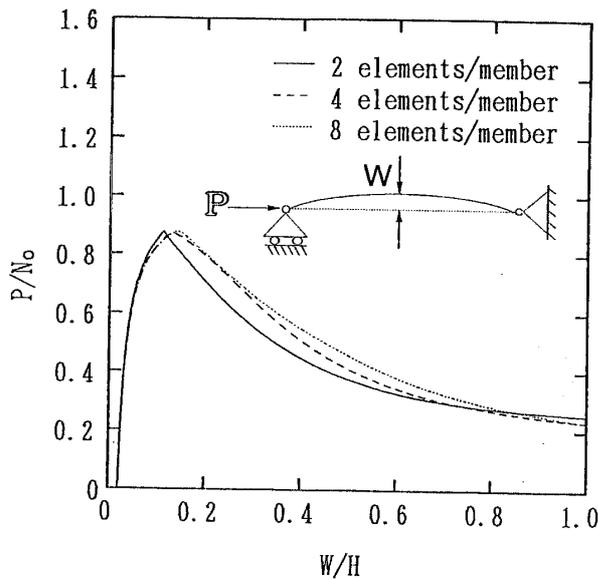
以上の case 1~4 のような条件の場合、部材は 'く' の字に折れ曲がって中央に塑性ヒンジが発生するが、解析結果から、1 部材当たり 2 要素で塑性ヒンジを正確に表現でき、



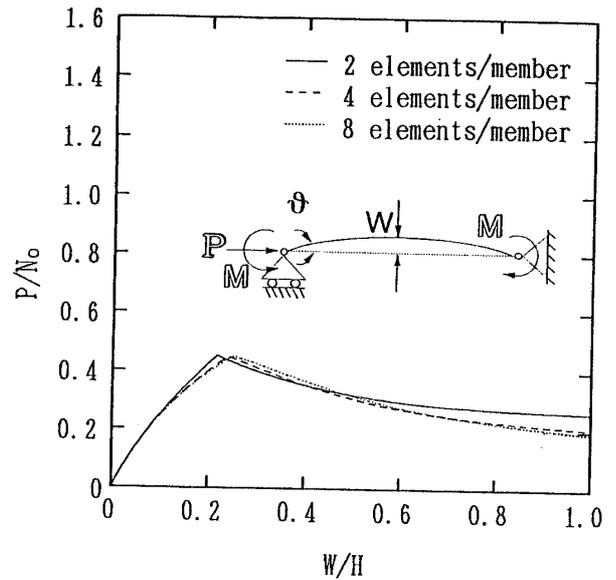
(a) conventional method  
(Gaussian integration)



(a) conventional method  
(Gaussian integration)



(b) ASI technique



(b) ASI technique

Fig.2 Simply supported column subjected to axial force (case 1)

Fig.3 Simply supported column subjected to axial force and bending moment (case 2)

かつ十分に良好な解析ができることが確認できた。

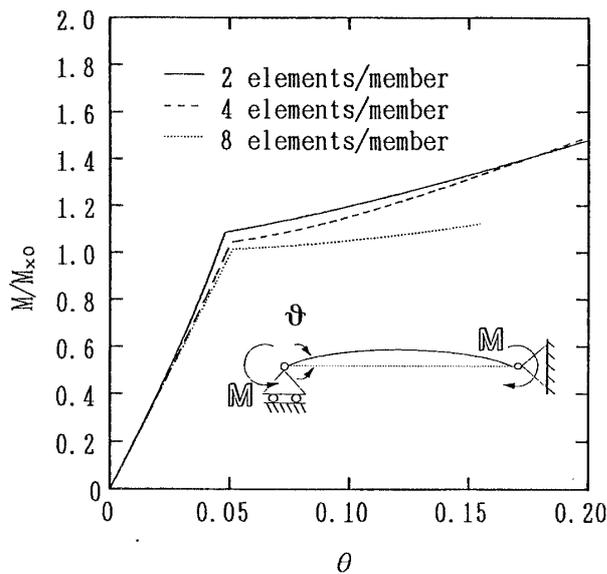
最後に、部材の一端に軸力と曲げモーメントを加え、一方の固定端に反力として軸力および同符号の曲げモーメントの加わる case 5 のパターンについて解析した。このような条件の場合、部材内の中央点以外に複数の塑性ヒンジが発生する可能性があり、Fig. 6 の解析結果からもわかるように、十分な精度を得るためには、1部材当たり少なくとも4要素程度は必要である。

