2次元粘性流場における逆問題の数値解法

正員 牧 野 功 治* 正員 姫 野 洋 司**

A Numerical Method of Solving Inverse Problem in 2-Dimensional Viscous Flow Field

by Koji Makino, *Member* Yoji Himeno, *Member*

Summary

This paper presents a numerical method solving inverse problem in 2-dimensional viscous flow past a body. The sensitivity coefficients for unit change of the design variables in the shape function are formulated by using the variation of Navier-Stokes equation and a prescribed body-shape function. The inverse problem for obtaining body shape with specified flow variables, such as pressure and/or wake velocity, in the fluid domain, is converted to an iterative optimization problem for minimizing errors of the specified variables. The optimization procedure also includes the sensitivity coefficients and appropriate constraints to find a feasible direction at each iterative step.

The authors applied the method to problems for specifying pressure distribution on the body boundary, wake distribution, and both of them. The results of the computation show fairly good agreements with the target body profiles in case when they are prescribed. It is also found that the order of magnitude of the sensitivity coefficients should be of same order and that the specified pressure points should cover the whole body boundary for getting reasonable results.

1. 緒　　言

結果から原因を導く，いわゆる逆問題は現在，工学・理学など様々な分野に応用されており，医学におけるX線CT，資源調査や古代研究に用いられる地中探査システム，構造・設計の分野における残留応力・歪の推定問題，弾性応答を用いた欠陥同定，構造物の最適設計などが挙げられる[1]。流体力学の分野においても，ポテンシャル理論を用いた翼表面上の圧力や速度分布を指定する逆問題[2]，散乱音場の情報からその物体形状を求める音響散乱逆問題[3)4]などについての研究がさかんである。特に最適化過程を含む逆問題は製品の形状や機能を設計する上で重要であり，船舶流体力学の分野でも最適化の研究は盛んである。著者らも最近，その一例として2次元粘性流場において粘性抵抗を最小化する形状最適化[5)6]を試みてきた。

一方，結果から支配因子の値を同定する狭義の逆問題も工学上極めて有用である。本研究は著者らの上記の最適化手法の応用として，2次元粘性流場において変数値を指定する形状同定型の逆問題の解法を試み，その定式化と数値計算を行ったものである。感度解析は著者らの最適化手法と同じ方法で行っており，ナビエ・ストークス方程式を形状変化に伴う変数の変化量について変換し，それを線形化した式を用いている。その部分は基本的には別所[7]がBergman-Schiffer[8]の手法を粘性流れに応用した定式化を採用したものである[5]。また，逆問題は線形連立方程式の形で与えられることが多いが，不等号制約条件を考慮するためこれをある種の最適化問題に変換し，シンプレックス法を用いて解くこととした。

計算例として，レイノルズ数が 100 または 1000 の粘性流において物体表面上の圧力分布や物体後流の伴流分布を指定する問題，あるいはそれらを組み合わせた問題について数値計算を行い，本解法の有効性を確認した。そして圧力・伴流分布両方の問題についてほぼ妥当な結果を得ることができた。また，与える指定点の位置や設計変数の感度

* 日立造船(株)技術研究所(研究当時大阪府立大学大学院)
** 大阪府立大学工学部

原稿受理 平成7年1月5日
春季講演会において講演，平成7年5月17，18日

のオーダーが解に与える影響についても検討した。その結果，実際に数値計算をする場合には設計変数の感度の大きさが解に影響し，感度の低い設計変数が含まれていると妥当な形状が得られないことがあるなどの知見も得られた。

2. NS 方程式の感度解析を用いた逆問題の解法

流場予測や感度解析の支配方程式や物体の形状表現などは，著者らの最適化手法[6]と同じであり，説明の便宜上ここでは簡単に述べることとする。Fig.1 に示すように，物体形状を C，外部領域を D, D 内での速度，圧力を $\boldsymbol{u}(u,v)$, p とする。また，C に垂直な δn の微少変位によって，C, D がそれぞれ C', D' に変化したとき，D' に対応する速度や圧力を $\boldsymbol{u}'$, p' とする。まず，D 内での NS 方程式，連続の式，および境界条件はそれぞれ，

$$(\boldsymbol{u}\cdot\nabla)\boldsymbol{u}+\frac{1}{\rho}\nabla p-\nu\nabla^2\boldsymbol{u}=0 \tag{1}$$

$$\nabla\cdot\boldsymbol{u}=0 \tag{2}$$

$$\boldsymbol{u}=\boldsymbol{u}|_\infty \quad \text{or} \quad \frac{\partial\boldsymbol{u}}{\partial x}=0 \quad \text{at} \quad \infty$$

$$\boldsymbol{u}=0 \qquad\qquad \text{on} \quad C \tag{3}$$

と表される。また，物体が変形した際の速度，圧力などの同じ座標での物理量の変化を

$$\delta\boldsymbol{u}=\boldsymbol{u}'-\boldsymbol{u},\quad \delta p=p'-p \tag{4}$$

