

繰返し荷重下の船体用構造材料の変形挙動と 強度特性に関する研究 (その1)

正員 冨田 康光* 正員 橋本 聖史*
正員 大沢 直樹* 正員 千秋 貞仁**

Study of Deformation Mechanism and Strength Characteristics of Ship Structural Materials
under Cyclic Loading Conditions (1st Report)

by Yasumitsu Tomita, *Member* Kiyoshi Hashimoto, *Member*
Naoki Osawa, *Member* Sadayoshi Chiaki, *Member*

Summary

On the bases of the assumption that certain materials can be typed as visco elastic-plastic bodies, a constitutive equation for the stress-strain response of such materials was derived. Then, the correlation was investigated between fatigue limit and the stress at the transition point, the point where the deformation mechanism of the material changed from visco elastic into visco elastic-plastic behavior.

Complete compression-to-tension load-controlled axial constant amplitude loading test program was performed for mild steel plane specimens. As a result, following two main points are obtained.

- 1) The constitutive equation derived from the visco elastic-plastic model can satisfactory represent cyclic stress-strain response.
- 2) Both fatigue limit and the stress at the transition point were obtained, and they were found to be almost identical.

1. 緒 言

繰返し荷重をうける材料の強度特性に関係する材料内部の物理現象を正しく理解し、それが巨視的変形挙動に及ぼす影響を推定できるようになれば、材料強度に関する種々の問題を解明するための大きな手がかりになる。

繰返し荷重を受ける金属材料の応力-歪応答は、応力レベルが大きくなるにつれて粘弾性的挙動から塑性的挙動への遷移をみせるが、この変化は、内部構造変化を伴わない可逆的変形機構から内部構造変化を伴う不可逆的変形機構へ支配的変形機構が交代することに対応すると解釈でき、この現象と材料の疲労被害発生に関連があることが推測できる。

本報告では、軟鋼の室温下低歪速度繰返し変形について、

疲労被害は転位線すべり変形の急増が原因で発生し、これに伴い巨視的変形が粘弾性挙動から塑性挙動へ遷移すると仮定して、一定荷重振幅繰返し荷重を受ける場合の実験事実が説明可能であるかを考察する。

実験における変形挙動の遷移の検知は、単軸正弦波応力を受けるときのヒステリシスループ特性を観測することで行う。また、遷移応力と定荷重疲労試験の疲労限を比較して、挙動遷移と疲労被害発生との関係の有無を検討する。

一方、微視的変形機構の仮定から巨視的変形挙動を予測する必要があるが、これは、熱力学理論により巨視的粘弾・塑性構成式を定式化することで行う。実験結果と比較検討するために構成式はヒステリシスループ特性を表現できるように定式化する。

2. 軟鋼 SM 41 B の室温下変形挙動の応力 ・歪構成式

2.1 用語、記号の定義

本章では、軟鋼 SM 41 B の室温下单軸繰返し荷重試験の応力・歪応答を記述する構成式の定式化を試みる。定式化に先立ち、以下で用いる用語、記号を定義しておく。

* 大阪大学工学部

** 運輸省船舶技術研究所

2.1.1 連続体近似スケールレベルの呼称

多結晶金属材料の連続体モデルによる取り扱いにおいて、材料をある寸法以下に無限に分割しても物性が不変であるとみなす寸法レベルを「極限分割寸法レベル」と定義する。この極限分割寸法レベルが

- (1) 構造部材要素の不連続形状の寸法のオーダー
- (2) 結晶粒、析出物の寸法のオーダー
- (3) 結晶構造、格子欠陥の寸法のオーダー

であるとき、(1)を「巨視的」、(2)を「局所的」、(3)を「微視的」なスケールレベルと命名する。また、各レベルの極限分割寸法の大さを占める微少部分を、そのスケールレベルの「極限微少部分」と定義する。

以下で、(3)の微視的レベルの変形機構の考察から、適当な近似を行って(1)の巨視的レベルの連続体モデルを導出する。

2.1.2 応力・歪の表記

2.1.1項で定義した各レベルの極限分割寸法より大きいスケールの不均一は、場の方程式の解として取り扱われる。各スケールレベルの応力場、歪場を以下に定義する。

(1) 巨視的スケールレベル

巨視的構造体内部の応力場、歪場は、第2種 Piola-Kirchhoff 応力 S 、Lagrange 歪 E で表す。以後、 S 、 E を「巨視応力」、「巨視歪」と呼ぶ。

(2) 局所的スケールレベル

巨視的極限微少部分内部の応力場、歪場は、以下で定義する「局所応力」 s 、「局所歪」 e で表す。

$$S_{ij} = \frac{1}{V_0} \int_{V_0} s_{ij} dV, E_{ij} = \frac{1}{V_0} \int_{V_0} e_{ij} dV \quad (1)$$

ここに、式(1)の V_0 は基準配置での巨視的極限微少部分体積、 dV は基準配置での局所的微少部分体積である。

巨視応力 S 、巨視歪 E は、巨視的極限微少部分内部の局所応力 s 、局所歪 e を平均化した量である。

(3) 微視的スケールレベル

局所的極限微少部分内部の力、変形の場合は、結晶格子点、格子欠陥、不純原子等に作用する力と各々の変位で与えられる。

局所応力 s 、局所歪 e は、局所的極限微少部分について微視的構成要素の力、変位を平均化した量を与えるテンソル場である。

2.2 微視的変形の素過程

金属学、固体物理学の分野で、金属の微視的変形機構に基づいて物理的変形過程を忠実に表現する構成式の研究が続けられている。

Ashby, Frost らによる“Deformation-Mechanism-Maps”¹⁾はその一例であり、各種金属について、単一の微視的非弾性変形機構により局所的極限微少部分全体が均一な剪断歪 γ_{local} を生じるときの、局所剪断応力 τ_{local} と局所剪断歪速度 $\dot{\gamma}_{\text{local}}$ の関係式 (Rate-Equation) を、絶対温度 θ

をパラメーターとして与えている。

SM 41 B の類似材料の Map によると、室温下では、低応力レベルで拡散流れ (Diffusional Flow) が、中高応力レベルでは転位線すべり (Dislocation Glide) が支配的非弾性変形機構であるとされており、各々の Rate-Equation は付録 A で与えられる。その関数形を以下に記す。

2.2.1 拡散流れ

付録 A 式(A 1)を整理して、

$$\dot{\gamma}_{\text{local}} = C_{\text{diff}} \frac{\tau_{\text{local}}}{\theta} \quad (2)$$

where,

γ_{local} : 局所剪断歪, τ_{local} : 局所剪断応力,

C_{diff} : 材料定数, θ : 絶対温度,

2.2.2 転位線すべり

α すべり系の転位線運動のみによる変形について、付録 A 式(A 2)を整理して、

$$\dot{\gamma}_{\text{local}}^{\alpha} = C_{\text{disl}} \exp \left\{ -\frac{K}{\theta} \left(1 - \frac{\tau_{\text{local}}^{\alpha}}{\tau_0^{\alpha}} \right) \right\}; \frac{K}{\theta} \gg 1 \quad (3)$$

where,

$\gamma_{\text{local}}^{\alpha}$: α すべり面局所剪断歪,

$\tau_{\text{local}}^{\alpha}$: α すべり面局所剪断応力,

C_{disl} , K : 材料定数, θ : 絶対温度,

τ_0^{α} : $\theta = 0^{\circ}\text{K}$ での転位線すべり臨界剪断応力

2.3 局所的スケールレベルの構成式

非弾性変形機構が2.2節であげた拡散流れ、転位線すべりであるとし、付録 B に示した Rice の Flow Potential 理論^{2),3),4)}を用いて局所応力 s と局所歪 e の構成式を定式化する。

2.3.1 局所的極限微少部分の変形についての仮定

局所応力 s 、局所歪 e で応力場、変形場を代表させる、結晶粒オーダーの寸法の局所的極限微少部分内で結晶方位、格子欠陥・不純原子分布は均一であると仮定する。

B.2 節 (付録 B) の “Continuum Slip Model” 近似²⁾を適用するために、

(1) 拡散流れによる変形は、有限個の均一剪断変形の和で表せる。

(2) 転位線すべりによる変形は、結晶の全すべり系に関する均一剪断変形の和で表せる。

と仮定する。さらに、

(3) 拡散流れと転位線すべりは相互に独立である。

と仮定する。

2.3.2 熱力学的状態変数、法線則

2.3.1 項の仮定(1)、(2)より、熱力学的状態変数 ξ_k を、

(1) 拡散流れによる均一剪断歪 $\gamma_{\text{disl}}^{\alpha} (\alpha=1, 2, \dots)$

(2) α 転位線すべり系による均一剪断歪 $\gamma_{\text{disl}}^{\alpha} (\alpha=1, 2, \dots)$

と選ぶ。式(B 9)より ξ_k の共役力 P_k はすべり系分解剪断応力の $|F_0|$ 倍 (F_0 は残留応力による変形勾配) で近似でき

る。状態変数 ξ_k と共役力 P_k を関係付ける現象方程式は 2.2 節の式(2), (3)の τ_{local} , τ_{local}^a を $P_k/|F_0|$ に置き換えて得られる。

分解剪断応力 τ_{diff} , τ_{diff}^a と局所応力 s_{ij} との関係は,

$$\begin{aligned}\tau_{diff} &= \mu_{ij}^s s_{ij}; \quad \mu_{ij}^s = \frac{1}{2}(n_i^s m_j^s + n_j^s m_i^s) \\ \tau_{diff}^a &= \mu_{ij}^a s_{ij}; \quad \mu_{ij}^a = \frac{1}{2}(n_i^a m_j^a + n_j^a m_i^a)\end{aligned}\quad (4)$$

where,

m^s : 拡散流れとすべり系すべり面単位法線ベクトル,

n^s : 拡散流れとすべり系すべり方向単位ベクトル

m^a : 転位線 α すべり系すべり面単位法線ベクトル,

n^a : 転位線 α すべり系すべり方向単位ベクトル

と与えられる。

2.3.3 Flow Potential

拡散流れと転位線すべりは相互に独立との仮定より, 2.3.2 項の(1), (2)の状態変数について各々の Flow Potential の有無を検討する。

(1) 拡散流れ

2.2.1 項式(2)より, 拡散流れとすべり系剪断応力のみが作用するときの状態変数変化率 $\dot{\gamma}_{diff}$ はすべり面剪断応力 τ^s の定数倍で与えられる。