以上の結果から、一般的な骨組構造の座屈問題を ASI 法で解析する際には、1部材当たり4つの3次はり要素を用

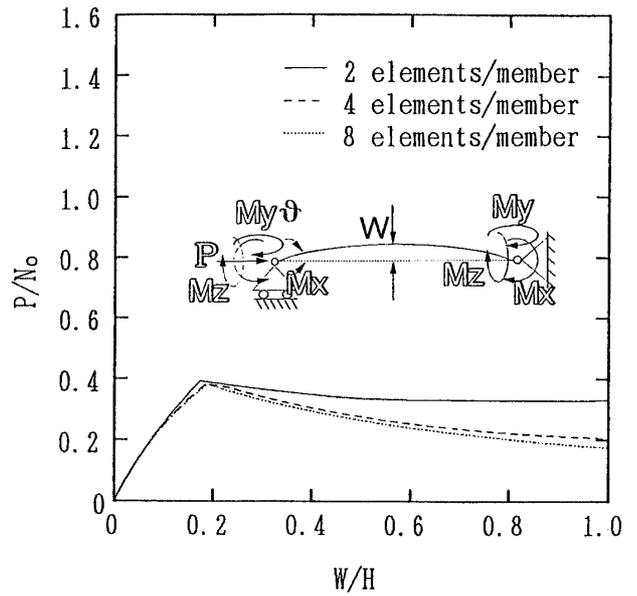
いることが妥当と考えられる。

#### 4. 座屈解析アルゴリズムの構築

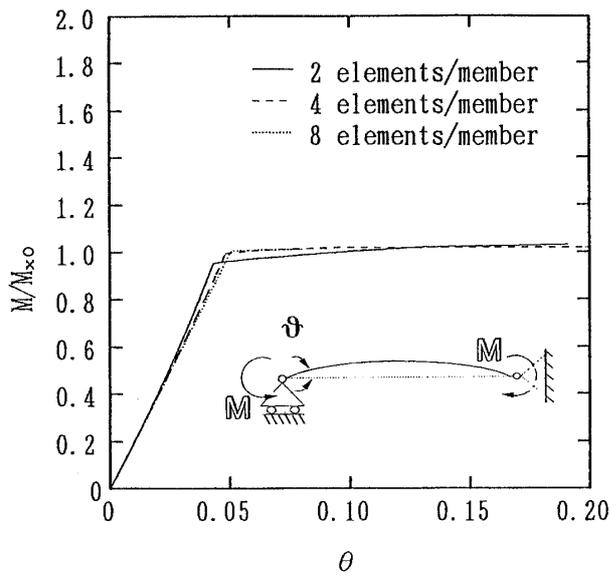
骨組構造の弾塑性座屈解析をする際に、座屈部材については4要素分割が必要となるが、座屈を起こさない部材に対しては、1部材当たり1要素で十分に正確な解が得られることがわかっている<sup>4)</sup>。そこで、1部材当たり1要素で解析をスタートし、各増分ステップにおいて断面力成分で与えられる座屈判定曲線で全部材の座屈の可能性を判定し、座屈を起こすと判定された部材のみ、直後の増分ステ



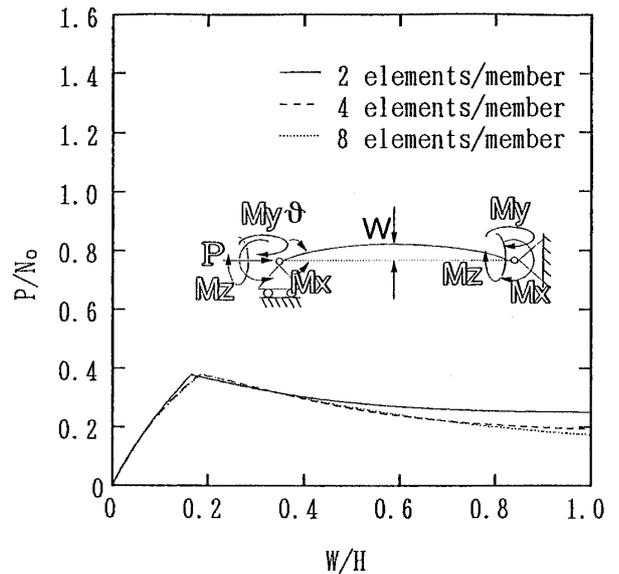
(a) conventional method  
(Gaussian integration)



