2次元重力流の計算

正員 川 中 幸 一* 正員 馬 場 信 弘**

Computation of Two-dimensional Gravity Current

by Koichi Kawanaka, *Member* Nobuhiro Baba *Member*

Summary

Computational results of a two-dimensional gravity current in a lock-exchange flow is presented in which a finite volume of homogeneous fluid was released instantaneously into another fluid of slightly lower density when a lock gate was opened. The computations were performed in a two-dimensional channel by solving the incompressible Navier-Stokes equation for an inhomogeneous fluid, the continuity equation and the transport equation for solute by the finite volume method. For accurate representation of small density difference, the density variation relative to the characteristic density difference was used as one of primitive variables. The finite volume formulation holds the conservative property with respect to mass at the boundaries as well as at the density interface so that the total mass of the two fluids with different density remains constant. Some of standard numerical schemes were used to examine their performance to the density jump of the interface. The computed gravity current moves steadily in an initial phase, and the front speed decreases with distance in a self-similar phase when an internal bore on the interface reflected from the back of the lock reaches the front of the current. The effects of the bottom boundary layer on the internal structure of the current is investigated from numerical experiments with no-slip and free-slip boundary conditions. The volume of the diluted fluid in a gravity current by the entrainment of ambient fluid is evaluated as a function of time to quantify the mixing. The result indicates that at low Reynolds numbers the subsequent mixing occurs in the early stage of the evolution of the gravity current in a lock-exchange flow.

Keywords: Gravity Current, Navier-Stokes Equation, Density Interface

1. 序 論

温度差や塩分差による微少な密度差に起因する重力流は大気や海洋の中で自然に起こっている現象であり，また人工的にも発生されることもある。大洋あるいは沿海におけるフロント，河口付近の塩水楔，海底の泥流，油田やタンカーからの原油の流出，発電所からの温排水などは海洋における典型的な重力流の例である[1]。このような重力流は生態系にも大きな影響を与えることがあり，重力流がどのように広がり，周囲の流体と混合していくかを調べることは海洋環境を考える上で極めて重要である。

このような重力流の最も基本的なモデルの１つとして水門開放問題が挙げられる。水平な水路内に鉛直な仕切り板を挟んで密度が異なる流体を入れ，瞬時に仕切り板を取り除くことによって重力流を発生させる。この問題は食塩水と清水を用いて実験室で容易に再現できるため多数の実験が行われてきた[2]が，その多くは長方形断面の２次元水路内において２つの流体の体積比が大きい場合，すなわち一方の流体が他方の流体に流れ込んでいく場合について行われた。重力流は水門開放後一定速度で進行するが，先端の速度は途中から時間の$-1/3$乗に比例して減速することが実験室レベルのレイノルズ数の範囲で一致している実験結果として知られている[3]。一方，先端部の進行速度は重力流内部の密度に依存すると考えられるが，外部流体との混合についてはまだよく理解されていない。Hallworth et al.[4]は実験結果から重力流が一定速度で進行する初期段階では

* 大阪商船三井船舶株式会社
** 大阪府立大学工学部

原稿受理 平成７年７月10日
秋季講演会において講演 平成７年11月16，17日

ほとんど進行部の混合は起こらず，減速する自己相似の段階に入ってから急速に混合が進むということを示唆しているが，Hacker et al.[5] は初期段階から界面の砕波によって進行部の混合が起こっているという実験結果を報告している。

計算流体力学の重力流への応用はMAC法が開発された初期の段階から行われてきた[6]が，解像力の不足のため実験以上の成果をあげることは難しかった。重力流は密度が不連続に変化する界面が移動，変形し，その上で剪断不安定性から界面が砕波する非常に複雑な流場を作るため，定量的に評価できる計算結果を得ることは現在でも容易ではない。密度差を作る媒質の拡散係数は分子粘性係数と同程度かそれより小さく，従って密度を決定する媒質の支配方程式は運動量の方程式と同様に非常に弱い拡散を伴う対流方程式となり，一般にこれを数値的に安定に解くことは難しい。

本研究の目的の一つは海洋において見られる多様な重力流を計算する方法を開発することであり，そのために基本的な水門開放問題の2次元重力流の計算を行ってその方法を検討する。ここで用いる方法は密度成層流の混合を計算するために開発した方法[7]と基本的に同じであり，非圧縮性の不均一流体に対するナビエ・ストークス方程式と連続の条件および弱い拡散性を持つ媒質の輸送方程式を有限体積法によって解く。境界および密度界面まで含めた質量の保存性について検証し，標準的な数種のスキームの密度界面近傍における数値的な挙動について調べる。本研究のもう一つの目的は初期段階から自己相似の第2段階における重力流の内部構造と混合過程について調べることである。重力流の先端速度について実験結果と比較し，レイノルズ数や壁面境界層が重力流の内部構造に及ぼす影響について調べる。空間体積に対する密度の分布の時間変化を計算し，重力流の外部流体との混合過程について考察する。まず次章で重力流の計算方法について記述した後，第3章で2次元重力流の計算結果を示してその考察を行い，第4章で結論をまとめる。