と定義し，物体近傍で D, D' は互いの領域に接続されるものとする。前述の支配方程式(1)～(3)式を変化量について変換し，その線形部分をとると変化分の支配方程式

$$(\boldsymbol{u}\cdot\nabla)\delta\boldsymbol{u}+(\delta\boldsymbol{u}\cdot\nabla)\boldsymbol{u}+\frac{1}{\rho}\nabla\delta p-\nu\nabla^2\delta\boldsymbol{u}=0 \tag{5}$$

$$\nabla\cdot\delta\boldsymbol{u}=0 \tag{6}$$

$$\delta\boldsymbol{u}=0 \quad \text{or} \quad \frac{\partial\delta\boldsymbol{u}}{\partial x}=0 \qquad \text{at} \quad \infty$$

$$\delta\boldsymbol{u}=\boldsymbol{u}'|_{C'}-\boldsymbol{u}|_C-\left.\frac{\partial\boldsymbol{u}'}{\partial n}\right|_C\delta n \tag{7}$$

$$=-\left.\frac{\partial\boldsymbol{u}}{\partial n}\right|_C\delta n+O(\delta n^2) \quad \text{on} \quad C$$

が導かれる。

(7)式より C 上での境界条件を求めるためには，法線方向の変形分 δn が必要であり，それは以下のようにして導

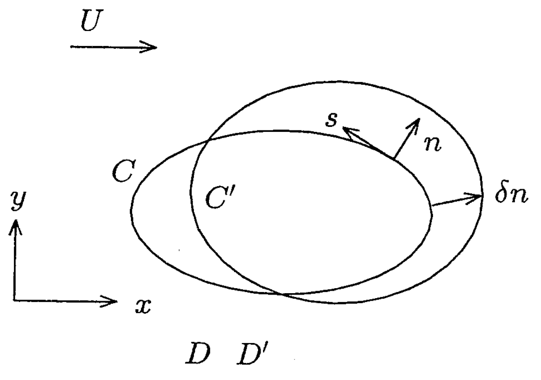

Fig. 1 Boundary deformation

かれる。まず，物体形状を表現する関数として，ここでは半幅 y について B-スプライン関数[9]を用いることとする。この関数は多項式や3次スプライン関数と比較して，形状表現の自由度が高く，かつ平滑度もよい。また，ある1つの係数の変化により物体が局所的に変形するため，物体の変形や流場の変化に関して各設計変数がどのように影響するかも把握しやすいという利点がある。まず，補助変数を θ として物体形状を次のようにパラメーター表示する。

$$\begin{cases} x=x(\theta)=\dfrac{L}{2}\cos\theta \\ y=y(\theta)=\displaystyle\sum_{k=1}^{K}\gamma_k N_{mk}(\theta) \end{cases} \tag{8}$$

ここで，$N_{mk}(\theta)$ は $m-1$ 次の B-スプライン関数，γ_k はその係数であり，γ_k を設計変数と想定することとする。さらに以下では $m=4$ の3次 B-スプライン関数を用いることとする。Fig.2 はレンズ形物体の γ_k の変化による変形を示した図である。ただし，設計変数の数は $K=7$ としている。図より，各設計変数が物体変形に与える影響は局所的であることが確かめられる。また，物体の端点において $y=0$ であるためには，$\gamma_1=0$, $\gamma_7=0$ である必要がある。

(8)式で形状を表現すると，γ_k の変化による物体形状の法線方向の変化分 δn は

$$\delta n=\sum_{k=1}^{K}\frac{\delta\gamma_k}{\sqrt{x_\theta^2+y_\theta^2}}\left(\frac{\partial x}{\partial\gamma_k}\cdot\frac{\partial y}{\partial\theta}-\frac{\partial y}{\partial\gamma_k}\cdot\frac{\partial x}{\partial\theta}\right) \tag{9}$$

と表される。したがって，(7)式と(9)式より C 上での境界条件が確定する。いま，$\boldsymbol{u}_k$, p_k を単位 $\delta\gamma_k$ あたりの形状変化に対応する流場変化とすると，設計変数の変化による流場変化は

$$\begin{aligned} \delta\boldsymbol{u}&=\sum\boldsymbol{u}_k\delta\gamma_k \\ \delta p&=\sum p_k\delta\gamma_k \end{aligned} \tag{10}$$