(a) conventional method  
(Gaussian integration)



(b) ASI technique



(b) ASI technique

Fig. 4 Simply supported column subjected to bending moment (case 3)

Fig. 5 Simply supported column subjected to axial force, bending moment and torsional moment (case 4)

ップから4要素に分割するという、自動要素細分化アルゴリズムを開発した。解析に用いた座屈判定曲線は、次式のように与えられる<sup>6),7),8)</sup>。

$$\begin{aligned}
 & B(M_{x1}, M_{y1}, N, C_{mx}, C_{my}) \\
 & \equiv \left( \frac{C_{mx}M_{x1}}{\left(1 - \frac{N}{N_x^e}\right)M_{x0}} \right)^2 + \left( \frac{C_{my}M_{y1}}{\left(1 - \frac{N}{N_y^e}\right)M_{y0}} \right)^2 \\
 & + \frac{2N}{N_0} - \left( \frac{N}{N_0} \right)^2 \\
 & = 1
 \end{aligned} \tag{9}$$

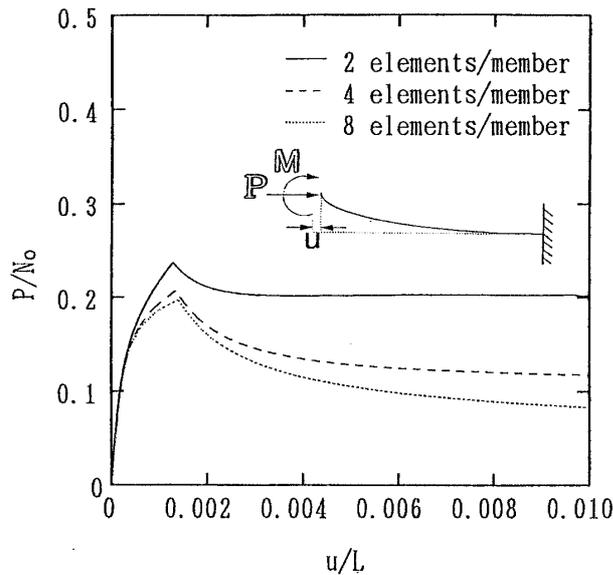
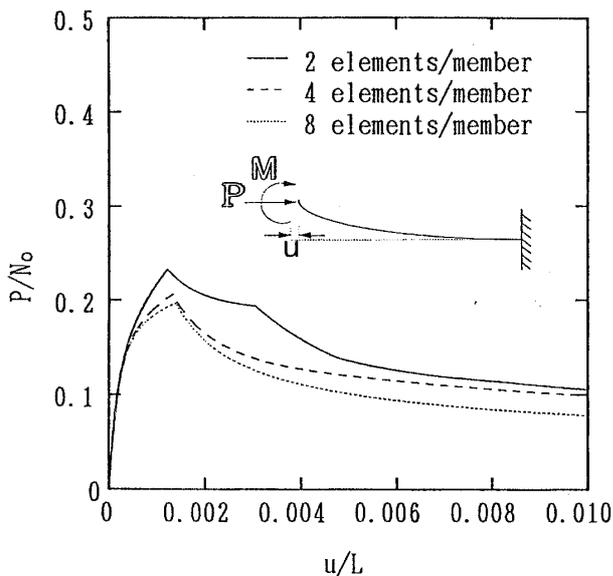
ただし、 $C_{mx}$ 、 $C_{my}$  は、以下の式で表されるモーメント勾配の修正係数である。

$$C_{mx} = 1 - 0.5(1 - \beta_x) \sqrt{\frac{N}{N_x^e}} \geq 0.25 \tag{10 a}$$

$$C_{my} = 1 - 0.5(1 - \beta_y) \sqrt{\frac{N}{N_y^e}} \geq 0.25 \tag{10 b}$$

ここで、

$$\beta_x = \frac{M_{x2}}{M_{x1}}, \quad \beta_y = \frac{M_{y2}}{M_{y1}} \tag{11}$$

(a) conventional method  
(Gaussian integration)