現象方程式を得るために, 全ての拡散流れすべり系剪断応力が作用するときの $\dot{\gamma}_{diff}$ の表記が必要であるが, 別の拡散流れすべり系剪断応力の $\dot{\gamma}_{diff}$ への影響は τ_{diff} の影響より小さく, 高々一次の影響しか与えないと仮定すると,

$$\dot{\gamma}_{diff} = \sum_x L_{tx} P_{diff} = |F_0| \sum_x L_{tx} \tau_{diff}^s \quad (5)$$

where, L_{tx} : 材料定数
と線型現象方程式が成立する。よって, B.1 節の議論より局所的極限微少部分の拡散流れ変形の Flow Potential Ω_{diff}^{local} が存在し, 式(B 10)より

$$\begin{aligned}\Omega_{diff}^{local} &= \sum_{\xi} \left\{ \int_0^{|F_0| \tau_{diff}^s} \dot{\gamma}_{diff} d(|F_0| \tau_{diff}^s) \right\} \\ &= \sum_{\xi} \left\{ \int_0^{|F_0| \tau_{diff}^s} |F_0| \sum_x L_{tx} \tau_{diff}^s d(|F_0| \tau_{diff}^s) \right\} \\ &= |F_0|^2 \sum_{\xi} \left\{ \int_0^{\tau_{diff}^s} \sum_x L_{tx} \tau_{diff}^s d\tau_{diff}^s \right\} \\ &= |F_0|^2 \sum_{\xi, \eta} \mathcal{E}_{\xi\eta} \tau_{diff}^{\xi} \tau_{diff}^{\eta}\end{aligned}$$

where, $\mathcal{E}_{\xi\eta}$: 材料定数 (6)

と求まる。

(2) 転位線すべり

転位線すべりが Schmid 則に従うと仮定すれば B.3 節の議論より $\gamma_{disl}^a (\alpha=1, 2, \dots)$ について局所依存性が成立する。よって, 局所的極限微少部分の転位線すべり変形の Flow Potential Ω_{disl}^{local} が存在し,

$$\Omega_{disl}^{local} = \sum_{\alpha} \left\{ \int_0^{|F_0| \tau_{disl}^a} \dot{\gamma}_{disl}^a d(|F_0| \tau_{disl}^a) \right\}$$

$$\begin{aligned}&= \sum_{\alpha} \left\{ \int_0^{|F_0| \tau_{disl}^a} C_{disl} \exp \left\{ -\frac{K}{\theta} \left(1 - \frac{\tau_{disl}^a}{\tau_0^a} \right) \right\} \right. \\ &\quad \left. d(|F_0| \tau_{disl}^a) \right\} \\ &= C_{disl} |F_0| \sum_{\alpha} \left\{ \int_0^{\tau_{disl}^a} \exp \left\{ -\frac{K}{\theta} \left(1 - \frac{\tau_{disl}^a}{\tau_0^a} \right) \right\} d\tau_{disl}^a \right\} \\ &= \frac{C_{disl} |F_0| \theta}{K} \sum_{\alpha} \left\{ \exp \left\{ -\frac{K}{\theta} \left(1 - \frac{\tau_{disl}^a}{\tau_0^a} \right) \right\} \right. \\ &\quad \left. - \exp \left\{ -\frac{K}{\theta} \right\} \right\}\end{aligned}\quad (7)$$

と求まる。ここで室温下の軟鋼では式(3)の K/θ の値は極めて大きい値をとるので, 式(7)の Ω_{disl}^{local} は, 外部応力のない状態から, 何れかのすべり系で

$$F = \min(F^a) = 0, \quad F^a = 1 - \frac{\tau_{disl}^a}{\tau_0^a} \quad (8)$$

が成立するまでの間はほとんど零で, 式(8)が成立する応力のときのみ有限値をとり, さらに応力が増加すると無限大になる。

2.3.4 局所的構成式の定式化

(1) 拡散流れの局所非弾性歪速度

式(6)の Ω_{diff}^{local} の τ^s, τ^a に式(4)を代入し, 付録 B, B.1 節で述べた Flow Potential から非弾性歪速度を導く式(B 6)に代入して,

$$\begin{aligned}\dot{e}_{ij}^p \text{ diff} &= \rho_0 \frac{\partial \Omega_{diff}^{local}}{\partial s_{ij}} = \rho_0 \frac{\partial}{\partial s_{ij}} \left(|F_0|^2 \sum_{\xi, \eta} \mathcal{E}_{\xi\eta} \tau_{diff}^{\xi} \tau_{diff}^{\eta} \right) \\ &= \rho_0 \frac{\partial}{\partial s_{ij}} \left(|F_0|^2 \sum_{\xi, \eta} \mathcal{E}_{\xi\eta} \mu_{pq}^{\xi} \mu_{rs}^{\eta} s_{pq} s_{rs} \right) \\ &= \rho_0 |F_0|^2 D_{pq} s_{pq}\end{aligned}\quad (9)$$

where,

D_{pq} : 材料定数

が導かれる。よって, 線型粘弾性変形を示す。

(2) 転位線すべりの局所非弾性歪速度

局所的極限微少部分の転位線すべり変形が進行すると, 転位線, 障害物の再配置により臨界剪断応力の値が変化するが, その変化は, 内部状態変数である転位線すべり系剪断歪に依存し, 局所非弾性歪と, 局所非弾性歪の関数であるような変形履歴パラメータで表現できると考えるのが自然である。

簡単のため, 上の変形履歴パラメータを局所非弾性歪の線型同次式で表される一つのスカラーパラメータ κ で表す。このとき, 2.3.3 項(2)の式(8)で定義したスカラー値関数 F は, 局所応力 s , 局所非弾性歪 e^p , スカラーパラメータ $\kappa(e^p)$ を引数として書ける。

式(3)より $\dot{\gamma}_{disl}^a$ は τ_{disl}^a の単調増加関数であり, また, 式(7)の Ω_{disl}^{local} は式(8)の F が零の時のみ有限値をとり, $F < 0$ のとき $\Omega_{disl}^{local} = 0$, $F > 0$ のとき無限大である。よって, 付録 B, B.4 節で議論した場合に該当し, 式(B 16)~(B 19)より Ω_{disl}^{local} による非弾性歪速度は

$$\dot{e}_{ij}^p = \begin{cases} \Lambda \frac{\partial F(s_{ij}, e_{ij}^p, \kappa)}{\partial s_{ij}} \dot{s}_{ij} \geq 0 & \text{if } F=0 \text{ and } \frac{\partial F}{\partial s_{ij}} \dot{s}_{ij} \geq 0 \\ 0 & \text{if } F < 0 \text{ or } \frac{\partial F}{\partial s_{ij}} \dot{s}_{ij} < 0 \end{cases}$$

where,

$$\Lambda = G \frac{\partial F(s_{ij}, e_{ij}^p, \kappa)}{\partial s_{pq}} \dot{s}_{pq},$$

$$\frac{1}{G} = \left(\frac{\partial F(s_{ij}, e_{ij}^p, \kappa)}{\partial e_{mn}^p} + \Gamma_{mn} \frac{\partial F(s_{ij}, e_{ij}^p, \kappa)}{\partial \kappa} \right) \frac{\partial F(s_{ij}, e_{ij}^p, \kappa)}{\partial e_{mn}^p}$$

$$; F = F(s_{ij}, e_{ij}^p, \kappa), \kappa = \Gamma_{kl} e_{kl}^p \quad (10)$$

と導かれる。よって、加工硬化塑性を示す。 F は局所的極限微少部分の降伏関数である。

(3) 局所構成式

局所的極限微少部分の全非弾性変形機構による非弾性歪速度は、2.3.4項(1),(2)の歪速度の和として表される。局所弾性歪が局所応力 s_{ij} に線型で温度 θ に依存しないと仮定すると、式(9),(10)より、

$$\dot{e}_{ij} = M_{ijpq} \dot{s}_{pq} + \rho_0 |F_0|^2 D_{pq} s_{pq} + h \cdot G \frac{\partial F}{\partial s_{ij}} \frac{\partial F}{\partial s_{pq}} \dot{s}_{pq}$$

where, $h = \begin{cases} 1 & \text{if } F=0 \text{ and } \frac{\partial F}{\partial s_{ij}} \dot{s}_{ij} \geq 0 \\ 0 & \text{if } F < 0 \text{ or } \frac{\partial F}{\partial s_{ij}} \dot{s}_{ij} < 0 \end{cases} \quad (11)$

ここで、 M_{ijkl} は局所弾性係数である。

式(11)より、局所的極限微少部分の変形は、

- 可逆的な変形速度依存性のない変形
- 可逆的な変形速度依存性を有する変形
- 不可逆的な変形速度依存性のない変形

の線型結合として表される。各々を「局所弾性変形」「局所粘性変形」「局所塑性変形」と呼ぶことにする。

局所応力 s 、局所歪 e が、局所的極限微少部分の基準配置の基底ベクトル $\{e_1^{\text{local}}, e_2^{\text{local}}, e_3^{\text{local}}\}$ の e_1^{local} 方向成分のみ零でない値が許される単軸応力・歪状態で、局所弾性変形をばね、局所粘線変形をダッシュポット、局所塑性変形をスライダで模式化すると、Fig. 1の力学モデルで表すことができる。このモデルを“Local Unit Model”と呼ぶことにする。

2.4 巨視的スケールレベルの構成式

2.4.1 Taylorモデル近似による定式化 (サブレイヤーモデル)

軟鋼は多結晶体であり、巨視的スケールレベル極限微少部分は多数個の結晶粒を含む範囲となる。よって、各結晶粒が局所的極限微少部分に対応すると考えて考察する。

各結晶粒の力学的特性(方位、溶質原子分布密度、転位線分布、転位線障害物の分布等)は一般に異なるので、2.3節で定式化した式(11)の局所構成式の係数 M_{ijpq} 、 D_{pq} 、 $|F_0|$ 、 G 及び局所降伏関数 $F(s_{ij}, e_{ij}^p, \kappa)$ は結晶ごとに異

なる。このとき、巨視的極限微少部分内の局所歪、局所応力は変形の連続と力の平衡による拘束を受けるので各局所的極限微少部分(結晶粒)は互いに力学的に干渉し、巨視的応力 S と局所応力 s の関係は単純な線型同次式で表せない。