で表される。この各々の流場変化成分は，(9)式の $\delta\gamma_k$ の係数部分を(7)式に代入した境界条件と，(5)，(6)式の支配方程式により確定する。この解法には著者らの方法を用いた[6]。

つぎに，逆問題の定式化について述べる。まず，流場の変数を ϕ ($\phi=u, v$ or p) とする。座標 $\boldsymbol{r}_m$ における変数の値 ϕ_m を，指定された値 ϕ_{ms} にするように形状を変更することを考えると，(10)式から

$$\sum\phi_{mk}\delta\gamma_k=\phi_{ms}-\phi_m \tag{11}$$

となる。ただし，ϕ_{mk} は $\partial\phi_m/\partial\gamma_k$ を表す。いま，設計変数 γ_k の数 K と指定値の数 M が等しいときには，以下のような線形連立方程式を解くことにより $\delta\gamma_k$ が確定する。

$$\sum\phi_{mk}\delta\gamma_k=\phi_{ms}-\phi_m \quad (m=1,2,\cdots,K) \tag{12}$$

さらに，$M>K$ ならば $\delta\gamma_k$ は最小自乗法により決定してもよいし，他の拘束条件があるときにはラグランジェの未定係数法やシンプレックス法等の最適化手法を用いることもできる。

ここでは，物体の幅 y が正であるという制約条件を付加

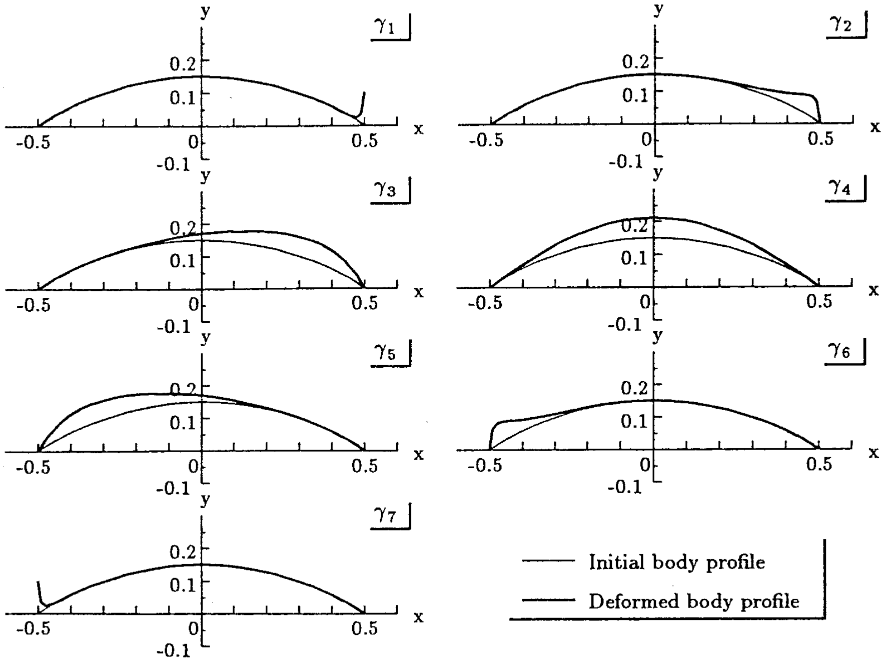

Fig. 2 Body deformation due to γ_k increment by 0.1

することとし，この逆問題を解くためにまず(12)式を以下のような制約条件付きの，(12)式の残差に関する最適化問題に変換し，これにシンプレックス法を適用する[10]。

$$\begin{array}{ll} \text{find} & \delta\gamma_k \\ \text{min} & z=\sigma_1+\sigma_1'+\cdots+\sigma_M+\sigma_M' \\ \text{subject to} & \sum\phi_{mk}\delta\gamma_k-(\phi_{ms}-\phi_m)=(\sigma_m-\sigma_m') \\ & y\geq 0 \\ & -1\leq\delta\gamma_k\leq 1 \\ & 0\leq\sigma_m,\ \sigma_m'\leq\varepsilon_{\max} \end{array} \qquad (13)$$

ここで，σ_m は制約条件第 1 式の左辺が正のとき，σ_m' は同じく左辺が負であるときの残差の大きさである。また，$\varepsilon_{\max}$ は σ_m, σ_m' の許容最大値である。$\varepsilon_{\max}$ を設定すると制約条件を増やすことになるが，このような条件をつけるのは，ある指定点でだけ残差が大きいような解ではいけない問題の場合，$\varepsilon_{\max}$ を零に近づけることによって解決できるからである。したがって，問題によっては制約条件第 4 式は外してもよい。