(b) ASI technique

Fig. 6 Cantilever column subjected to axial force and bending moment (case 5)

$$(|M_{x1}| \geq |M_{x2}|), (|M_{y1}| \geq |M_{y2}|)$$

また、 $N_x^e, N_y^e$  は以下の式で表される。

$$N_x^e = \left(\frac{\pi}{l}\right)^2 EI_x, \quad N_y^e = \left(\frac{\pi}{l}\right)^2 EI_y \quad (12)$$

上記の座屈判定曲線によって座屈を起こすと判定された部材では、その直後の増分ステップにおいて部材を4等分する部材内の3つの新しい節点が設定され、元の要素の変位関数から各節点の変位が求められ、その値を用いて新要素の各積分点における断面力も計算される。部材両端の2つの節点に関しては、元の要素の情報がそのまま取り込まれ

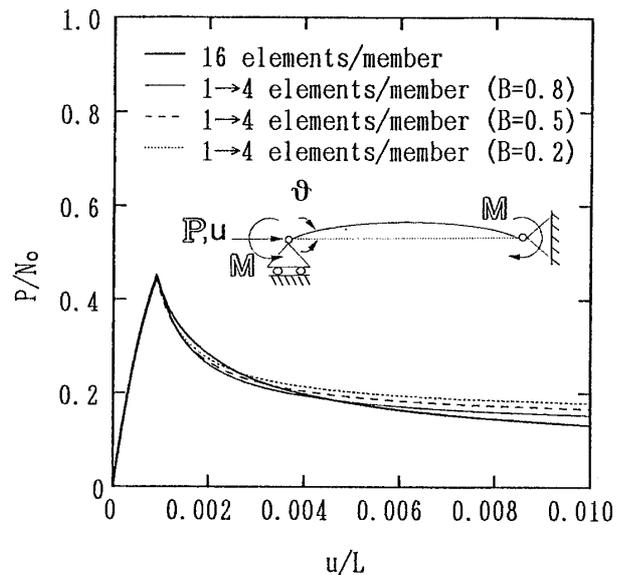


Fig. 7 Elasto-plastic buckling analysis of simply supported column using ASI technique with automatic resubdivision

る。また、節点番号については、元の要素の節点番号の次の番号から順に新しい節点に付けられていき、それに伴ってそれ以降の節点番号も順に繰り下げられる。この操作によって、剛性マトリックスのバンド幅が極端に大きくなることを防いでいる。

Fig. 7に、前章の case 2の問題にこのアルゴリズムを適用した場合の軸力-軸方向変位曲線を示す。図中の  $B$  の値は、1要素から4要素に自動細分化する瞬間の、(9)式の関数  $B$  の値である。つまり、この値が小さいほど早めに4要素に分割することになり、精度は良くなるが計算時間が長くなる。図から、 $B$  の値をどのように採っても解の精度には大差がなく、 $B=0.8$ でも一般的な解析には十分であることがわかる。

## 5. 骨組構造の弾塑性座屈解析

前章の自動要素細分化アルゴリズムを用いて、ブレース付きの平面骨組および空間骨組構造に水平荷重の加わる弾塑性座屈問題を解析した。Fig. 8に解析モデルと材料定数を示す。

まず、Fig. 8の平面骨組構造について、通常の有限要素法を用いて解析した。その解析結果を Fig. 9に示すが、収束値を得るためには1部材当たり16等分割の要素が必要であることがわかる。Fig. 10に、同じ問題についてASI法を適用し、さらに1要素から2要素に自動細分化した場合、および1要素から4要素に自動細分化した場合の結果を示す。図中には、最終的な段階での各々の要素細分化の様子が描かれている。また、Fig. 10(b)の中には、最終的な段階での変形モードと塑性ヒンジの発生状況が描かれてい