そこで、局所歪が巨視的極限微少部分全体で一定で、巨視的極限微少部分に含まれる $\Gamma=1, 2, \dots, N$ の結晶粒について

$$\dot{e}_{ij}^{\Gamma} = \dot{E}_{ij} \text{ in } V_0, \Gamma=1, 2, \dots, N \quad (12)$$

と仮定する Taylor モデル近似を行う。

このとき、局所応力、局所歪の定義式(1)、局所構成式(11)、および局所歪均一の仮定式(12)より、巨視的構成式は、

$$S_{ij} = \frac{1}{V_0} \int_{V_0} s_{ij} dV = \frac{1}{V_0} \sum_{\Gamma=1}^N s_{ij}^{\Gamma} \nu^{\Gamma}$$

$$\dot{e}_{ij}^{\Gamma} = \dot{E}_{ij}$$

$$= M_{ijpq}^{\Gamma} \dot{s}_{pq}^{\Gamma} + \rho_0 |F_0^{\Gamma}|^2 D_{pq}^{\Gamma} s_{pq}^{\Gamma} + h^{\Gamma} \cdot G^{\Gamma} \frac{\partial F^{\Gamma}}{\partial s_{ij}^{\Gamma}} \frac{\partial F^{\Gamma}}{\partial s_{pq}^{\Gamma}} \dot{s}_{pq}^{\Gamma}$$

where,

$$h^{\Gamma} = \begin{cases} 1 & \text{if } F^{\Gamma}=0 \text{ and } \frac{\partial F^{\Gamma}}{\partial s_{ij}^{\Gamma}} \dot{s}_{ij}^{\Gamma} \geq 0 \\ 0 & \text{if } F^{\Gamma} < 0 \text{ or } \frac{\partial F^{\Gamma}}{\partial s_{ij}^{\Gamma}} \dot{s}_{ij}^{\Gamma} < 0 \end{cases} \quad (13)$$

ν^{Γ} : 第 Γ 結晶粒の基準配置における体積

から s_{ij}^{Γ} を消去して求められる。

この構成式は巨視的応力 S 、歪 E 、および各局所的極限微少部分の局所応力 s 、局所歪 e が、巨視的極限微少部分の基準配置の基底ベクトル $\{e_1, e_2, e_3\}$ の e_1 方向成分のみ零でない値が許される単軸応力・歪状態では、各結晶粒を表す Fig. 1の Local Unit Model を並列に結合した Fig. 2の力学モデルで表せる。これは、Besseling⁵⁾が提案したサブ

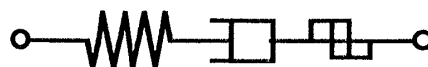


Fig. 1 Local Unit Model

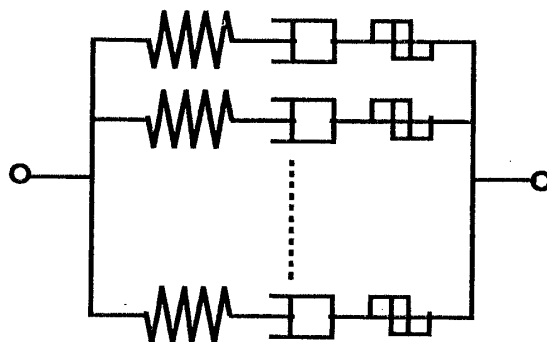


Fig. 2 Sublayer Model

レイヤーモデル (Sublayer Model) と同じものとなっている。

2.4.2 サブレイヤーモデルの応力・歪応答

2.4.1 節で定式化した式(13)のサブレイヤーモデルの構成式で規定される材料の挙動は以下の特性を示す。

(1) 全てのすべり系が活動していない場合

全局所的極限微少部分で局所弾性変形、局所粘性変形のみに生じ、巨視的に線型粘弾性体として挙動する。巨視的粘弾性変形特性は、各局所的極限微少部分の局所弾性特性、局所粘性特性と、巨視的応力の各局所的極限微少部分への分配率で決まり、すべり系が活動を始めるまでは変化しない。

局所粘性変形の総和が巨視的粘性変形として観測される。

(2) 少数のすべり系が活動を開始した場合

ある巨視的応力で、最初に分解剪断応力が臨界値に達したすべり系から転位線すべりによる局所塑性変形が生じる。

巨視的応力の各局所的極限微少部分への分配率が変化して巨視的粘弾性特性が変化する。

活動すべり系が少数で、局所塑性変形の総和である巨視的塑性変形が巨視的粘弾性変形と同程度であるうちは、巨視的に変形速度依存性を有し、かつ不可逆的な挙動を示す。

(3) 活動すべり系が急増した場合

応力レベルが上昇すると活動すべり系が急増して巨視的塑性変形が増大する。巨視的粘弾特性の変化はさらに進行するが、巨視的塑性変形が巨視的粘性変形より圧倒的に大きければ巨視的挙動はほとんど変形速度依存性を示さず、無視できる。

2.5 構成式の簡略化

2.5.1 単純重ね合わせ近似の採用

式(13)のサブレイヤーモデル構成式は、 $\Gamma=1, 2, \dots, N$ の各係数を適切に選ぶことで任意の挙動を表現できるが、複数の結晶粒をまとめて一つのユニットとして扱い、特性係数の数を制限しないと現実には解析が不可能である。この場合、

- ・ユニット数の決定方法に合理的基準がない。
- ・各ユニットの特性係数の決定が困難である。

といった問題を有する。

よって、

(1) 2.4.2 項(1)にあたる応力域で材料が線型粘弾性体と見做して粘弾性特性を定める。

(2) 2.4.2 項(3)にあたる応力域で、材料の全変形から(1)で計算される粘弾性変形を差し引いた変形が加工硬化塑性により生じたと見做して塑性変形特性を定める。

(3) (1), (2)で定めた特性が全応力域で不変とし、材料の変形は(1)による粘弾性変形と(2)による塑性変形の線型結合で計算する。

との手順で近似的に応答を解析することを考える。

このとき 2.4.2 項で述べたサブレイヤーモデルの応力・歪応答特性のうち 2.4.2 項(2)の現象の説明はできないが、軟鋼の室温下低歪速度変形ではこれに該当する応力範囲はごく狭く、粘弾性特性の変化は巨視的応答にほとんど影響しない。一方、上の近似により解析の困難さが大幅に軽減でき、手順(1), (2)の特性の同定には古典粘弾性学、古典塑性学の知見を流用できるので、本報告ではこの近似を採用する。

上の近似は、巨視的非弾性変形が時間依存 (クリープ) 変形、時間非依存 (塑性) 変形の線型結合で表せ、各々の特性が独立であるとする「単純重ね合わせモデル (Superposition Model)」に相当するので、以後「単純重ね合わせ近似」と呼ぶ。

2.5.2 単純重ね合わせ近似における特性の設定

(1) 粘弾性特性の表現

個々の結晶粒の粘弾性特性は異方性を示すが、ランダムな方位分布をもつ多数の結晶粒の集合体である多結晶体の全体的挙動は、処女材の場合は等方性を示すように定式化するのが適当である。文献6)に等方線型粘弾性体の構成式の微分表示が

$$\begin{aligned} p_0 S'_{ij} + p_1 \dot{S}'_{ij} + \dots &= q_0 E'_{ij} + q_1 \dot{E}'_{ij} + \dots \\ \bar{p}_0 S'_{kk} + \bar{p}_1 \dot{S}'_{kk} + \dots &= \bar{q}_0 E'_{kk} + \bar{q}_1 \dot{E}'_{kk} + \dots \end{aligned} \quad (14)$$

where, S' : 偏差応力, E' : 偏差歪

$p_0, p_1, \dots, q_0, q_1, \dots, \bar{p}_0, \bar{p}_1, \dots, \bar{q}_0, \bar{q}_1, \dots$: 材料定数
で与えられている。ここで、式(14)の係数の決定を容易にするためと、4章の材料試験で行う荷重制御試験の解析の際に応力増分に対する応答が容易に求められるよう、単軸状態で Voigt 型モデルに帰着する形式を選択する。よって、粘弾性挙動の構成式は、

$$\begin{aligned} p_0 S'_{ij} &= q_0 E'_{ij} + q_1 \dot{E}'_{ij} \\ \bar{p}_0 S'_{kk} &= \bar{q}_0 E'_{kk} + \bar{q}_1 \dot{E}'_{kk} \end{aligned} \quad (15)$$

where, S' : 偏差応力,

E^{ev} : 粘弾性歪, $E^{ev'}$: 粘弾性歪の偏差成分

$p_0, q_0, q_1, \bar{p}_0, \bar{q}_0, \bar{q}_1$: 材料定数

で近似する。

(2) 塑性特性の表現

加工硬化塑性特性は、巨視的な降伏関数、硬化則、移動則を適切に設定して近似する。本報では単軸状態のみ対象とするので、三次元応力状態での具体的形式は考えない。

2.5.3 単軸応力・歪状態の構成式

基準配置の基底ベクトル $\{e_1, e_2, e_3\}$ の e_1 の方向成分のみ応力、歪成分の零でない値が許される単軸応力・歪状態について 2.5.2 節で設定した特性の構成式を定式化する。

粘弾性挙動は、式(15)を単軸応力・歪状態に適用して

$$S_{11} = E \cdot E^{ev} + C \cdot \dot{E}^{ev} \quad (16)$$

where, E : ヤング率, E^{ev} : 粘弾性歪

で表す。

加工硬化塑性挙動については、本報告では完全両振り定荷重振幅試験のみ解析対象とするので、降伏関数、移動則を陽な形で扱わず、引張・圧縮とも応力の絶対値が一定値 S^y に達すると塑性変形を開始し、塑性変形中は相当応力・相当塑性歪が n 乗硬化則で関係するとして、

$$\dot{E}^p = \begin{cases} 0 & \text{if } F < 0 \text{ or } \dot{E}_{11} \dot{S}_{11} < 0 \\ \frac{1}{H} \dot{S}_{11} & \text{if } F \geq 0 \text{ and } \dot{E}_{11} \dot{S}_{11} \geq 0 \end{cases}$$

where,

$$F = (S_{11})^2 - (S^y)^2$$

$$H = A(E^p)^n; S_{11} = S^y + A(E^p)^n \quad (17)$$

E^p : 塑性歪, S^y : 塑性変形開始応力振幅

A, n : 材料定数

と表す。

単軸応力・歪状態の全体挙動は式(16), (17)と、2.5.1項の近似による変形の線型結合の式

$$E_{11} = E_{11}^e + E_{11}^p \quad (18)$$

で記述される。この材料の挙動は Fig. 3 の力学モデルで表せる。以後、式(16)～(18)で表される構成式を「(簡略化)粘弾・塑性構成式」と呼ぶ。

3. ヒステリシス特性

3.1 ヒステリシス特性に関する用語、記号の定義

単軸応力状態で、荷重軸方向に基底ベクトル e_1 をとって考える。材料に応力振幅 S_a の正弦波荷重を加えたときの公称応力と公称歪の時刻歴を記録し、横軸に公称歪の軸力方向成分 E_{11} , 縦軸に公称応力の軸力方向成分 S_{11} をとってリサージュ図を描いた図を(単軸公称応力-公称歪の)ヒステリシス線図と呼ぶ。特に、線図が閉じた定常ループをなすとき、以後これを「ヒステリシスループ」と呼ぶことにする。