以上をまとめると，本解法の手続きは次のようになる。

（1） 初期形状における流場を支配方程式(1)～(3)式に従って求める。

（2） 単位形状変化に伴う流場の変化分の支配方程式(5)～(7)式を解き，圧力または速度の変化分，すなわち感度係数を求める。

（3） 最適化問題(13)式をシンプレックス法で解き，得られた $\delta\gamma_k$ を用いて

$$\gamma^{n+1}=\gamma^n+\delta\gamma$$

より形状を変更する。そして，新たな形状での流場を計算する。

（4） 得られた流場の値が指定値に収束しているかを判定する。判定は指定値との残差の 2 乗和 ε がある正の値 ε_c より小さくなったとき収束したものとみなす。すなわち

$$\sum(\phi_{ms}-\phi_m)^2<\varepsilon_c$$

のとき計算を終了し，それ以外は手続き(2)へ戻る。

3. 数値計算結果と考察

先の定式化に従ってレイノルズ数が 100 または 1000 の 2 次元粘性流場における逆問題の計算をいくつか行い，本手法の有効性を確認すると共にその結果について検討した。流場の計算には有限体積法による離散化を用いた。計算格子は H 型で物体近傍に引きつけられており，格子数は $Re=100$ のとき 43×15，1000 のとき 75×30 とした。計算時間は無次元時間で $t=30$ まで初期流場の計算を行い，その後新たに得られた形状に対する流場計算を $t=10$ ずつ行った。設計変数の数は $K=7$ としたが，物体端点においては $y=0$ であるため γ_1, γ_7 は固定されている。また，後述するように計算によってはさらに他の設計変数も固定する場合がある。

3.1 既形状の流場を指定する逆問題

ここではまず，$Re=100$ の流れにおいてあらかじめ与えた物体形状を目的形状とし，その流場を指定して目的形状が得られるかどうか確認する。目的形状には面積が $A=0.125$ のレンズ形を選び，指定点の数は $M=5$ とした。また，流場の指定は，（1）物体表面上の圧力分布，（2）物体後流の伴流分布，（3）上記(1)，(2)を組み合わせたもの，の 3 通りについて行った。

(1)の物体表面上の圧力分布を指定した場合から検討する。まず，面積 $A=0.1$ のレンズ形を初期形状としたときの数値計算を行った。その際，1) 指定点が物体中央に集まっている場合，2) 指定点が物体全体に分散している場合，の2種類について計算を実施した。これらの計算はどちらもステップ $n=2$ で収束解を得ている。1) の結果を Fig.3 に，2)の結果を Fig.4 に示す。得られた最終形状を比較すると，1)の指定点が中央に集まっている方が形状の誤差が大きい。この誤差，つまり物体後端部が膨らみ過ぎたことの原因は，指定点を中央に配置したことによって物体の前後端での制約がなくなったためである。したがって，指定点の与え方と得られる解の間には密接な関係があり，問題の設定(この場合は指定点の配置)に十分な考慮をはらう必要があることが判る。

つぎに，初期形状を平板にした場合の計算を行った。指定点は上記2)の場合と同じである。この計算においては，3) γ_2 を設計変数とする場合，4) γ_2 を固定する場合，の2例を試みた。3)の場合は $n=5$，4)の場合は $n=4$ で収束解が得られており，その結果を Fig.5 に示す。得られた最終形状を比較すると，3)の場合では形状誤差が非常に大きいのに対し，4)の γ_2 を固定した場合は妥当な結果が得られている。したがって，γ_2 すなわち後端での変形を許したことが誤差の原因となっていることが判る。Fig.5(c)において初期ステップ $n=1$ での圧力の感度係数分布を比較すると，どの指定点においても γ_2, γ_6 の感度が低い。感度の低い設

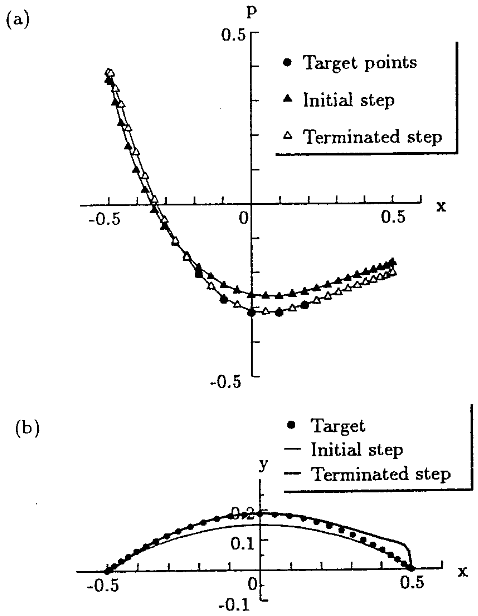

Fig. 3 Case of pressure specified (Case 1) ; (a) Distribution of pressure p ; (b) Comparison of body profiles