2. 方　　法

密度 ρ_0 の流体中で密度 $\rho_0+\Delta\rho$ の流体を放つ水門開放問題を考える。密度差は非常に小さく，$\Delta\rho/\rho_0$ が 10^{-2} のオーダーの場合を考える。流体の密度 ρ は一定密度 ρ_0 の媒体の中で密度 ρ_s の媒質が対流，拡散によって不均一に分布するため変化すると仮定し，

$$\rho=1+\frac{\Delta\rho}{\rho_0}\rho_s \tag{1}$$

と表す。ここで微小な密度変化を高精度に計算するため流体の密度 ρ と媒質の密度 ρ_s はそれぞれ媒体の密度 ρ_0 と初期の密度差 $\Delta\rho$ で無次元化されている。その結果原理的に媒質の密度は $0\leqq\rho_s\leqq1$ の範囲で変化する。

支配方程式は非圧縮性媒体の連続の条件

$$\nabla\cdot\boldsymbol{u}=0 \tag{2}$$

と媒質の密度の輸送方程式

$$\frac{\partial\rho_s}{\partial t}+\nabla\cdot(\rho_s\boldsymbol{u})=Rs^{-1}\nabla^2\rho_s \tag{3}$$

およびこの密度変化を伴う粘性流体に対するナビエ・ストークス方程式

$$\frac{\partial(\rho\boldsymbol{u})}{\partial t}+\nabla\cdot(\rho\boldsymbol{u}\boldsymbol{u})=-\nabla\phi+Re^{-1}\nabla^2\boldsymbol{u}-\rho_s Fn^{-2}\boldsymbol{i}_3 \tag{4}$$

である。ここで $\boldsymbol{u}$ は媒体の流れの速度ベクトル，ϕ は媒体の静水圧を基準とした圧力の変化量，$\boldsymbol{i}_3$ は x_3 軸に沿った鉛直上向きの単位ベクトルである。ここですべての変数は水路の深さ H と代表速度 U で無次元化されており，媒質の拡散パラメータ Rs，レイノルズ数 Re および内部フルード数 Fn はそれぞれ

$$Rs=\frac{UH}{\kappa},\ Re=\frac{UH}{\nu},\quad Fn=\frac{U}{\sqrt{(\Delta\rho/\rho_0)gH}} \tag{5}$$

と定義される。ここで κ は媒質の分子拡散係数，ν は流体の動粘性係数，g は重力加速度である。また水門開放問題では外部条件で決まる速度は含まれていないので代表速度として内部浅水波の伝播速度を用い，$U=\sqrt{(\Delta\rho/\rho_0)gH}$ とする。このときフルード数は $Fn=1.0$ となる。

壁面境界では媒質の拡散流速が零になる条件

$$\boldsymbol{n}\cdot\nabla\rho_s=0 \tag{6}$$

と速度についての no-slip 条件

$$\boldsymbol{u}=0 \tag{7}$$

または free-slip 条件

$$u_n=0 \tag{8}$$

$$\boldsymbol{n}\cdot\nabla u_t=0 \tag{9}$$

を課す。ここで $\boldsymbol{n}$ は壁面の単位法線ベクトル，u_n, u_t はそれぞれ速度の壁面における法線成分と接線成分を表す。

初期条件は長さ L，深さ H の水路内 $0\leqq x_1\leqq L$, $-H\leqq x_3\leqq0$ の流体は静止し，水路の左端 $x_1=0$ から水門 $x_1=x_0$ までが密度 $\rho_0+\Delta\rho$ の流体で，残りの部分 $x_0\leqq x_1\leqq L$ が密度 ρ_0 の流体で満たされている状態とする。すなわち速度場と密度場の初期条件はそれぞれ

$$\boldsymbol{u}=0 \tag{10}$$

$$\rho_s=\begin{cases}1 & 0\leqq x_1\leqq x_0\\ 0 & x_0\leqq x_1\leqq L\end{cases} \tag{11}$$

で与えられる。階段関数の密度場に対応する圧力場は開水路の場合を仮定し，

$$\phi=\begin{cases}-Fn^{-2}x_3 & 0\leqq x_1\leqq x_0\\ 0 & x_0\leqq x_1\leqq L\end{cases} \tag{12}$$