付録Cに示すように、ヒステリシスループ面積は変形前単位体積あたりのエネルギー散逸に近似的に等しい。以後この単位体積当たりエネルギー散逸を「ヒステリシスエネルギー」と呼び、記号 D で表すことにする。また、ループの最大応力点 ($S_{11} = \pm S_a$) について割線係数 E^{sec} を Fig. 4 のように定義する。

荷重の応力振幅、負荷周波数による「ヒステリシスループ」の形状・寸法の変化、および「ヒステリシスエネルギー

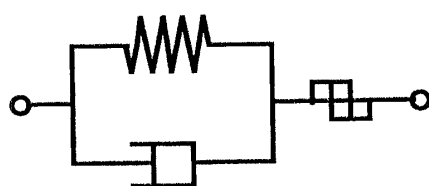


Fig. 3 Simplified Model

」の変化の様子を、以後「ヒステリシス特性」と呼ぶ。

3.2 ヒステリシス特性と構成式

単軸定振幅正弦波荷重試験のヒステリシス特性は、材料の構成式により異なる。以下にその例を示す。

3.2.1 線型粘弾性体

ループ形状は楕円形になる。加振周波数を一定に保って応力振幅を変化させると元の形状に相似な楕円ループとなり、面積は応力振幅の自乗に比例する。応力振幅一定のまま加振周波数を変化させると楕円の短径が変わる。

3.2.2 加工硬化塑性体

負荷開始後十分な回数の荷重を加え、ヒステリシスループが安定してから後の場合に限定して考察する。応力振幅が降伏応力を越える場合はループ形状に尖点を有する。このとき、加振周波数によりループ形状は変化しない。応力振幅を増加させると最大応力点での割線係数 E^{sec} が小さくなり、面積の比は応力振幅の自乗より大きい割合で増大する。

3.2.3 D- S_a 線図

Lazan⁷⁾ にならい、公称応力振幅 S_a とヒステリシスエネルギー D の関係を

$$D = J(S_a)^n \quad (19)$$

where, J, n : 材料定数

の形に整理すると、線型粘弾性体では $n=2$, 加工硬化塑性体では $n>2$ となる。 S_a と D の関係を両対数でグラフ化すると式(19)の指数 n の変化を図視化できる。この相関図を「D- S_a 線図」と呼ぶ。

3.3 粘弾・塑性構成式で規定される材料のヒステリシス特性

2章で提案した式(16)～(18)の粘弾・塑性構成式で規定される物質が単軸定振幅正弦波応力を受けたときのヒステリシス特性は、応力振幅 S_a と式(17)の塑性開始応力振幅 S^y の関係により以下の性質を示す。

(1) $S_a < S^y$ では線型粘弾性体として挙動する。よっ

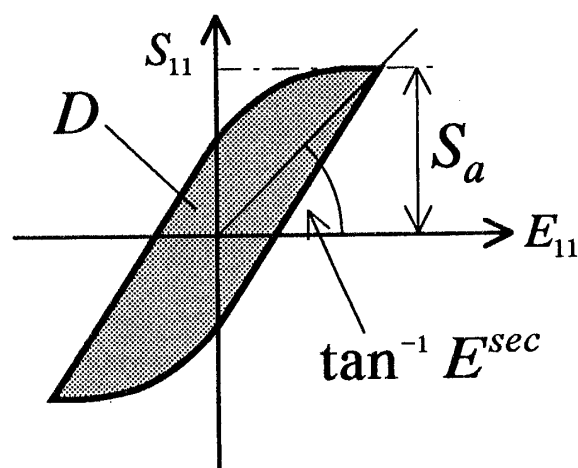


Fig. 4 Hysteresis Loop

て、3.2.1節よりヒステリシスエネルギー D の式(19)の指数 n は $n=2$ を保つ。係数 J は加振周波数により変化する。ループ形状は楕円形となる。

(2) S_a が S^y に達すると転位線すべりが活動を開始し、Fig. 3 の塑性ユニットが塑性変形を開始する。硬化則を n 乗硬化則で近似したので S_a が S^y に達した直後は塑性変形と粘弾性変形は同程度で、構成式(16)の弾性係数 E 、粘性係数 C は不変であるが、全変形を粘弾性変形と見做したときの特性が変化する。式(19)の指数 n が2より大きくなり、 J の周波数依存性に变化が生じる。ループ長径両端の曲率が小さくなり、 $S_a < S^y$ の楕円形と相似でなくなる。

(3) さらに S_a が大きくなると、活動すべり系が増えて粘弾性変形より塑性変形が圧倒的に大きくなり、加工硬化塑性体としての性質が支配的になる。よって、3.2.2節より式(19)の指数 n は $n > 2$ となり、 J は周波数によりほとんど変化しない。ループ形状に明瞭な尖点が現れ、負荷時と除荷時のループ曲率の差が顕著になる。

3.2.3節で定義した D - S_a 線図をこの粘弾・塑性体について作成すると、Fig. 5 のように表せる。図の変曲点より、塑性変形が支配的になる遷移応力振幅 S_t が定義できる。

室温下の軟鋼 SM 41 B の塑性変形は、塑性変形開始応力 S^y を僅かに上回ると急激に増大するので、遷移応力振幅 S_t は塑性変形開始応力 S^y とみなすことができる。

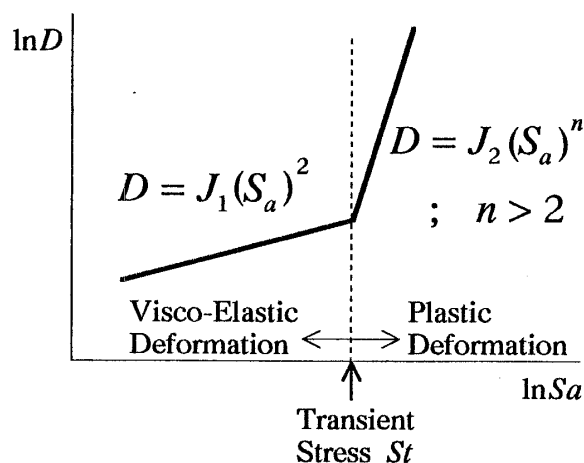


Fig. 5 Hysteresis Energy Characteristics of Visco Elastic-Plastic Model

Table 1 Chemical Compositions of SM41B (%)

C	Si	Mn	P	S
0.12	0.23	0.98	0.015	0.012

Table 2 Mechanical Properties of SM41B

Yield Point [MPa]	Tensile Strength [MPa]	Elongation [%]
304	441	34

4. 軟鋼 SM 41 B 室温下单軸正弦波荷重試験のヒステリシス特性

4.1 供試材および試験方法

供試材は軟鋼 SM 41 B である。材料の化学成分、機械的性質を Table 1, Table 2 に示す。試験片は公称板厚 19 mm の平板から加工したもので、形状は平滑丸棒試験片 WES 162-3 号である。試験片形状を Fig. 6 に示す。

室温下で容量 10 ton の電気・油圧サーボ式疲労試験機により応力振幅 49~235.2 MPa (5~24 kgf/mm²)、周波数 1 Hz の完全両振り定振幅正弦波荷重を試験片に加え、試験機ロードセル出力と試験片平行部中央の歪の時系列データを AD 変換器で荷重一周あたり 200 点、50 周期分集録した。歪は、ゲージ長 5 mm の歪ゲージにより測定した。

ヒステリシス特性を知るためには応力と歪の位相差を精密に測定する必要があるため、以下の対策を施した。

(1) ロードセル、歪ゲージの出力は同一型式のゲージアンプにより増幅させ、アンプによる位相誤差を相殺させた。

(2) 信号処理系のノイズフィルタによる位相遅れを防止するため、ノイズフィルタを用いず、50 周期分のデータを平均化してノイズを除去した。

(3) ロードセル出力信号にロードセルから歪測定部までの弾性波到達時間を補正したものを歪測定断面荷重の信号とし、これを変形前断面積で割って公称応力として記録した。

一方、歪ゲージ出力を公称歪として記録した。

4.2 供試材の定荷重疲労試験結果

著者らは同一供試材、同一試験片について定荷重疲労試験を行い、疲労限 S_{FR} 、各応力振幅に対する最終寿命 N_f の値を得ている⁸⁾。それによると、荷重制御定荷重疲労試験により破断寿命 $N_{f0} = 2 \times 10^6$ に対する応力振幅として求めた疲労限 S_{FR} は

$$S_{FR} = 21.5 [\text{kgf/mm}^2] = 210.7 [\text{MPa}] \quad (20)$$

であり、応力振幅 S_a と破断寿命 N_f の関係式は

$$\begin{aligned} S_a &= 53.29 \times N_f^{-0.0629} [\text{kgf/mm}^2] \\ &= 522.2 \times N_f^{-0.0629} [\text{MPa}] \end{aligned} \quad (21)$$