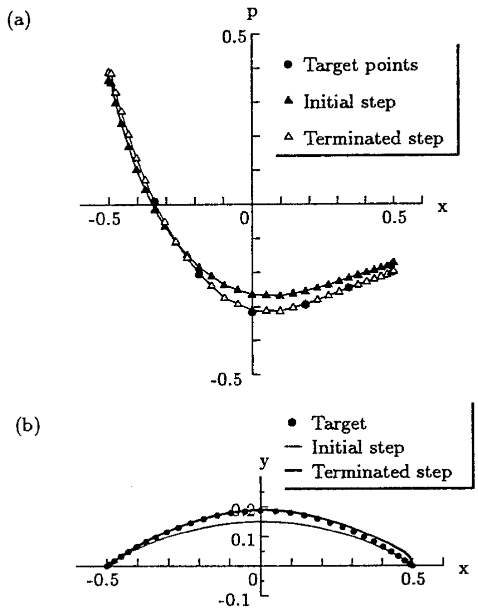

Fig. 4 Case of pressure specified (Case 2) ; (a) Distribution of pressure p ; (b) Comparison of body profiles

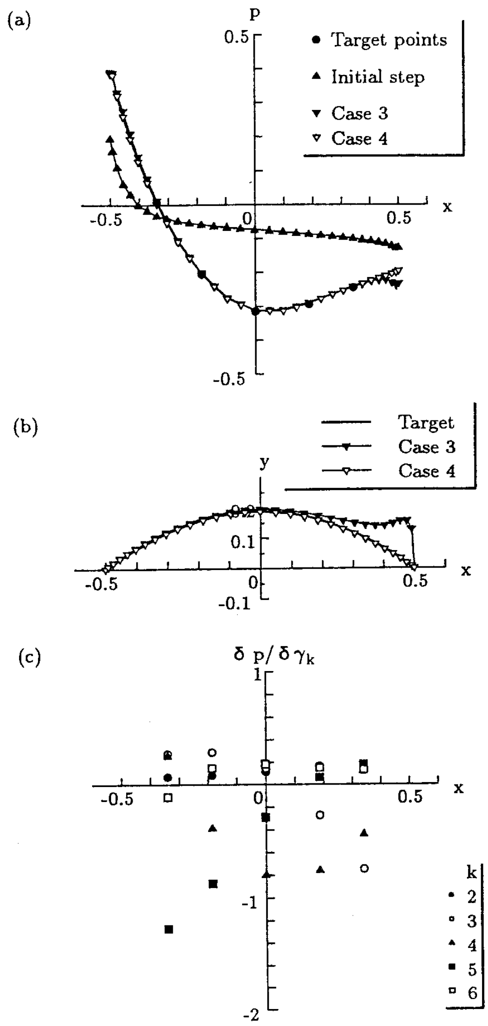

Fig. 5 Case of pressure specified (Case 3 and 4) ; (a) Distribution of pressure p ; (b) Comparison of body profiles ; (c) Pressure variation in specified point at step $n=1$

計変数は1回のステップで大きく変化しやすく，それが形状反復時の誤差の原因となるように思われる。したがって，設計変数の感度は同程度のオーダーであることが望ましく，感度の低い設計変数は固定した方がよい。ただし設計変数を固定すると，同時に物体形状を柔軟に表現する事もできなくなるので，この点については実用段階での十分な検討が必要であろう。

しかしながら，一方では同じく感度の低い γ_6 は誤差の原因となっていない。これは，γ_6 の影響が大きい物体前端部の指定点において，初期形状での圧力値が指定値に近かったため γ_6 はあまり変化させる必要がなかったからである。また，感度係数は反復ステップごとに変化する。したがって，感度と形状表現の自由度の問題を併せ考えると，高精度の解を得るには反復過程においてステップごとに感度をチェックし，そのステップで感度の低い設計変数を固定するなどの工夫が必要であると思われる。