のように上面 $x_3=0$ において連続な関数とする。

(2)式，(3)式，(4)式の支配方程式をデカルト座標系の成分に展開し，有限体積法に基づいて離散化する。速度

ベクトルの成分はセル面の中心にスタッガード配置し，圧力と密度はセルの中心で定義する。支配方程式に含まれる空間微分は2次精度の中心差分で近似する。このとき定義点以外の空間の点における値は隣接する定義点での値の算術平均によって評価する。密度の輸送方程式(3)式の対流項には中心差分の他にドナー・セル法[8]とQUICK法[9]を用いた近似を行う。(3)式右辺の第2項の各項をドナー・セル法では

$$\begin{aligned}\nabla_i(\rho u)=\frac{1}{2\Delta x_i}\{&u_{i+1/2}(\rho_{i+1}+\rho_i)\\&-u_{i-1/2}(\rho_i+\rho_{i-1})\\&+|u_{i+1/2}|(\rho_{i+1}-\rho_i)\\&-|u_{i-1/2}|(\rho_i-\rho_{i-1})\}\end{aligned} \tag{13}$$

とし，QUICK法では

$$\begin{aligned}\nabla_i(\rho u)=\frac{1}{16\Delta x_i}\{&u_{i+1/2}(-\rho_{i+2}+9\rho_{i+1}+9\rho_i-\rho_{i-1})\\&-u_{i-1/2}(-\rho_{i+1}+9\rho_i+9\rho_{i-1}-\rho_{i-2})\\&+|u_{i+1/2}|(\rho_{i+2}-3\rho_{i+1}+3\rho_i-\rho_{i-1})\\&-|u_{i-1/2}|(\rho_{i+1}-3\rho_i+3\rho_{i-1}-\rho_{i-2})\}\end{aligned} \tag{14}$$

と近似する。ここで∇_iはx_i方向の差分演算子であり，右辺のiは離散化指標を示す。これらは保存性を備えた上流差分である。

この離散化近似を行うと(2)式，(3)式，(4)式の支配方程式はデカルト座標系の成分によって次のように表される。

$$\nabla_i u_i=D=0 \tag{15}$$

$$\overset{n+1}{\rho_s}=\rho_s+\Delta t\{-\nabla_i(\rho_s u_i)+Rs^{-1}\nabla_i^2\rho_s\} \tag{16}$$

$$\overset{n+1}{\rho}\,\overset{n+1}{u_i}=\Delta t(-\nabla_i\phi+a_i) \tag{17}$$

ここで上付きの添字nは時間の離散化指標であり，簡単のため第n時間ステップの指標は省略する。(17)式のa_iはn時間ステップの流場から計算される量であり，

$$\begin{aligned}a_i=\rho u_i/\Delta t-\nabla_j(\rho u_i u_j)+Re^{-1}\nabla_j^2 u_i\\-\rho_s Fn^{-2}\delta_i^3\end{aligned} \tag{18}$$

で与えられる。ここでδ_i^3はクロネッカーのデルタである。

連続の条件(15)式は直接解かず，速度圧力同時反復法[10]によって満足させる。(15)式と(17)式から導かれる圧力のポアソン方程式を発展型の偏微分方程式に変換して得られる関係式

$$\overset{m+1}{\phi}=\overset{m}{\phi}-\omega\overset{n+1}{D} \tag{19}$$

と(15)式を用いて第$(n+1)$ステップでの速度場の発散が10^{-4}より小さくなるまで速度と圧力を反復計算する。ただし反復回数の上限は50回とし，それまでに収束しないときはそのまま時間ステップを進める。ここで係数ωは$\rho\sim1$より，

$$\omega=\omega_0/\{2\Delta t(1/\Delta x_i)\} \tag{20}$$

と与える。ここでΔtは時間増分，Δx_iは格子間隔であり，ω_0は緩和係数で0.8とする。

3. 結果と考察

深さH，長さ$L=20H$の2次元水路において左端から$x_1=x_0=H$の位置に水門を設置し，水門の左側には右側の流体よりも密度が$\Delta\rho/\rho_0=0.02$だけ重い流体を入れる。水門を開放した時刻を$t=0$とし，その後の重力流の発生を計算する。格子間隔が$\Delta x_1=\Delta x_3=0.05$の一様な直角格子系を用い，時間増分は$\Delta t=0.005$とする。