で与えられる。

4.3 ヒステリシス特性の実験結果

4.3.1 ヒステリシスループ形状

ループ形状変化の特性は S_a の大きさによって異なる傾

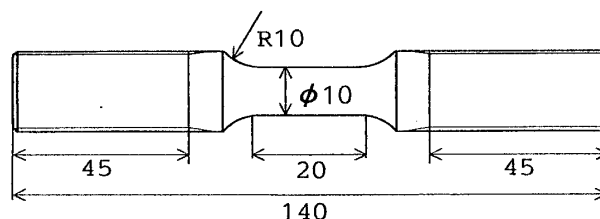


Fig. 6 Size and Shape of Specimen

向を示した。

(1) $S_a < 180$ MPa のときループは楕円形であった。 S_a が変化すると相似な形状のまま S_a の変化に比例した寸法に変化した。

(2) S_a が 180 MPa を超えると, S_a の増大につれて楕円ループ長径両端部が徐々に尖り始めた。

(3) $210 \text{ MPa} \leq S_a$ のときループは明瞭な尖点を有し, 負荷時と除荷時の曲率の差が明瞭になった。 S_a の増大によるループ変形は形状の相似性を保たず, 最大応力点での割線係数 E^{sec} は S_a が大きいほど値が小さくなった。

Fig. 7 にループ形状の例を示す。

4.3.2 荷重繰返し数効果特性

荷重繰返し数 N によるヒステリシスエネルギー D , 最大応力点での割線係数 E^{sec} の変化を測定したところ, 応力振幅 S_a の大きさにより特性に変化がみられた。

(1) $S_a \leq 180$ MPa の場合, 繰返し数 N による D, E^{sec} の顕著な変化はなかった。

(2) $S_a = 180 \text{ MPa} \sim 210 \text{ MPa}$ の場合, 繰返し数 N につれて D, E^{sec} の値が減少し, N が約 10 万回を超えると概

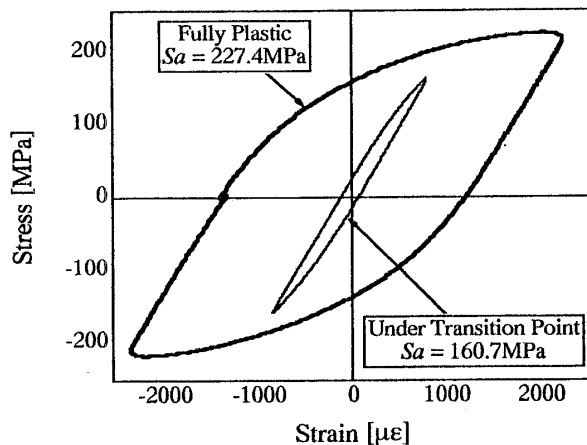


Fig. 7 Sample of Measured Hysteresis Loop.

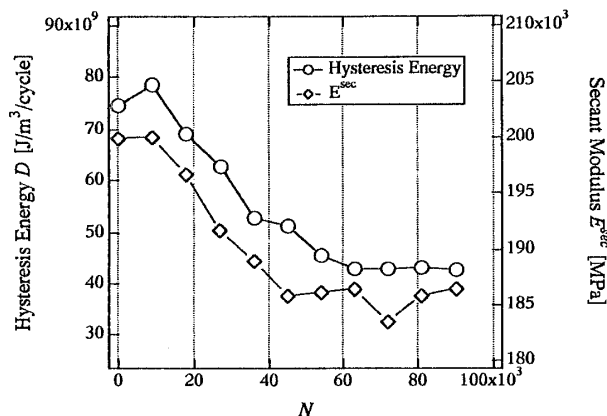


Fig. 8 Effect of Loading History on Secant Modulus and Hysteresis Energy

ね一定となった。この N は疲労限 S_{FR} を規定した破断寿命 $N_{f0} = 2 \times 10^6$ の約 5% にあたる。

(3) $S_a > 210$ MPa の場合, 繰返し数 N につれて D の値は増大し, E^{sec} の値は減少した。 N が式(21)で求まる最終寿命 N_f の 5% を超えると D, E^{sec} の値は概ね一定となった。

上の(2)の場合にあたる $S_a = 210$ MPa での N と D, E^{sec} の関係を Fig. 8 に示す。

4.3.3 応力振幅効果特性

軟鋼 SM 41 B の室温下单軸定荷重試験の応力振幅 S_a とヒステリシスエネルギー D の関係をまとめた結果を Table 3 に, D - S_a 線図を Fig. 9 に示す。

ここで, 4.3.2 節の荷重繰返し数効果特性を考慮して, 式(21)から求まる N_f を用い,

(1) $S_a < 180$ MPa では $N_0 \approx 1000$

Table 3 Hysteresis Energy per Cycle versus Stress Amplitude (Constant Amplitude Loading)

S_a [MPa]	D [J/m³/cycle]
55.9	2.744E+02
84.3	5.978E+02
94.1	7.448E+02
103.9	9.016E+02
113.7	1.078E+03
122.5	1.274E+03
132.3	1.470E+03
142.1	1.666E+03
150.9	1.862E+03
160.7	2.156E+03
170.5	2.548E+03
180.3	3.038E+03
189.1	3.822E+03
199.9	4.900E+03
227.4	1.176E+04

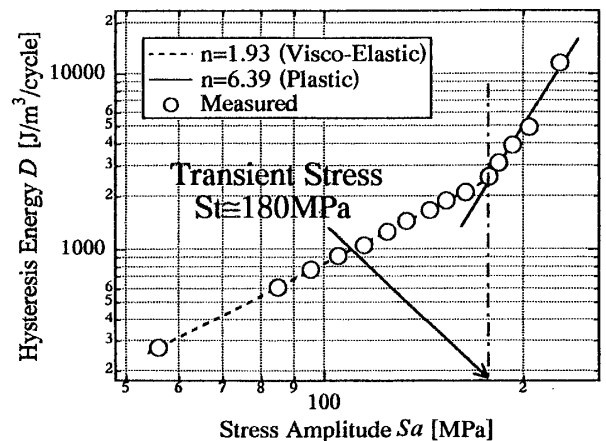


Fig. 9 Hysteresis Energy per Cycle versus Stress Amplitude Diagram of SM41B (Constant Amplitude Loading)

(2) $S_a=180\text{ MPa}\sim 210\text{ MPa}$ では $N_0=1\times 10^5$

(3) $S_a>210\text{ MPa}$ では $N_0=0.05\times N_f$

で定める N_0 回の荷重を負荷してから D を測定した。

実験結果を式(19)に回帰させた計算結果は、 $S_a<180\text{ MPa}$ では $n=1.93$ となり D が S_a の自乗に概ね比例するが、 $180\text{ MPa}<S_a$ では $n=6.39$ となり S_a の増加につれ D が急激に増大することが示されている。

5. 考 察

ある疲労・破壊現象と関係する微視的変形機構を正しく選択し、それに基づいた応力-歪応答構成式の定式化を適切に行えば、実験的に同定した構成式特性係数から強度特性と関係する内部の物理現象の様子を推定することが可能になる。

このような物理現象と変形挙動パラメータを見つけるためには、以下の手順が考えられる。

(1) 考察する強度特性と関係する各種微視的変形機構の選定とその機構・相互作用の力学的モデル化を行なう。

(2) (1)の微視的モデルを基に巨視的構成式を定式化して微視的・巨視的変形挙動を予想する。

(3) (2)の予想結果と、実験結果を比較検討し、定式化の妥当性を判定する。その際、得られた巨視的構成式が強度特性と関係する変形挙動特性を正しく表すことが最低限必要となる。

本報告では、軟鋼の疲労限の物理的意味を考察する目的で、転位線すべり変形急増と、その巨視的変形挙動特性への影響を、上の手順で考察する。

5.1 本報告で考察対象とする物理現象と対応する変形挙動

Lazan⁹⁾は各種金属のヒステリシス特性実験結果を D - S_a 線図にまとめ、ある応力振幅で線図に鋭い折曲がりが生じることを認め、これが非弾性変形機構が内部構造変化を伴わない可逆的なものから内部構造変化を伴う不可逆的なものへの遷移であると解釈した。

一方、残存(固執)すべり帯(PSBs)等の疲労転位組織の形成が疲労被害発生の必要条件とされる⁹⁾が、この条件はある大きさの負荷応力のもとで疲労転位組織を形成するのに必要な量の転位線運動が発生して初めて成立する。

よって、 D - S_a 線図の折曲がりを生じさせる不可逆的非弾性変形機構が、ある一定量以上の転位線すべりであると仮定すると、疲労限と D - S_a 線図遷移応力振幅に深い関係があると予測できる。

4.3.3項のSM 41 B室温下変形実験結果の D - S_a 線図 Fig. 9 をみると、 $S_t\cong 180\text{ MPa}$ を境に上述の遷移が確認できる。さらに、3.3節の考察と実験結果のループ形状特性・応力振幅効果特性を比較すると、軟鋼の室温下低歪速度変形のヒステリシス特性は、 $S_a<S_t$ で粘弾性体、 $S_a>S_t$ で加工硬化塑性体の特性に一致する。

本報告では、軟鋼の室温下低歪速度変形では、転位線すべり変形の急増が疲労被害発生に関係しており、これにより巨視的変形の粘弾性挙動から塑性挙動への遷移が生じると仮定する。

2章で、軟鋼の室温下変形の支配的微視的変形素過程を拡散流れと転位線すべりと仮定し、熱力学理論を用いて粘弾性特性・塑性特性を統一的に扱える巨視的粘弾・塑性構成式を定式化した。これは、転位線すべり変形急増が巨視的変形挙動に与える影響を解析する目的で提案したものである。

以下で、上の仮定に基づく推論で、定荷重疲労試験、ヒステリシス特性試験の実験結果を説明できるか否かを検討する。

5.2 構成式の妥当性の検討

5.1節より、2章で提案した構成式は転位線すべり変形急増を考慮し、その影響が巨視的変形の粘弾性挙動から塑性挙動への遷移として表現されるものでなければならぬ。以下で、2章の議論の各段階について検討する。

5.2.1 微視的変形機構の仮定

金属学の研究成果を用いて行った2.2節の仮定は、5.1節で疲労被害発生と関係する微視的変形機構として仮定した転位線すべりを支配的変形機構のひとつとして採用し、その性質を式(3)で一定応力レベルで変形量が急激に増大するように設定している。よって、仮定は考察対象について妥当であったと判断できる。

5.2.2 局所構成式定式化手順

2.3節では、局所的極限微少部分内の個々の種類の微視的変形を Continuum-Slip 近似により均一局所剪断歪に平均化して状態変数とし、Flow Potential の存在を仮定して定式化した。以下でこの手順の妥当性を検討する。

(1) 拡散流れ変形

結果的に、2.3.3項式(5)の線型現象方程式が導かれた。

拡散流れの変形量は微少であることと、変形量が微少な機構を代表する状態変数の現象方程式は線型同次式で近似できるとの先験的知見から、2.3節の取扱いで十分であったと判断できる。