つぎに，(2)の物体後流の伴流分布を指定する逆問題について数値計算を行った。初期形状は平板とし，指定点は物体直後に5点とった。また，指定点における γ_2, γ_6 の感度が低かったため，先の検討よりこれら2つの設計変数は固定しておいた。この反復計算を行った結果，$n=12$ で収束解を得た。結果を Fig.6 に示す。物体後端部では僅かに誤差が認められるが，ほぼ妥当な形状が得られており，伴流分布も指定したものとなっている。

この数値計算の場合だけ多くの反復回数を必要としたのは，解を得るためには $\delta\gamma_k$ に減速係数を掛け，変形を制限しなければならなかったからである。このように，問題によっては1回のステップで変化させることができる量の検討も併せて必要であると思われる。

さらに，(3)の物体表面圧力と後流での伴流分布を同時に指定する逆問題の数値計算を実施した。平板を初期形状として指定点を5点取り，その内の3点については圧力を，そして残り2点については伴流分布を指定した。設計変数は圧力分布の場合 γ_2 を固定するべきであるが，伴流分布の場合併せて γ_6 も固定するべきである。今のように両方の感度が問題になる場合の検討も必要であるが，ここでは伴流速度の感度による誤差を防ぐために γ_2, γ_6 とも固定した。この計算はステップ $n=4$ で収束した。Fig.7 より，目的形状とほぼ同じ形状が得られているのが分かる。また，圧力分布，伴流分布両方で妥当な結果となっている。

3.2 一定の表面圧力分布を指定する逆問題

前節では予め解かれている流場の変数を指定し，異なる形状を初期値として形状変更を行ったのであるが，以下で

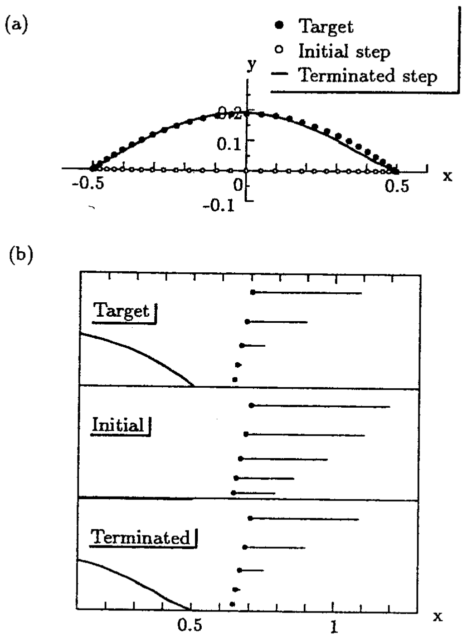

Fig. 6 Case of wake-distribution specified; (a) Comparison of body profiles; (b) Comparison of wake distributions

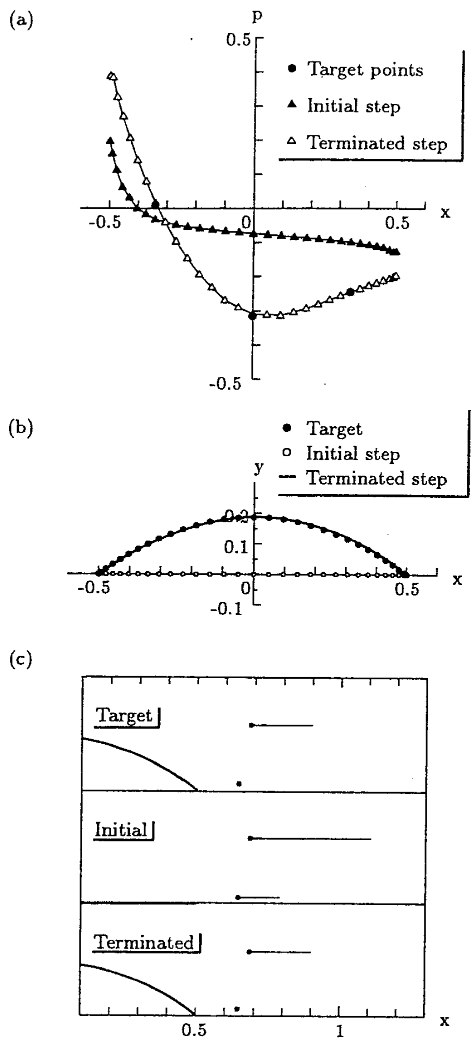

Fig. 7 Case of pressure and wake specified; (a) Distribution of pressure p; (b) Comparison of body profiles; (c) Comparison of wake distributions