自然界における重力流はその規模が大きいため，レイノルズ数は非常に高く，通常乱流である。計算で解像できる流れのスケールは限られているため，まず他の理論モデルと同様に底面の境界層の影響は小さいものと仮定し，壁面でfree-slip条件を課した計算を行う。運動量の方程式には数値散逸を導入しないので，上記の格子系で計算できるレイノルズ数は低く，実験室レベルよりさらに少し低い$Re=1000, 2000$の2つの場合の計算結果を示す。しかし逆にこの程度の低レイノルズ数では壁面の境界層の影響が大きくなる可能性がある。そこで次に壁面でno-slip条件を課した計算を行い，実験結果と比較する。

また媒質の拡散は流体の分子粘性拡散より小さいので，パラメータRsはReより大きく設定し，密度の輸送方程式を中心差分で近似した場合には$Rs=2000$，ドナー・セル法やQUICK法を用いて数値散逸を導入した場合は$Rs=10^6$とする。

まず密度が不連続に変化する界面における数値スキームの挙動を調べるため，密度の輸送方程式の離散化に中心差分およびドナー・セル法とQUICK法による上流差分を用いた比較計算を行った。Fig. 1に重力流が進行する壁面上の密度分布を示す。中心差分とQUICK法の場合にはほぼ

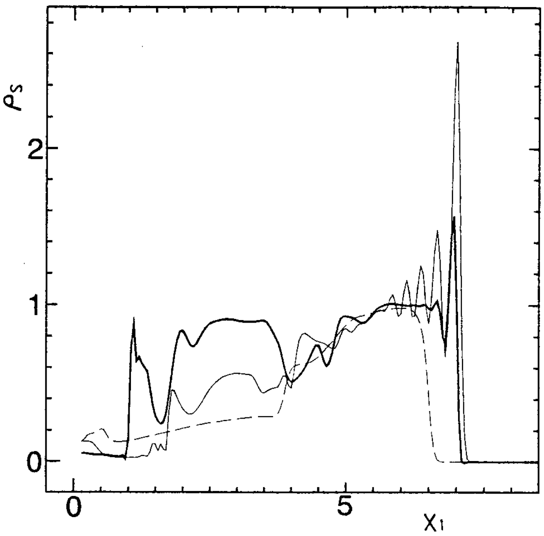

Fig. 1 Comparison of density distributions at the bottom between the difference schemes at $t=12$. thick line: QUICK method, thin line: Centred differencing, broken line: Donor-Cell method.

同じ位置で鋭い密度界面が捉えられているが，後方に数値的な振動が見られる。中心差分の場合には密度 ρ_s のオーバーシュートは初期値の3倍近くまで達し，後方にも長引いている。ドナー・セル法の場合にはこのような数値的な振動は見られないが，全体的にならされており，界面の密度勾配も他の2つの場合より小さい。以上の結果は数値散逸が数値的な振動を抑える効果があることを示しているが，低次の数値散逸は密度界面を弱めてしまう恐れがあることがわかる。そこで以下では QUICK 法を用いた場合の計算結果を示す。

まず壁面では free-slip 条件を課し，境界層を解像しない場合の計算を行った。Fig. 2 は密度場 ρ_s の等値線の時間変化であり，重力流が進行する様子を示している。水門の左側にあった重い流体は軽い流体の下に潜り込み，右方に進行し始める。重力流の先端はほぼ一定速度で進行し，その後には底面に沿って長く伸びた成層が形成される。進行部の高さ h は水門開放直後は水路の深さ H の半分，$h=0.5H$ であるが，$t=8$ から $t=20$ まではほぼ $h=0.45H$ で一定，その後次第に減少して $t=40$ では $h=0.35H$ になる。一方，軽い流体は上面に沿って左方に流れ込み，左端の壁にぶつかる。その結果，軽い流体が回り込んで重い流体を巻き上げ，内部段波が発生する。この内部段波は重力流の先端を追いかけるように進行し，$t=20$ のときに追いつく。

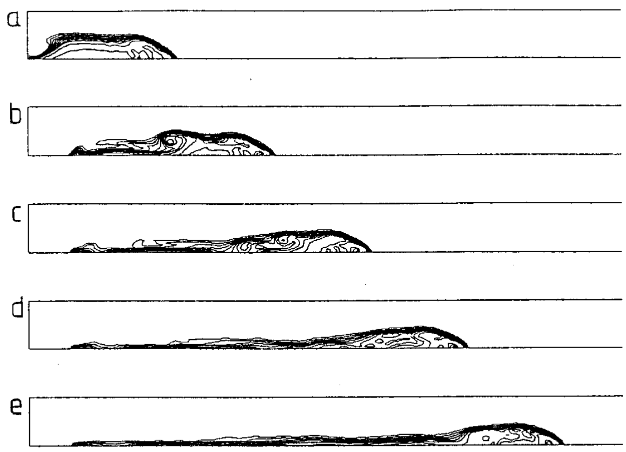

Fig. 2 Development of a gravity current in a lock-exchange flow computed with the free-slip boundary conditions at $Re=1000$. Density contours at (a) $t=4$, (b) $t=8$, (c) $t=12$, (d) $t=16$, (e) $t=20$. The interval of contours is 10% of the initial density difference.