(2) 転位線すべり変形

局所的極限微少部分に Schmid 則を成立させなくするような内部組織が形成された場合2.3.3項の局所依存性の仮定が問題となる。

しかし、複合物質を構成する各要素の変形の状態変数が Flow Potential を持つときは、個々の状態変数を物体全体で平均化して得られる状態変数も Flow Potential を持つとされる⁴⁾ことから、Continuum-Slip 近似を行う部分が内部組織を含んでも、転位線すべりを表す均一剪断歪について、Flow Potential が存在するとの仮定は許される。

また、Rate-Equation 式(3)は均一変形する部分が複数の結晶粒から成る場合も含め適用できる近似式として与え

られており、関数形はそのまま使用できると思われる。

以上より、2.3節の手法は焼き鈍し直後の処女材の状態から、疲労転位組織形成後まで適用可能であると判断できる。ただし、式(11)の特性係数は不可逆的(塑性)変形の蓄積による内部組織変化を反映して変化させる必要がある。

また、2.3節の議論より得られた局所構成式(Local Unit Model)式(11)は、一定応力レベルを境に局所変形が線型粘弾性挙動から加工硬化塑性挙動に遷移する。これは、5.1節で疲労被害発生開始の巨視的変形挙動に与える影響として予測した現象と同じ特性である。

以上より、2.3節の定式化は本報告の考察対象について妥当であったと判断できる。

5.2.3 巨視的構成式定式化手順

2.4.2項の議論より、2.4節のTaylorモデル近似による定式化で得られた巨視的構成式(サブレイヤーモデル)式(13)は、本報告考察対象について予測される巨視的変形挙動である粘弾性から塑性への遷移を定性的に説明できる。よって、本報告の考察対象範囲については、2.4節の定式化で十分であったと判断できる。

しかし、式(13)の定量的検討を行うには、2.5.1項で指摘したように平均化処理により特性係数を集約的に扱わざるを得ない。

5.2.4 簡略化粘弾・塑性構成式

本報告で考察対象とする巨視的変形挙動は、 D - S_a 線図の折れ曲がり、遷移点以下の粘弾性挙動及び遷移点以上の塑性挙動であるが、3.3節で示したように、2.5.3項で導いた式(16)~(18)の簡略化構成式でこれらの挙動の説明が可能である。

この簡略化粘弾・塑性構成式は、

(1) 2.5.1項で「単純重ね合わせ」近似を行ったので、粘弾性から塑性への遷移の過渡現象が表現できない。

(2) 2.5.3項で、単軸一定荷重振幅完全両振り試験のみ解析対象とし、硬化法則を直接規定せずに塑性変形開始応力と n 乗硬化則によって塑性挙動を近似した。このため、変動荷重の取扱いはできない。といった制限をうける。

しかし、強度特性を反映する変形挙動パラメータは、考察対象の物理現象の影響を必要十分に表現できればなるべく容易に同定できるものであることが望ましい。

よって、本報告での考察の対象範囲では、上の簡略化構成式による取り扱いで十分であったと考えられる。

5.2.1~5.2.4項の議論より、2章で定式化した構成式は、本報告で考察対象とする物理現象と巨視的変形挙動を解析するモデルとして妥当なものであったと判断できる。

5.3節では、この構成式によりヒステリシス特性のシミュレーションを行い、実験結果との定量的比較を行う。

5.3 粘弾・塑性構成式によるヒステリシスエネルギー特性のシミュレーション

式(16)~(18)の粘弾・塑性構成式により、軟鋼SM41Bのヒステリシスエネルギー特性のシミュレーションを行い、実験結果と比較検討する。

5.3.1 遷移応力振幅 S_t の決定

軟鋼SM41Bを2.5.3項式(16)~(18)の構成式で規定される粘弾・塑性体と見なしたとき、3.3節で定義した粘弾性挙動から塑性挙動への遷移応力振幅 S_t の値は、実験結果の D - S_a 線図 Fig. 9より $S_t=180$ MPaと求められる。

5.3.2 特性係数の決定

式(16)~(18)の特性係数 E , C , A , n , S^y を以下の手順により決定する。

(1) ヤング率 E

供試材定格値 2.058×10^5 MPa ($=2.1 \times 10^4$ [kgf/mm²]) を使用する。

(2) 粘性係数 C

ヤング率 E , 粘性係数 C のVoigt型粘弾性体が応力振幅 S_a , 周波数 f の正弦波形応力を受けるときの一周・単位体積当り減衰エネルギー D_v を計算し、これを C について解くと、

$$C = \frac{1}{4\pi f} \left\{ \frac{\pi S_a^2}{D_v} - \sqrt{\left(\frac{\pi S_a^2}{D_v} \right)^2 - 4E^2} \right\} \quad (22)$$

を得る。

4.3.3節 Table 3の粘弾性域 ($S_a < 180$ MPa) での D , S_a 実験値と $f=1.0$ Hz を式(22)に代入して C を計算し、その平均値を構成式の粘性係数 C の値として用いる。

(3) 塑性開始応力振幅 S^y

3.3節の考察より、5.3.1項で求めた遷移応力振幅 S_t の値 180 MPa を S^y の値として用いる。

(4) 硬化係数パラメータ A , n

塑性域 ($S_a > 210$ MPa) の応力・歪時刻歴実験データから応力 S_{11} , 歪 E_{11} を読み取り、(1), (2)で定めたヤング率 E , 粘性係数 C と応力 S_{11} を用いて式(16)により粘弾性歪 E_{11}^v を求め、 E_{11} から E_{11}^v を差し引いて塑性歪 E_{11}^p を計算し、 S_{11} と E_{11}^p のデータから最小2乗法により式(17)の A , n を決定する。

5.3.3 シミュレーションの計算方法

以下の手順を繰返して応力 S_{11} , 歪 E_{11} の時刻歴を計算する。

(1) 時間刻 Δt を荷重周期 T の $1/200$ とし、第 n 時間ステップの応力 S_{11} , 応力速度 $\dot{S}_{11}$ を

$$\begin{aligned} S_{11} &= S_a \sin(2\pi f \cdot n \Delta t), \\ \dot{S}_{11} &= 2\pi f \cdot S_a \cos(2\pi f \cdot n \Delta t) \end{aligned} \quad (23)$$

とおく。この時刻での粘弾性歪 E_{11}^v , 塑性歪 E_{11}^p の値は前時刻で求められているものとする。

(2) 現時刻の応力 S_{11} , 粘弾性歪 E_{11}^v から式(16)により粘弾性歪速度 $\dot{E}_{11}^v$ を求め、現時刻の応力 S_{11} , 応力速度

$\dot{S}_{11}$ から式(17)により塑性歪速度 $\dot{E}_p$ を求める。

(3) (2)で求めた歪速度 $\dot{E}_p$, $\dot{E}_p$ より Euler 法により次時刻の粘弾性歪 E_p , 塑性歪 E_p を計算し, 式(18)より次時刻の全歪 E_{11} を計算する。

計算した応力・歪時刻歴のヒステリシスループが安定したら, 荷重一周期について

$$\sum S_{11} \dot{E}_{11} \Delta t \quad (24)$$

を加算して, ヒステリシスエネルギー D とする。

5.3.4 計算結果と実験結果の比較

粘弾・塑性構成式によるヒステリシスエネルギーのシミュレーション結果と実験結果の比較を Fig. 10 に示す。両者は良好な一致を示している。この結果より, 式(16)~(18)の粘弾・塑性構成式は軟鋼 SM 41 B のヒステリシスエネルギー特性を精度良く表せることがわかる。

5.4 遷移応力振幅と疲労限応力の相関

5.3.1 項で実験的に求めた粘弾性挙動から塑性挙動への遷移応力振幅 S_t は, 転位線すべり変形量の急増がヒステリシスエネルギー特性の変化として表れる応力レベルと解釈される。

実験結果 Fig. 9 より得られた S_t の値を 4.2 節の定荷重疲労試験による疲労限 S_{FR} と比較すると, 両者の値はかなり近く, 5.1 節で仮定したように両者に関係があると判断できる。 S_t の値は S_{FR} の値の約 85% であったが, S_{FR} は有限寿命 (2×10^6) について定義されたもので, 無限寿命について定まる真の疲労限はより S_t に近い値となると推測できる。

一方, 5.1 節で疲労被害発生には一定量以上の転位線すべり変形が必要と推定したが, 疲労被害を与えるのに必要な量より少ない転位線すべり変形が発生した段階で S_t として観測されと考えれば, 両者の大小関係が説明可能である。Lazan⁷⁾ も, D - S_a 線図の屈曲点は疲労限よりわずかに低い応力振幅で観察されたと報告している。

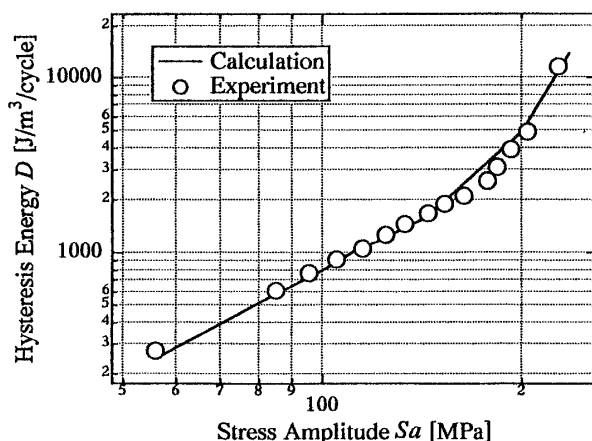


Fig. 10 Comparison between Hysteresis Energy from the Experiment and that Calculated

5.5 まとめ

5.2~5.4 節の議論より, 「軟鋼の疲労被害は転位線すべり変形の急増により発生し, 巨視的変形の粘弾性挙動から塑性挙動への遷移からこの現象を察知できる」という 5.1 節の仮定によって, 本報告で考察対象とした事象の実験事実の合理的説明が可能であったとみなせる。よって, 上述の仮定は妥当なものであったと判断できる。

また, 巨視的変形の遷移応力レベルを知る手段として, D - S_a 線図が有効であることが確認できた。

5.6 今後の課題

5.2.4 項(2)で述べたように, 本報告で定式化した構成式は, 単軸一定荷重振幅完全両振り試験のみを想定し, 変動荷重下の解析には使用できない。今後対象範囲を変動荷重下の挙動に拡張するためには, 硬化法則, とくに移動硬化による背応力の変化を適切に規定する必要がある, その際は材料定数の荷重履歴特性について検討する必要がある。