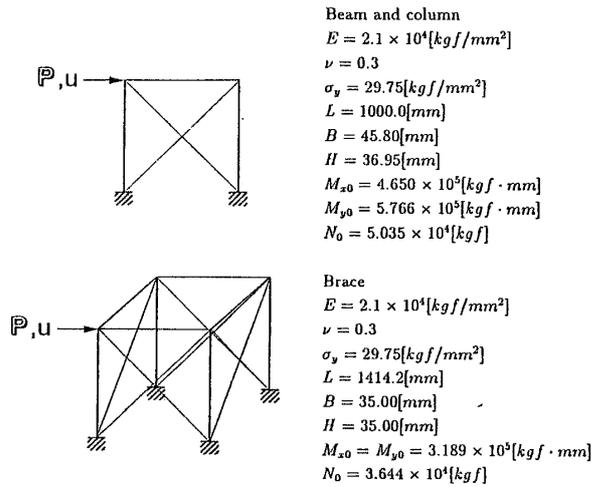


Fig. 8 Analyzed portal frame and space frame

る。特にこのような問題の場合、ブレースにおいて複雑な座屈モードが発生し、前者 (Fig. 10(a)) の場合十分に解析できないが、後者 (Fig. 10(b)) の場合にはかなり正確な解を示すことがよくわかる。ここで、前章と同様に、図中の  $B$  の値は部材を自動細分化する瞬間の (9) 式の関数  $B$  の値であり、 $B=0.8$ 、つまり細分化するタイミングを部材が座屈する間近に設定しても、十分に満足な解が得られることがわかった。いずれの解析も TITAN の GS-1000 で行われたが、解析にかかった計算時間は、1部材当たり16要素の通常法の場合は174分40秒、1部材当たり8要素の通常法の場合は30分48秒、1部材当たり4要素の通常法の場合は8分18秒、ASI法および1要素から4要素

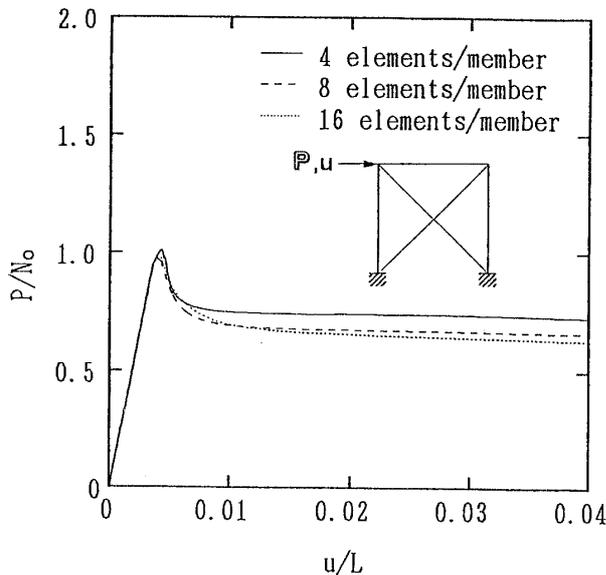
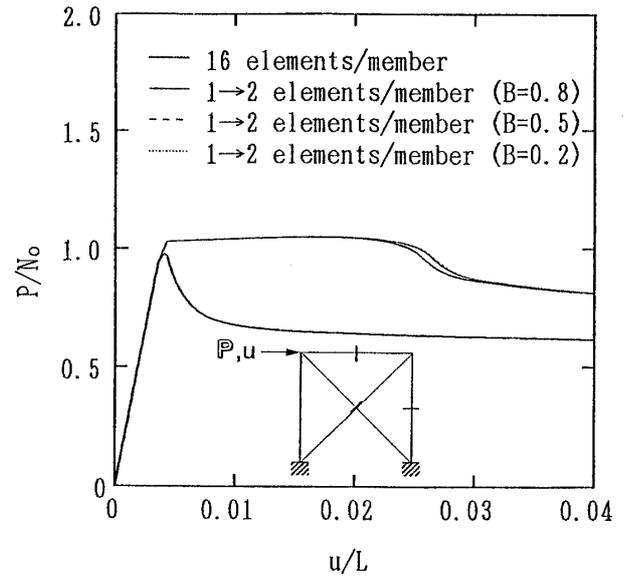


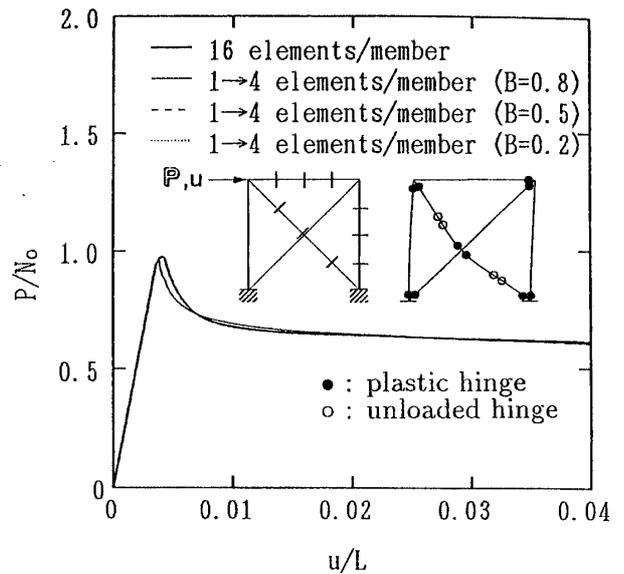
Fig. 9 Elasto-plastic buckling analysis of a portal frame by the conventional method