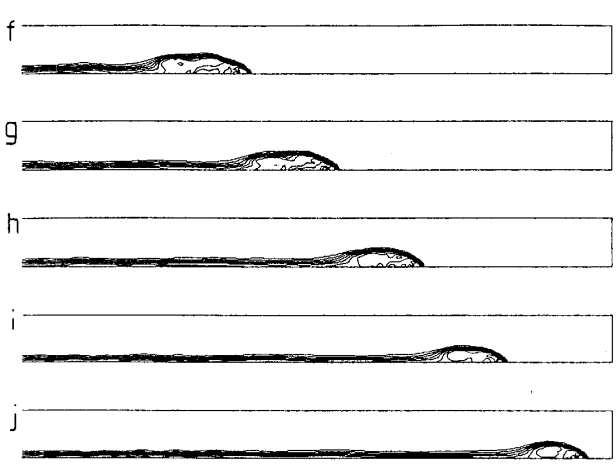

Fig. 2 (continued.) (f) $t=24$, (g) $t=28$, (h) $t=32$, (i) $t=36$, (j) $t=40$.

Fig. 3 にこの重力流の進行部の内部構造を示す。進行部は密度界面に囲まれており，内部の密度場は複雑であるが，全体的には前半部は重い流体が占めており，後半部は軽い流体を取り込んでいる様子がわかる。進行部の内部は進行方向の速度成分が $0.4U$ から $0.6U$ までの領域となっており，先端部付近は上向きに速度 $0.25U$ 以上の流れが生じて軽い流体が持ち上げられ，進行部の上側を逆向きに動いている。密度と流れ方向の速度成分の等値線は同じ様なパターンを示しており，密度界面に沿って速度勾配の大きい剪断層が形成されていることがわかる。

レイノルズ数を $Re=2000$ に上げた結果を Fig. 4 に示す。$Re=1000$ の場合との主な違いは重力流の先端から後方に鉛直方向の速度成分が正負交互に変化し，密度界面が波状に変形することである。上下動によって上側の軽い流体が重力流に巻き込まれていく流れのパターンは実験[1]でも観察されており，ケルビン－ヘルムホルツの不安定の結果生じる流れのパターンと定性的に一致する。

次に壁面において no-slip 条件を課し，底面境界層の影響について調べた。Fig. 5 にこのときの密度場の時間変化を示す。重力流は free-slip 条件の場合と同じように最初ほ

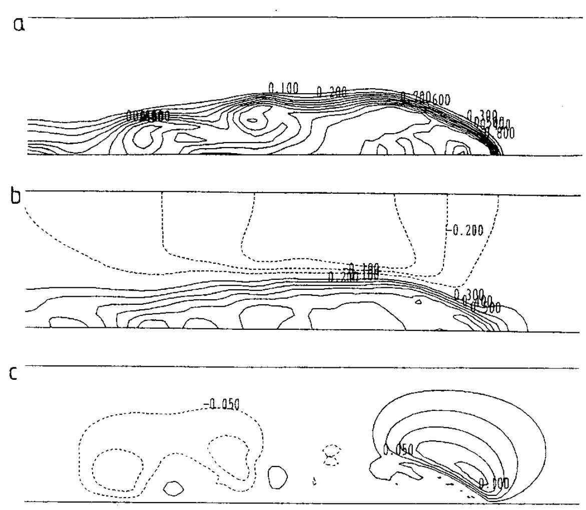

Fig. 3 The flow structure of the head of a gravity current computed with free-slip conditions at $Re=1000$. Contours of (a) density, (b) horizontal velocity and (c) vertical velocity at $t=12$.