巨視的変形挙動の荷重履歴による変化は, 本来は荷重履歴に伴う内部構造変化を反映するよう局所構成式から結晶塑性学等の手法で導びかれるべきであるが, 本報告での取扱いを延長して対応する場合は, 実験的に同定される特性係数の変化を現象論的に取り扱うアプローチをとることになる。

さらに, 塑性変形進行に伴う異方性の取り扱いも課題として残る。

6. 結 言

軟鋼の室温下低歪速度繰返し変形について, 疲労被害は転位線すべり変形の急増が原因で発生し, これに伴い巨視的変形が粘弾性挙動から塑性挙動へ遷移すると仮定し, この仮定により一定荷重振幅を受ける場合の強度特性・応力-歪応答に関する実験事実を説明可能であるかについて考察した。

考察にあたって, Ashby らの金属の微視的変形機構に関する研究をもとに, Rice の Flow Potential 理論を用いて局所構成式を導出し, Taylor モデル近似により多結晶体の構成式の一般形を考え, さらに, 単純重ね合わせ近似と構成式の簡略化を行って単軸完全両振り定荷重振幅試験のヒステリシス特性を解析できる粘弾・塑性構成式を定式化した。

一方, 室温下の軟鋼 SM 41 B について, 単軸定荷重振幅正弦波形荷重試験のヒステリシス特性を測定して同一材料・同一試験片の定荷重疲労試験結果と比較し, 変形挙動の遷移応力と疲労限の関係を考察を加えた。

さらに, 定式化した粘弾・塑性構成式によるヒステリシスエネルギー特性のシミュレーション結果と実験結果を比較検討した。

本報告により得られた結論は, 以下の通り要約できる。

(1) 金属材料の変形挙動が粘弾性挙動から塑性挙動へ遷移する応力レベルを検出する手段としてヒステリシスループの測定から求める D - S_a 線図が有効であることが確認できた。

(2) 軟鋼 SM 41 B が室温下で定荷重振幅繰返し荷重を受けるときの変形は、 $S_t \cong 180$ MPa 以下の応力では線型粘弾性、それ以上の応力では加工硬化塑性で表現できる。

(3) (2) の遷移応力レベルは、定荷重疲労試験における $N=2 \times 10^6$ についての疲労限よりわずかに小さい値であった。

(4) 軟鋼の室温下低歪速度変形の支配的微視的変形機構が拡散流れと転位線すべりであると仮定して定式化した粘弾・塑性構成式は、変形挙動の粘弾性から塑性への遷移を説明可能であり、ヒステリシスエネルギー特性のシミュレーション結果は実験結果と良好な一致を見せる。

(5) 本報告の「軟鋼の疲労被害は転位線すべり変形の急増により発生し、巨視的変形の粘弾性挙動から塑性挙動への遷移からこの現象を察知できる」との仮定は、一定荷重振幅繰返し荷重下の本報告で検討対象とした範囲の強度特性・応力-歪応答に関する実験事実を説明可能である。

参 考 文 献

- 1) M. F. Ashby and H. J. Frost: "Deformation-Mechanism Maps, Pergamon, 1982, pp. 6-16.
- 2) J. R. Rice: "On the Structure of Stress-Strain Relations for Time-Dependent Plastic Deformation in Metals", Trans ASME, Ser. E, Vol. 37 (1970), pp. 728-737.
- 3) J. R. Rice: "Inelastic Constitutive Relations for Solids: An Internal-Variable Theory and its Application to Metal Plasticity", J. Mech. Phys. Solids, Vol. 19 (1971), pp. 433-455.
- 4) J. R. Rice: "Continuum Mechanics and Thermodynamics of Plasticity in Relation to Microscale Deformation Mechanisms", Constitutive Equations in Plasticity (ed. by A. S. Argon), The MIT Press, 1975, pp. 23-80.
- 5) J. F. Besseling: "A Theory of Elastic, Plastic, and Creep Deformations of an Initially Isotropic Material Showing Anisotropic Strain-Hardening, Creep Recovery, and Secondary Creep" Trans. ASME, Ser. E, Vol. 25 (1958), pp. 529-536.
- 6) 村上澄男: "粘弾性体の構成式", 固体力学の基礎 (日本材料学会編), 日刊工業新聞社, 1981, p. 138.
- 7) B. J. Lazan: "Damping of Materials and Members in Structural Mechanics", Pergamon Press, 1968, pp. 24-28, pp. 79-82.
- 8) 八木順吉, 富田康光, 橋本聖史, 他: "ランダム荷重下での疲労挙動に関する研究 (第 1 報)", 日本造船学会論文集, Vol. 152 (1982), pp. 341-351.
- 9) 例えば, M. Klesnil and P. Lukas: "Fatigue of Metallic Materials", Elsevier Scientific Publ., 1980 (荒木, 堀部訳, "金属疲労の力学と組織学",

1984, p. 145).

付録 A Rate-equation

Ashby¹⁾ で, SM 41 B 室温下変形の主要非弾性変形素過程となる微少変形機構の Rate-Equation が以下のとおり与えられている。

A.1 拡散流れ Diffusional Flow

$$\dot{\gamma}_{\text{local}} = C_{\text{diff}} \frac{\dot{\gamma}_{\text{local}}}{\theta}; C_{\text{diff}} = \frac{42\nu}{k_{\text{diff}} d^2} D_{\text{eff}} \quad (\text{A } 1)$$

where,

$\dot{\gamma}_{\text{local}}$: 局所剪断歪, $\dot{\gamma}_{\text{local}}$: 局所剪断応力,

k_{diff} : 材料定数, ν : 原子体積,

d : 結晶粒径, θ : 絶対温度, D_{eff} : 有効拡散係数

A.2 転位線すべり Dislocation Glide

軟鋼の転位線運動の障害力は, C 原子等の点障害物の抗力が最も大きいとして, α すべり系の運動による変形について,

$$\dot{\gamma}_{\text{local}}^{\alpha} = \dot{\gamma}_0 \exp \left\{ -\frac{\Delta F}{k_{\text{disl}} \theta} \left(1 - \frac{\dot{\gamma}_{\text{local}}^{\alpha}}{\dot{\gamma}_0^{\alpha}} \right) \right\} \\ ; \Delta F = 0.5 G b^3, \dot{\gamma}_0^{\alpha} = \frac{G b}{l} \quad (\text{A } 2)$$

where,

$\dot{\gamma}_{\text{local}}^{\alpha}$: α すべり面局所剪断歪,

$\dot{\gamma}_{\text{local}}^{\alpha}$: α すべり面局所剪断応力,

k_{disl} : 材料定数, θ : 絶対温度,

G : 剪断弾性係数, $\dot{\gamma}_0$: 定数 ($=1.0 \times 10^6$ [1/s]),

ΔF : 転位線が熱的励起なしで障害物を突破するための自由エネルギー,

$\dot{\gamma}_0^{\alpha}$: $\theta=0^\circ\text{K}$ での α 転位線すべり系臨界剪断応力,

b : バーガーズベクトル長, l : 障害物間隔

ここで, 室温下の軟鋼では, 式 (A 1) の $\Delta F/(k_{\text{disl}} \theta)$ の値は非常に大きいとされる。

付録 B Rice の Flow Potential 理論

B.1 Flow Potential

客観的原理を満足する熱力学的単純体が準静的過程をとって非弾性変形を生じるときを考える。

変形の過去履歴が n 個のスカラーパラメータ $\xi_k (k=1, 2, \dots, n)$ で表されるとき, Lagrange 歪 E_{ij} と ξ_k を熱力学的状態変数にとれば, S_{ij} を第 2 種 Piola-Kirchhoff 応力, f を Helmholtz 自由エネルギー密度として, $(1/\rho_0) S_{ij}$, $-\partial f / \partial \xi_k$ が共役な熱力学的力となる。 ξ_k の共役力 P_k を

$$P_k = -\frac{\partial f}{\partial \xi_k} \quad (\text{B } 1)$$

と表す。 P_k と E_{ij} の間には Maxwell の関係式

$$\frac{\partial E_{ij}}{\partial \xi_k} = \rho_0 \frac{\partial P_k}{\partial S_{ij}} \quad (\text{B } 2)$$

が成立する。

歪 E を熱弾性歪 E^e と非弾性歪 E^p に分離すると, 非弾性歪速度 $\dot{E}^p$ は式 (B 2) より

$$\dot{E}_{ij}^p = \rho_0 \frac{\partial P_k}{\partial S_{ij}} \dot{\xi}_k \quad (\text{B } 3)$$

と表せる。

内部状態変数 ξ_i と共役力 P_i の間の関係が「線型現象方程式」

$$\dot{\xi}_i = L_{ik} P_k \quad (\text{B } 4)$$

where, L_{ij} : 定数
で表されるとき, または, 内部変数 ξ_k が共役力 P_k のみに依存する「局所依存性」が成立するときは,

$$\dot{\xi}_i = \frac{\partial \Omega(P_1, P_2, \dots, \theta, \xi_1, \xi_2, \dots)}{\partial P_i} \quad (\text{B } 5)$$

where, θ : 絶対温度

なるスカラー量 “Flow Potential” Ω が存在する。このとき, 式(B 4), (B 5)より非弾性歪速度は

$$\dot{E}_{ij}^p = \rho_0 \frac{\partial \Omega}{\partial S_{ij}} \quad (\text{B } 6)$$

で求まる。 Ω は,

$$\Omega = \sum_{k=1}^n \int_0^{P_k} \xi_k(P_1, P_2, \dots, \theta, \xi_1, \xi_2, \dots) dP_k \quad (\text{B } 7)$$

で与えられる。

式(B 6)は, 非弾性歪速度が応力空間における等 Ω 面の法線方向であり, その大きさは Ω の勾配に比例することを意味する。

B.2 Continuum Slip Model 近似

金属結晶が複数のすべり系上の非弾性変形機構により塑性変形を生じるときを考える。あるすべり系 α の離散的な微視変形を平均化し, α すべり系について均一な剪断歪 γ^α を生じたとみなし, γ^α を状態変数にとる。Rice は, この近似方法を “Continuum Slip Model” と命名した²⁾。