へ  $B=0.8$  の時に自動細分化する手法を併用した場合は4分20秒であった。

同様な解析を、Fig. 8の空間骨組構造についても実施した。Fig. 11には空間骨組構造について通常の有限要素法で解析した結果を示し、Fig. 12には、ASI法を適用し、さらに1要素から2要素に自動細分化した場合、および1要素から4要素に自動細分化する手法を併用した場合の結果を示す。Fig. 12(a)では、やはり1部材当たり2要素では複雑な座屈モードに対応できず、要素数が十分でないことが



(a) ASI technique with automatic resub-division (1 → 2)



(b) ASI technique with automatic resub-division (1 → 4)

Fig. 10 Elasto-plastic buckling analysis of a portal frame

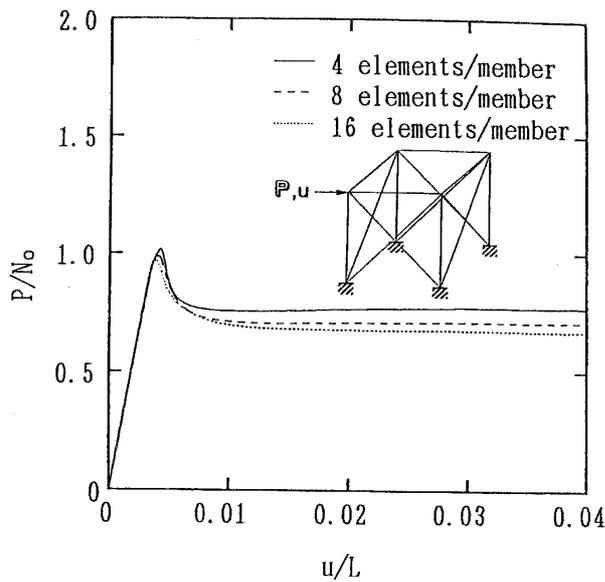
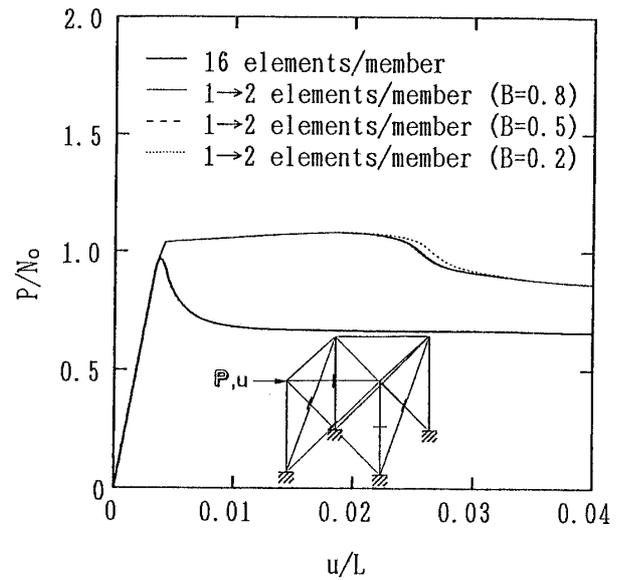


Fig. 11 Elasto-plastic buckling analysis of a space frame by the conventional method