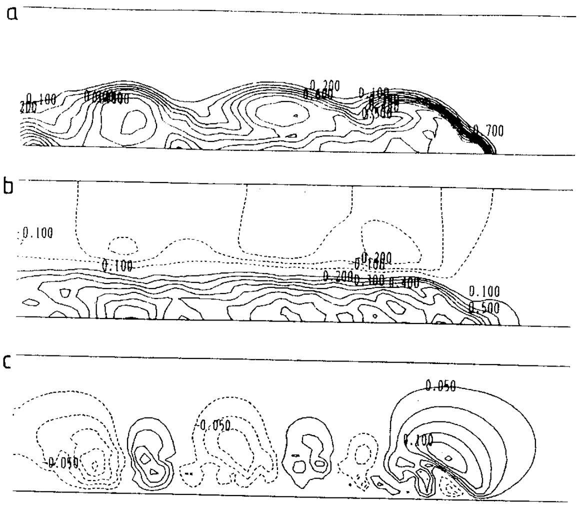

Fig. 4 The flow structure of the head of a gravity current computed with free-slip conditions at $Re=2000$. Contours of (a) density, (b) horizontal velocity and (c) vertical velocity at $t=12$.

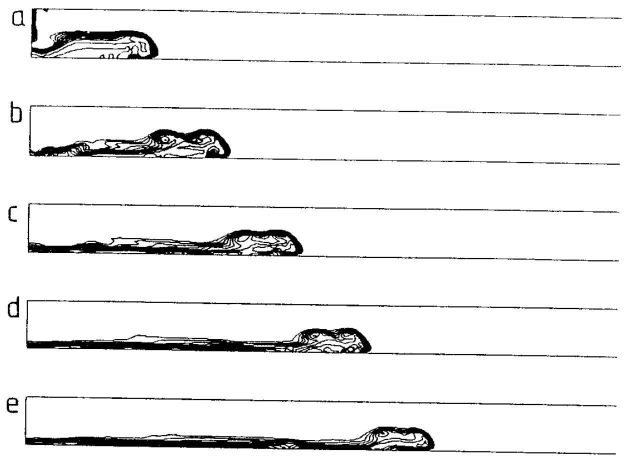

Fig. 5 Development of a gravity current in a lock-exchange flow computed with the no-slip boundary conditions at $Re=1000$. Density contours at (a) $t=4$, (b) $t=8$, (c) $t=12$, (d) $t=16$, (e) $t=20$. The interval of contours is 10% of the initial density difference.

ぼ一定速度で進行するが，その進行速度は遅い。内部段波が先端に追いついた $t=24$ 以降，先端部は減速し，小さくなる。進行部の内部構造を Fig. 6 に示す。Fig. 3 と比較すると，進行部の形状が大きく異なり，厚さが増して長さが短くなっていることがわかる。free-slip 条件の場合には最先端は壁面上であったが，no-slip 条件の場合には壁面から $1/8H$ だけ離れた位置にあり，先端部が丸まった形状に変化している。これは底面境界層の直接の影響である。

重力流の先端の位置 x_h を密度が $\rho s=0.5$ より大きい点の x_1 座標の最大値として求めた。その時間変化を Fig. 7 に示す。free-slip 条件を課した場合先端は最初一定速度で進行し，途中から減速する。中心差分あるいは QUICK 法を用いた場合には時間 $0\leqq t\leqq 20$ の範囲で先端は一定速度 0.5 で進行するが，ドナー・セル法を用いた場合には進行速度はこれより小さく，一定速度で進行する時間も半分程度で短い。また no-slip 条件を課した場合一定速度の期間ははっきりせず，速度は減少する。

水門を開放したときのポテンシャルエネルギーが厚さ $H/2$ の 2 層の重力流の運動エネルギーに変換されると仮定すると，重力流の進行速度は $0.5U$ ($U=\sqrt{\Delta\rho/\rho_0 gH}$) となり，この結果は多数の実験によって確かめられている。free-slip 条件を課した計算ではこの仮定が成り立っているが，ドナー・セル法を用いた場合には低次の数値散逸のために混合が速められて進行速度が減少したと考えられる。

no-slip 条件を課した場合の計算結果を検証するため，水槽実験を行った。長さ $L=2.0$ m，幅 $B=0.5$ m の水槽を用いて水深 $H=0.1$ m，水門距離 $x_0=0.1$ m，密度差 $\Delta\rho/\rho_0=0.02$ の条件で可視化実験を行い，重力流の先端位置を計

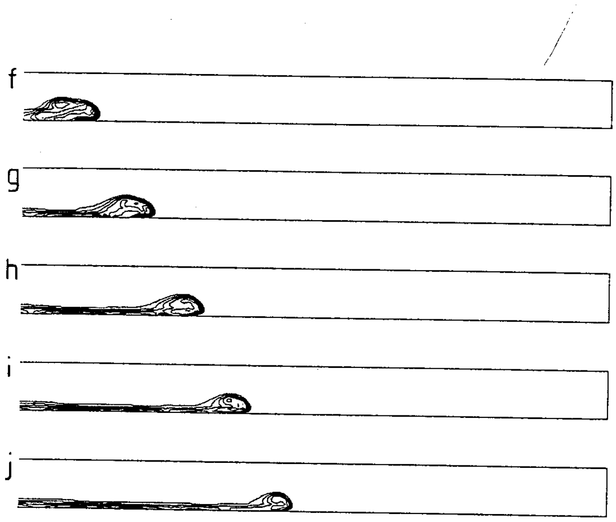

Fig. 5 (continued.) (f) $t=24$, (g) $t=28$, (h) $t=32$, (i) $t=36$, (j) $t=40$.