状態変数 γ^α について式(B 1)で定義される共役力 P^α は,

$$P^\alpha = |F_0| \tau^\alpha u - p(\theta, \gamma^\alpha) \quad (\text{B } 8)$$

where,

F_0 : 残留応力による変形勾配,

τ^α : α すべり面公称剪断応力, θ : 絶対温度

p : γ^α が単位量変化したときの自由エネルギー増分,

u : 熱弾性変形によるすべり方向ストレッチ

で与えられる³⁾。

式(B 8)の p を無視し, 非弾性変形に比べ熱弾性変形は微少であるので $u \cong 1.0$ とすれば共役力 P^α と公称剪断応力 τ^α の関係は,

$$P^\alpha \cong |F_0| \tau^\alpha \quad (\text{B } 9)$$

と近似できる。

全ての状態変数 γ^α が局所依存性をもてば, Flow Potential Ω が存在し, 式(B 7), (B 9)より

$$\Omega = \sum_\alpha \int_0^{P^\alpha} \dot{\gamma}^\alpha(P^\alpha, \theta) dP^\alpha = |F_0| \sum_\alpha \int_0^{\tau^\alpha} \dot{\gamma}^\alpha(\tau^\alpha, \theta) d\tau^\alpha \quad (\text{B } 10)$$

と求められる。

上で均一剪断変形を考えた領域より一段階大きいスケールレベルの連続体近似での応力場 S と α すべり系剪断応力 τ^α の関係は,

$$\tau^\alpha = \mu_{ij}^\alpha S_{ij}; \quad \mu_{ij}^\alpha = \frac{1}{2}(n_i^\alpha m_j^\alpha + n_j^\alpha m_i^\alpha) \quad (\text{B } 11)$$

where,

m^α : すべり面単位法線ベクトル,

n^α : すべり方向単位ベクトル

で表される。よって, 式(B 6), (B 10), (B 11)より S と同じスケールレベルの歪場 E の非弾性歪速度は

$$\dot{E}_{ij}^p = \rho_0 \frac{\partial \Omega}{\partial S_{ij}} = \rho_0 \frac{\partial}{\partial S_{ij}} \left(|F_0| \sum_\alpha \int_0^{\tau^\alpha} \dot{\gamma}^\alpha(\tau^\alpha, \theta) d\tau^\alpha \right) \quad (\text{B } 12)$$

where, $\tau^\alpha = \mu_{ij}^\alpha S_{ij}$
で求まる。

B.3 金属のすべり変形の局所依存性

金属結晶が複数のすべり系上の転位線運動により塑性変形を生じるとき, すべり系 α の全ての転位線運動に B.3 節の “Continuum Slip Model” 近似を行い, 均一剪断歪 γ^α を状態変数にとる。これは, 連続分布転位論の仮定に相当する。

すべりが Schmid 則に従う場合, 各々のすべり系の変形はすべり方向分解剪断応力 τ^α がある固有の値に達すると開始する。式(B 9)より γ^α の共役力 P^α は分解剪断応力 τ^α にのみ依存するので, 状態変数と共役力の間に局所依存性が成立する。よって, B.1 節の議論より Flow Potential Ω_{disl} が存在する。

B.4 加工硬化塑性体の Flow Potential

応力空間での Ω_{disl} の値が, 分解剪断応力 τ^α と臨界剪断応力 τ_0^α について,

$$\Omega_{\text{disl}} = \begin{cases} 0 & (\tau^\alpha < \tau_0^\alpha) \\ \Omega_0 & (\tau^\alpha = \tau_0^\alpha) \\ \infty & (\tau^\alpha > \tau_0^\alpha) \end{cases} \quad (\text{B } 13)$$

で表されるときを考察する。

B.4.1 最大塑性仕事原理

式(B 10)のスカラー倍率 $|F_0|$ は変形勾配の determinant であるから正の実数である。よって, γ^α が τ^α の単調増加関数であれば, 状態変数 γ^α は共役力 P^α の単調増加関数である。

状態変数 γ^α が共役力 P^α の単調増加関数であり, P^α が応力 S の線型関数であれば, $\Omega_{\text{disl}} = \Omega_0$ 面上と, その内側の $\Omega_{\text{disl}} = \Omega_{\text{low}} (\Omega_{\text{low}} < \Omega_0)$ である応力点の γ^α, P^α の値を比較すると,

$$\sum_\alpha (P^\alpha|_{\Omega_0} - P^\alpha|_{\Omega_{\text{low}}}) (\dot{\gamma}^\alpha|_{\Omega_0} - \dot{\gamma}^\alpha|_{\Omega_{\text{low}}}) \geq 0 \quad (\text{B } 14)$$

であるので, 等 Ω_{disl} 面は凸である⁴⁾。ここで, 応力空間での Ω_{disl} が式(B 13)で与えられたとき, 等 Ω_{disl} 面が凸性をもてば, 式(B 14)より

$$(S_{ij}|_{\Omega=\Omega_0} - S_{ij}|_{\Omega=0}) (\dot{E}_{ij}|_{\Omega=\Omega_0}) \geq 0 \quad (\text{B } 15)$$

であり, 最大塑性仕事原理が導かれる⁴⁾。

B.4.2 降伏関数

Ω_{disl} が式 (B 13) のように与えられたとき, $\Omega_{\text{disl}} = \infty$ は物理的意味を持たないので, $\Omega_{\text{disl}} = \Omega_0$ に到達した状態からは Ω_{disl} を有限値のまま保持するか, Ω_{disl} が零の状態に戻るかしかできないが, 式 (B 12), (B 13) より非弾性歪速度が零でないのは Ω_{disl} を有限値のまま保持する場合である。

ここで, 応力 S , 非弾性歪 E^p と, 時間微分が非弾性歪速度 $\dot{E}^p$ の線型同次式で表されるようなスカラー κ で定まるスカラー値関数 F が

$$\Omega_{\text{disl}} = \begin{cases} 0 & \text{if } F(S_{ij}, E_{ij}^p, \kappa) < 0 \\ \Omega_0 & \text{if } F(S_{ij}, E_{ij}^p, \kappa) = 0 \\ \infty & \text{if } F(S_{ij}, E_{ij}^p, \kappa) > 0 \end{cases} \quad (\text{B } 16)$$

なる特性を持つとき, Ω_{disl} が有限値であり続けるためには $F=0$ を保持する必要がある。よって, 非弾性歪速度が生じるための条件は式 (B 16) のスカラー値関数 F について $F=0$ を保つことであり,

$$F=0 \text{ and } \frac{\partial F}{\partial S_{ij}} \dot{S}_{ij} \geq 0 \quad (\text{B } 17)$$

で与えられる。また, 式 (B 13) の Ω_{disl} で γ^a が τ^a の単調増加関数であれば, B.4.1 項より最大塑性仕事原理が成立するので, スカラー値関数 F について法線則

$$\dot{E}_{ij}^p = \Lambda \frac{\partial F}{\partial S_{ij}}, \Lambda > 0 \quad (\text{B } 18)$$

が成立する。式 (B 18) の係数 Λ は, Prager の適合条件 $dF/dt=0$ から求まり,

$$\Lambda = G - \frac{\partial F}{\partial S_{pq}} \dot{S}_{pq}$$

where,

$$\frac{1}{G} = \left(\frac{\partial F}{\partial E_{mn}^p} + \Gamma_{mn} \frac{\partial F}{\partial \kappa} \right) \frac{\partial F}{\partial E_{mn}^p}, \dot{\kappa} = \Gamma_{mn} \dot{E}_{mn}^p \quad (\text{B } 19)$$

であるので式 (B 18) の $\dot{E}_{ij}^p$ は応力速度 $\dot{S}_{ij}$ の線型同次式であり, 時間非依存変形を示している。

以上より, γ^a が τ^a の単調増加関数であり, Flow Potential Ω_{disl} が式 (B 13) の特性を示し, 式 (B 16) のようなスカラー値関数 F が存在すれば, 応力・歪応答は加工硬化塑性

挙動を示し, F は降伏関数となり, 塑性歪速度の降伏関数に関する法線則が成立する。

付録 C ヒステリシスエネルギーの物理的意味

非極性物質の運動方程式と熱力学第一法則より得られる「熱エネルギー平衡式」

$$\begin{aligned} \frac{dU}{dt} - \int_V \text{tr}(\mathbf{T}\mathbf{D}) dV &= H; \\ H &= \int_V \rho r dV + \int_{\partial V} h ds \end{aligned} \quad (\text{C } 1)$$

where,

U : 内部エネルギー, r : 熱供給, h : 熱流束,

$\mathbf{T}$: Cauchy 応力, $\mathbf{D}$: 変形速度テンソル

で, 物質の運動・熱状態・応力が周期 τ の周期的変化を示す場合の一周期について積分すると

$$\int_0^\tau \left[\int_V \text{tr}(\mathbf{T}\mathbf{D}) dV \right] dt = [U]_0^\tau + \int_0^\tau (-H) dt \quad (\text{C } 2)$$

となる。

ここで, 内部エネルギー U を弾性変形のポテンシャルエネルギーとして蓄えられる部分 U^R と内部構造変化に消費される部分 U^I に分離すると, 定常周期変形では $t=0$ と $t=\tau$ で U^R の値は同じである。また, 熱弾性変形が微少であるので変形中の質量密度を一定とみなせば,

$$\text{tr}(\mathbf{T}\mathbf{D}) = \frac{1}{2} \frac{\rho}{\rho_0} \text{tr}(\mathbf{S}\dot{\mathbf{C}}) \cong \text{tr}(\mathbf{S}\dot{\mathbf{E}}) \quad (\text{C } 3)$$

where, $\mathbf{S}$: 第2種 Piola-Kirchhoff 応力,

$\mathbf{C}$: 右 Cauchy-Green 歪, $\mathbf{E}$: Lagrange 歪であるので, 単軸応力状態での式 (C 2) の局所形として

$$\begin{aligned} \int_0^\tau S_{11} \dot{E}_{11} dt &= [u^I]_0^\tau + \int_0^\tau (-dH) dt \\ \text{where, } U^I &= \int_{V_0} u^I dV, H = \int_{V_0} (dH) dV \end{aligned} \quad (\text{C } 4)$$

を得る。

微少変形で $\mathbf{S}$ は公称応力とみなせるので, 式 (C 4) より, 単軸荷重試験の公称応力-公称歪ヒステリシスループ面積は, 変形前単位体積あたりのエネルギー散逸に等しい。