高アスペクト比近似に基づく定式化による滑走板の未定浸水面形状の決定

正員 松 村 清 重* 水 谷 友 基**

Determination of the Unknown Wetted Surface of Planing Plates by a Formulation Based on High Aspect Ratio Approximation

by Kiyoshige Matsumura, *Member* Yuuki Mizutani

Summary

It is intended to solve a problem to determine the unknown wetted surface of free−running planing plate. Efforts from the view point of the perturbation method are paid to analyze both the near and far field of flow around a restrained planing plate with comparably large breadth such a wave-dozer, disregarding gravitational effects. Matching process of each height of water surface leads to a non-linear system of integro-differential equations to determine the distributions of both the wetted length and the apparent circulation around the plate. Serious solution of reduced single integral equation, still holding 3-dimensional characteristics but the so-called downwash effects, diverges from the assumed high aspect ratio solution because of the logarithmic non-linearity. The equation gains an insight into static stability in performance and the limitation in height to restrict the plate in exposure above still water. The obtained configuration of wetted surface draws well the behaviour of the spray root line crossing the hard chine, however it is unfortunately rather wide to coincide with the experimental one. Free-running condition is estimated.

1. 緒　　言

滑走艇の設計あるいは推進性能推定を困難にしている最大の要因は，浸水面形状が静止時と航走時で大幅に異なることである。流体力学の問題は一般に境界値問題を解くことに帰着され，すべての流体境界で境界条件を設定して初めて問題が閉じる。しかし，滑走艇周りの流れを求める問題では，浸水面が流体境界の1つであるにも関わらず，その形状は未知であり，静止時浸水面で代用するにも違いが大きすぎる。したがって，この問題は，流場の決定と同時に境界自身をも決定対象とする未定境界問題となってしまう[1]。本論は，このような滑走艇の未定境界問題を解くことを試みたものである。

自由表面波形を求める問題は，同じ範疇に属し，自由度が大きいため，より複雑である。しかし，非線形影響を特に問題にしない限り，静止水面を仮の境界とし，流場の決定後に波高を決定できる。このような同時性が要求されない問題を除外すれば，船舶流体力学上，最初に論じられた未定境界問題は，Wagner[2]の2次元鈍頂角楔の落下衝撃に関するものである。彼は，流場の決定に際し，水面の盛り上がり（pile up 効果）を同時に考慮することにより未定境界問題を閉じさせ，pile up を考慮しない場合に比べて浸水幅が $\sqrt{2}$ 倍だけ広いことを見いだした。この手法は dead rise angle を持つ滑走艇の問題にも適用され，浸水面は船首接水点を頂点とする三角形であるとされた。しかし，spray root line（浸水面の境界線）と同様，船底等圧線も直線的になり，このことは平野ら[3,4]の実験事実に合致しないとして，松村ら[5]は自己相似性を緩めることにより未定境界問題の新しい解法を示した。彼らは接水点付近の波面形状に未解明の仮説を置いているが，放物線状の spray root line，ブーメラン状の船底圧力分布，スプレー流量等

* 大阪大学工学部
** 住友重機械工業(株)（研究当時大阪大学大学院工学研究科在学）

原稿受理　平成8年1月10日
春季講演会において講演　平成8年5月15，16日

の実験事実がよく説明されている。しかし，両理論が3次元的船首近傍場の理論から，滑走艇全体の理論にまで昇華するには，通常の細長体理論に則した定式化からの脱却を要し，相当の困難が予想される。