測した。実験のレイノルズ数は $Re=10^4$ 程度である。その結果を Fig. 7 に示す。no-slip 条件の計算結果は $0\leqq t\leqq 20$ の範囲では実験結果と一致するが，$t\leqq 20$ では計算結果の方が減速が大きく，わずかにずれる。このずれの原因については計算の方がレイノルズ数が一桁小さいことが考えられるが，明かではない。

最後に no-slip 条件を課した場合の計算結果を用いて進行する重力流が外部の流体を取り込んで混合する過程について調べる。ある閾値以上の密度を持つ流体の体積の領域全体の流体の占める体積に対する割合の時間変化を Fig. 8 に示す。この図には密度 ρ_s の領域全体の平均値もプロットされているが，これは常に一定値 0.05 を取り，領域全体の質量は保存されていることがわかる。図中の数字は密度

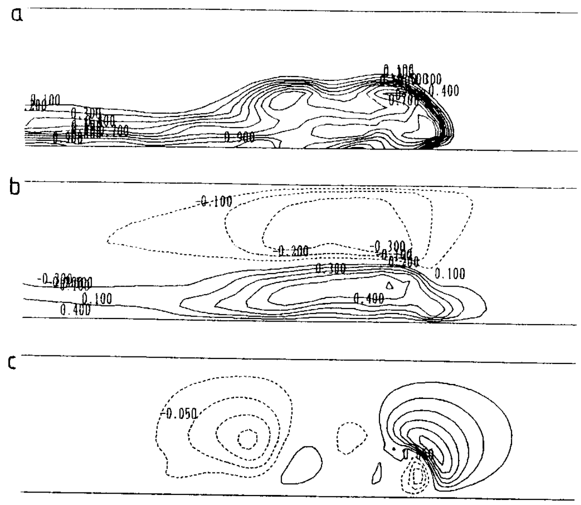

Fig. 6 The flow structure of the head of a gravity current computed with no-slip conditions at $Re=1000$. Contours of (a) density, (b) horizontal velocity and (c) vertical velocity at $t=12$.

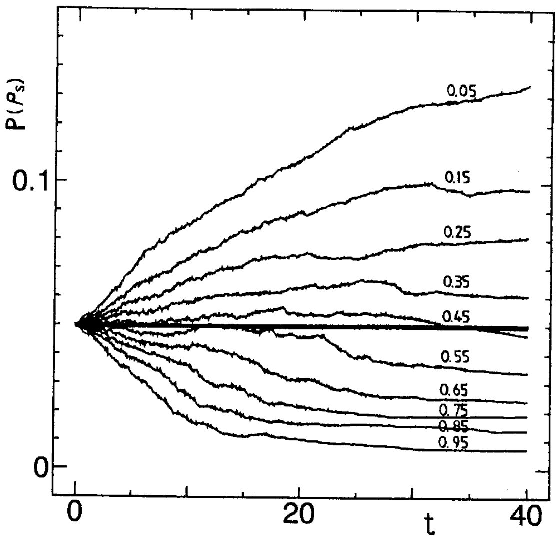

Fig. 8 Proportion of volumes of fluid beyond given density thresholds with time. Numbers attached to lines in the figure denote the thresholds. The total mass is also shown by thick line.

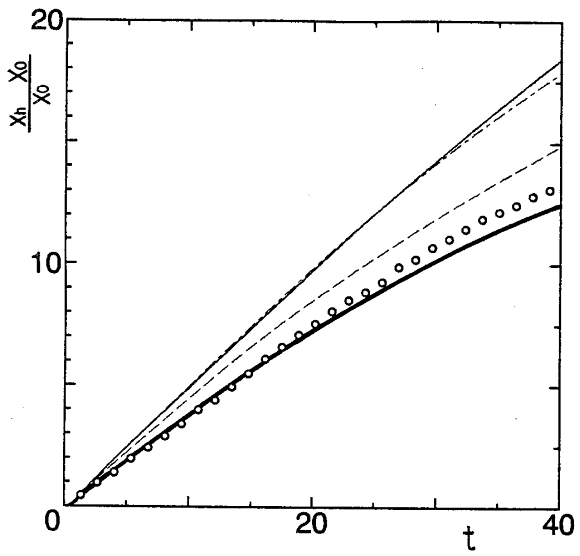

Fig. 7 Position of the front of a gravity current with time.; thin line: QUICK method with free-slip conditions; dash-dotted line: Centred differencing with free-slip; broken line: Donor-cell method with free-slip; thick line: QUICK method with no-slip conditions; circles: experiment.