は最終形状が不明の場合について逆問題の解法を試みる。まず，物体表面上の圧力分布を一定にする場合について数値計算を行った。指定点は前節と同じく5点とし，表面圧力の指定値は $p=-0.1$ とした。また，先の検討から後端部での変形に対応する設計変数 γ_2 は，感度の問題を避けるために固定してある。さらに前端部の γ_6 に関して，1) γ_6 を固定していない場合，2) γ_6 を固定している場合，の2通りについて計算した。その結果をFig.8に示す。1)，2)共に，得られた形状は平板に近いが，1)の方がより前端部が膨らんでいる。また，Fig.8(c)より2)の場合は残差の2乗和が収束していない。これは物体前端部の指定点での圧力値が指定値に近付かなかったためであり，γ_6 はこの問題において非常に重要な設計変数であったことがわかる。逆問題の場合，問題の設定自体に解のない場合もあるが，このように設計変数の選び方によって解が得られないこともあるという一例である。

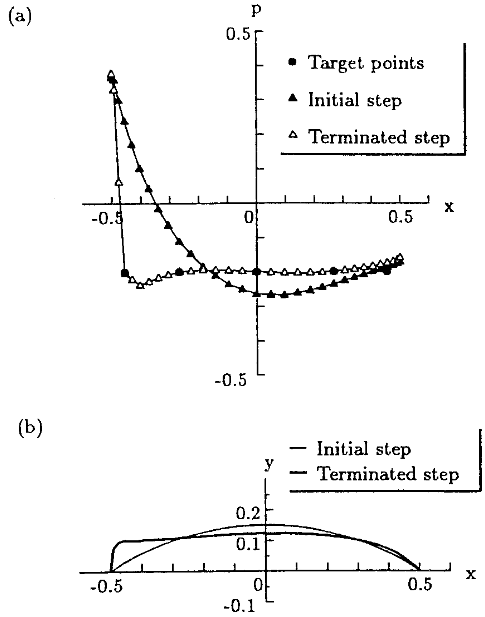

Fig. 9 Constant pressure distribution specified (Case 3) ; (a) Distribution of pressure p ; (b) Comparison of body profiles

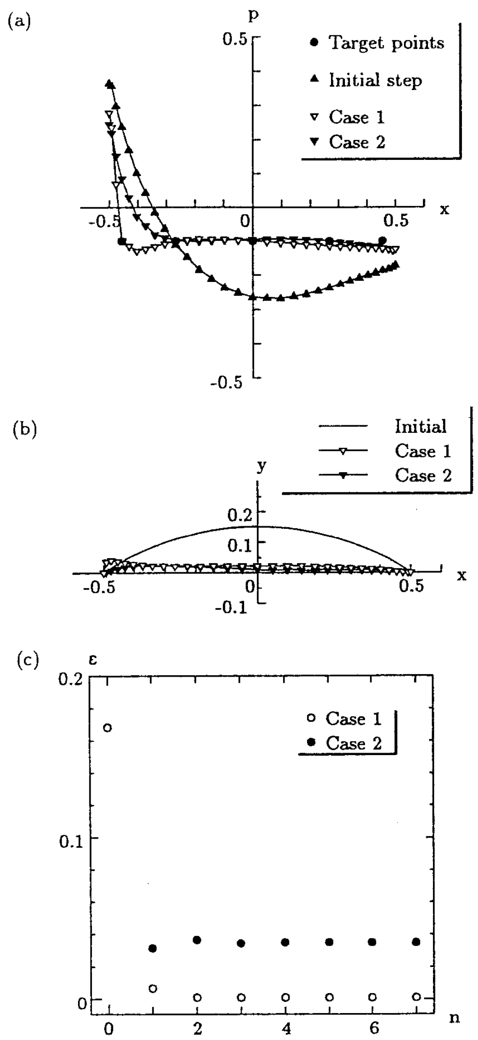

Fig. 8 Constant pressure distribution specified (Case 1 and 2) ; (a) Distribution of pressure p ; (b) Comparison of body profiles ; (c) Step variation of residual sum of square