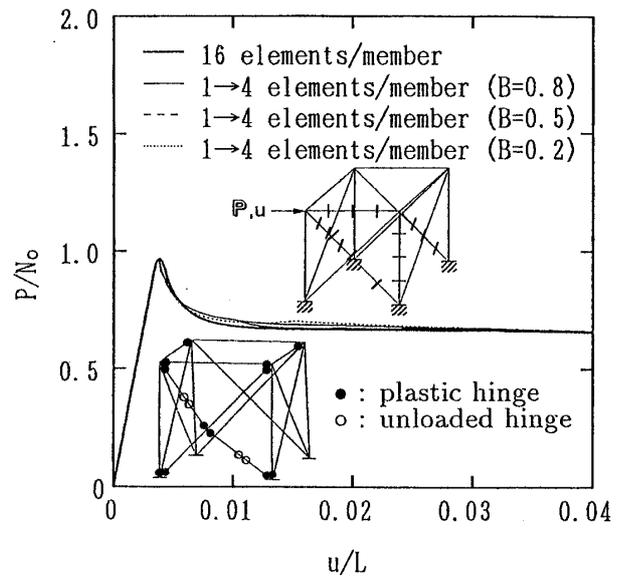
確認できる。また、Fig. 11 の通常法の場合は、満足な解を得るために 1 部材当たり 16 要素ほど必要であるが、それに対し Fig. 12(b) の ASI 法および 1 → 4 要素自動細分化手法を用いた場合は、最小限の計算時間で収束値を得ることができた。Fig. 12(b) の中に、最終段階の骨組の変形モードおよび塑性ヒンジの発生状況が描かれているが、座屈した部材と細分化された部材とが対応しており、(9) 式の座屈判定曲線による座屈の判定が妥当に行われていることがわかる。以上の結果から、一般的な骨組構造を ASI 法で座屈解析する際には、1 要素から 4 要素に自動細分化し、しかもその際の  $B$  の値を 0.8 としても、十分に満足な解析が可能であるという結論が得られた。

## 6. 結 論

本論文では、文献 4)、5) で提案し、微小変形塑性崩壊解析に用いた順応型 Shifted Integration 法 (ASI 法) を骨組構造の座屈崩壊問題に適用した。一般的な骨組構造の座屈解析アルゴリズムを構築するのに必要な情報を得るために、3 次はり要素を用いて梁柱部材の弾塑性座屈問題の有限要素解析を行い、座屈部材を解析するのに必要な最小限の要素数を 4 とした。骨組構造の座屈崩壊解析に対しては、微小変形塑性崩壊解析で精度の保証されている 1 部材 1 要素<sup>9,10)</sup> で解析をスタートし、解析過程で座屈の可能性があるとして判定された部材のみ 4 要素に自動細分化する計算アルゴリズムを開発した。さらに、平面および空間骨組構造の弾塑性座屈解析を行い、最小限の計算時間で満足な解が得られることを確認した。以上の手法を大規模骨組構造の座屈解析に用いる場合、大規模骨組構造では座屈する部材数の比率が小さくなることを考慮すると、ほとんどの部材が



(a) ASI technique with automatic resub-division (1 → 2)



(b) ASI technique with automatic resub-division (1 → 4)

Fig. 12 Elasto-plastic buckling analysis of a space frame

1 要素のままで解析が終了し、計算コストの大幅な削減につながることが予想される。また本アルゴリズムは、3 次はり要素を用いた既存の骨組非線形解析プログラムに容易にインプリメントすることができる。なお、動的崩壊問題に対する数値的研究は現在進行中である。

## 参 考 文 献

- 1) 都井：鋼構造の離散化極限解析，コンピュータによる極限解析法シリーズ 3，培風館，(1991)

- 2) 都井：骨組構造および回転対称シェル構造の有限要素解析における Shifted Integration 法について, 日本造船学会論文集, 第 168 号, (1990), 357-369
  - 3) Y. Toi : Shifted Integration Technique in One-dimensional Plastic Collapse Analysis Using Linear and Cubic Finite Elements, Int. J. Numer. Methods Eng., Vol. 31, (1991), 1537-1552
  - 4) 都井, 磯部：骨組構造の有限要素崩壊解析における順応型 Shifted Integration 法, 日本造船学会論文集, 第 171 号, (1992), 363-371
  - 5) Y. Toi and D. Isobe : Adaptively Shifted Integration Technique for Finite Element Collapse Analysis of Framed Structures, Int. J. Numer. Methods Eng., Vol. 36, (1993), 2323-2339
  - 6) 日本建築学会：鋼構造塑性設計指針, (1975), 119
  - 7) 日本建築学会：鋼構造座屈設計指針, (1980), 23
  - 8) 藤田, 吉田, 大勝：二軸曲げを受ける柱の弾塑性解析(その 3), 日本造船学会論文集, 第 129 号, (1971), 213-220
-