ρ_s の閾値を示しており，最も低い値を取る $P(\rho_s\geqq 0.95)$ の曲線は重力流の内部にあり，初期値 $\rho_s=1.0$ からほとんど変化せず，混合されていない流体の割合を示しており，最も高い値を取る $P(\rho_s\geqq 0.05)$ の曲線はほぼ重力流に含まれる流体全体の割合を示している。$P(\rho_s)$ の各曲線の広がり具合いがその間の密度の流体の混合の程度を表すことになる。水門開放直後から重い流体も軽い流体もほぼ同じ程度に混合が進み，その結果 $t=20$ には最も重い $\rho_s\geqq 0.95$ の流体は初期値の20%以下になり，$t\geqq 20$ では重い流体の混合は横ばいになって，軽い流体の混合だけが進む。すなわち第1段階では重力流の全体で混合が進むが，進行速度が減少する第2段階にいると，混合は主に重力流の中央より後方にかけての軽い流体部分で続くと考えられる。

4. 結　　論

不均一非圧縮性流体のナビエ・ストークス方程式，連続方程式および密度の輸送方程式を2次元水路内で有限体積法によって解き，一定体積の均一流体をわずかに密度が小さい別の流体の中で瞬時に解放して lock-exchange 流の2次元重力流を発生させる計算を行った。微少な密度差の影響を高精度に計算するため，密度差の代表値に対する相対的な密度の変化量を基礎変数として用いた。境界や密度界面まで含めた質量に関する保存性を保持する定式化を行い，密度差を持つ2つの流体の総質量が不変に保たれることを検証した。また標準的な数種のスキームを用いて密度が不連続に変化する界面における数値的な挙動についても調べ，数値散逸が数値的な振動を抑制する効果があることを示した。初期の段階では重力流の先端は一定速度で進み，自己相似の段階に入ると減速する結果が得られた。また壁面において no-slip 条件と free-slip 条件を課した数値実験を行った結果，底面の境界層は重力流の先端の形状，内部構造に強い影響を与えることを明らかにした。まわりの流体を取り込むことによって密度が変化していく重力流内部の流体の体積を時間の関数として計算した結果，低レイノルズ数の重力流における混合は水門開放後直後から連続的に起こっていることが示された。

本研究は文部省科学研究費と造船学術推進機構からの補助を受けたことを記し，関係各位に感謝する。

参 考 文 献

1) J. E. Simpson: Gravity Currents in the Environment and the Laboratory, Ellis-Hornwood/Halstead Press, 1987
2) J. E. Simpson: Gravity Currents in the Laboratory, Atmosphere, and Ocean, Ann. Rev. Fluid Mech. Vol. 14, (1982), 213-234
3) J. W. Rottman and J. E. Simpson: Gravity Currents Produced by Instantaneous Release of a Heavy Fluid in a Rectangular Channel, J. Fluid Mech. Vol. 135, (1983), 95-110
4) M. A. Hallworth, J. C. Phillips, H. E. Huppert and R. S. J. Sparks: Entrainment in turbulent gravity currents, Nature, Vol. 362, (1993), 829-831
5) J. Hacker, P. F. Linden and S. B. Dalziel: Mixing in Lock-Release Gravity Currents, in Proc. 4th Inter. Symp. on Stratified Flow, Grenoble, (1994)
6) B. J. Daly and W. E. Pracht: Numerical Study of Density Current Surges, Phys. Fluids, Vol. 11, (1968), 15-30.
7) 馬場信弘，木村直貴，高松健一郎：密度成層流の混合の計算，関西造船協会，第223号，(平成7年3月)，169-174
8) R. A. Gentry, R. E. Martin and B. J. Daly: An Eulerian Differencing Method for Unsteady Compressible Flow Problems, J. Comput. Phys. Vol. 1, (1966), 87-118
9) B. P. Leonard: A Stable and Accurate Convective Modelling Procedure Base on Quadratic Upstream Interpolation, Comput. Meth. Appl. Mech. Eng. Vol. 19, (1979), 59-98
10) A. J. Chorin: Numerical Solution of the Navier-Stokes Equations, Math. Comput. Vol. 22, (1968), 745-762