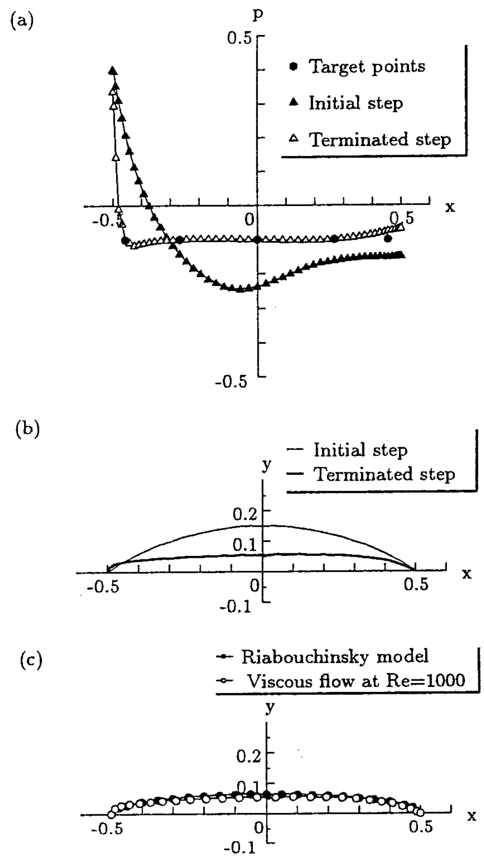

Fig. 10 Constant pressure distribution specified, $Re=1000$ (Case 4) ; (a) Distribution of pressure p ; (b) Comparison of body profiles ; (c) Comparison with Riabouchinsky model shape

また，圧力の指定値を $p=-0.2$ にした場合の計算も行った(これを3)とする)。その結果，Fig.9 に示すように指定値が $p=-0.1$ の時より幅の広い形状が得られた。両者に共通して，得られた形状は指定した範囲がほぼ平坦になっている。

さらに，4)として $Re=1000$ の粘性流について数値計算を行った結果，Fig.10 に示されるような楕円に近い形状が得られた。(c)は著者らの結果と塩川[11]のリアプチンスキーモデルによる計算結果とを比較したものである。多少の違いはあるが両者の形状はよく合っており，高レイノルズ数では妥当な形状が得られていると考えられる。同時に，この結果は $Re=100$ の粘性流についてはポテンシャル流による計算結果を用いることができないことを示唆している。

最後に，著者らは物体後流での伴流分布を一定にする問題についても試みたが，このような条件を満足する形状を得る事は極めて困難であることが判った。前節のように解が既知である場合には容易に収束するが，特定の伴流分布を指定して未知の形状を求める場合には，解の存在すら保証されないこともあり得る。逆問題では問題設定が非常に重要であり，今後は解の存在性に関する検討が必要であると思われる。

4. 結　　言

2次元粘性流場における逆問題についての数値解法を定式化し，数値計算によって本解法の有効性を確認した。計算例として，物体表面上の圧力分布，物体後流での伴流分布，それらを組み合わせた分布を指定する逆問題の計算を行い，妥当な結果を得ることができた。その際，逆問題を解く際に指定点の位置や設計変数の感度がどのように解に影響するかについて検討した結果，感度係数のオーダーが揃う必要があること，指定点の配置も形状全体をカバーする必要があることなどが分かった。また，逆問題では有意な解が得られるように問題を設定することが重要で，解法と共にこの点についても検討されることが今後の課題であると思われる。

最後に，本研究を行うにあたり有益な助言を頂いた日本大学の別所正利先生，大阪府大の田原裕介先生，常石造船(株)の濱崎準一氏に厚く御礼申し上げる。また，本研究の一部は文部省科学研究費の補助を受けたことを付記し，関係各位に感謝する次第である。

参　考　文　献

1) 久保司郎：逆問題, 培風館, 1992
2) 日本機械学会：逆問題のコンピュータアナリシス, コロナ社, 1991
3) 河辺　寛：水中物体の形状推定の基礎研究, 日本造船学会論文集, 第173号, (1993.6), pp. 247-253
4) 河辺　寛, 森口　恍次：水中物体の形状推定の基礎研究(続), 日本造船学会論文集, 第175号, (1994.6), pp. 193-204
5) 谷川和男, 姫野洋司：ナビエ・ストークス方程式の数値解を用いた非線形計画法による物体形状の最適化(第3報) 一抵抗に対する感度係数の直接解法一, 関西造船協会誌, 第218号, (1992.9), pp. 15-24
6) 牧野功治, 姫野洋司, 濱崎準一：ナビエ・ストークス方程式の数値解を用いた非線形計画法による物体形状の最適化(第4報) 一感度解析手法の改良一, 関西造船協会誌, (1994.9), 第222号
7) 別所正利：オゼーン図式による粘性流れの研究(第4報一様流れのない2次元振動流れ), 日本造船学会論文集, 第161号, (1987.6), pp. 43-49
8) Bergman, S. and Schiffer, M.：Kernel Functions and Elliptic Differential Equations in Mathematical Physics, Academic Press, 1953
9) 市田浩三, 吉本富士市：スプライン関数とその応用, 教育出版, 1979
10) 坂和正敏：線形システムの最適化, 森北出版, 1984
12) 塩川朋久：2次元物体の最小抵抗の理論的研究, 防衛大学校研究科卒論, 1985