一方，2次元滑走板の場合，自由流線理論による解が知られている。重力影響は考慮できないが，滑走板重量と重心を与えれば，浸水長とトリム角は定まり，自由滑走状態の流れが得られる。しかし，滑走板まわりの循環流れに伴い，波高は無限遠方で対数的に低くなるため，静水面の高さは特定できていない。したがって，実は滑走板の上下位置も不明であり，逆に，浮上量とトリム角を指定した拘束状態での浸水長も定めることができない。Wu[6]は，摂動論的立場から，自由流線流れを滑走板近傍（近場）解であると考え，波高の対数特異性を遠場で吸収することにより，拘束状態でも浸水長を定め得ることを示した[7]。これは，遠方で2次元波渦ポテンシャル[8]が対数特異性を失うことに依拠しており，遠場で重力影響を考慮した効果である。特異性の解消に的を絞れば，重力影響に限らず，馬蹄渦のような3次元渦もその役割を果たす。実際，渦近傍では対数ポテンシャル的挙動であるのに対し，遠方ではその性質を失う[9]。

浸水面形状が既知であり，重力影響の有無を除けば，滑走艇問題は翼の問題と等価である。以上の情況を考えれば，2次元解と3次元渦をキーワードとする理論，すなわちPrandtlの揚力線理論の定式化を滑走艇の場合にも適用し，その有効性を試すことは自然である。この試みは既に丸尾[10]によってなされ，重力影響を考慮した滑走艇理論の先駆けとなった。未定浸水面についても既に言及されていたが，実際には浸水面形状は既知として扱われた。その後，Shenら[9]は，重力影響を無視しているが，摂動論に基づく滑走艇理論を示した。しかし，滑走艇近傍流れとしてGreenの2次元有限弦長滑走板理論（自由流線理論）が用いられており，滑走板の輪郭は与えられているため，未定境界問題ではなく，むしろスプレーの射出角を求める問題になっている。別所[11]は重力影響も考慮した未定境界問題についてはじめて論じ，滑走艇の静的不安定性にも言及した。ただ，完全な未定境界問題が解かれているわけではなく，与えた浸水長分布からの摂動として浸水長が求められた。

本論は，これらの研究に倣い，重力影響を無視した場合についてではあるが，高アスペクト比近似に基づき，滑走艇の未定浸水面形状の決定法について論じたものである。滑走艇近傍流れとして半無限弦長滑走平板を考え，目的通り浸水長を未定とした。対数非線形項を含む浸水長分布を定める積分方程式を導き，興味深い結果も得たので，ここに実験結果と併せて報告し，ご批判を仰ぐ次第である。

2. 理　　論

Fig. 1に示すように$z=0$を静水面とする座標系を設定し，半幅1の半無限長の長方形板が，$x=0$を後端とし，トリム角$\tau>0$，速度1で定常滑走しているものとする。ただし，長さの次元は滑走板の半幅b，速度の次元は一様流速U_∞で無次元化したものであり，以後もこの原則に従う。

拘束状態の流場が求められない限り自由航走状態の流場も求め得ない，という立場を取り，前者の場合に絞って流場解析を進める。したがって，トリム角の他に，後端高さH_0も与える。Deadrise，底面に捻れを有する場合にも対処できるように，滑走板底面の静止水面からの高さ$H(x, y)$を

$$H(x, y)=H_0(y)-\tau(y)\cdot x \tag{1}$$

とする。(1)式では，船首フレアー等でバトックラインが曲線となる場合は除外されている。その場合，かえって浸水面の自由度を小さくし，未定境界問題を歪小化するためである。反面，全体にわたって$H_0>0$の特殊な場合については，可能である限り考察の対象とする。この場合，静止時に全く接水していないので，水面攪乱等で強制的に接水させた結果，落ちつく流場を求めることになる。

簡単のため重力影響を無視する。

$$\tau(y)\ll 1, \quad H_0(y)\ll 1 \tag{2}$$

とし，その結果，未知の浸水長分布$l_W(y)$が

$$l_W(y)\ll 1 \tag{3}$$

になったと仮定する。これは，l_Wを翼弦長と見なせば，高アスペクト比の仮定であり，Prandtlの揚力線理論に準じた理論を構成できる。以後，接合漸近展開法に従い，流場を近場と遠場に分けて解析する。ただし，揚力線理論にならい，一部の高次項は低次項に含め，摂動論的consistencyよりも，物理的意味の明確な浸水長に関する積分方程式を導出する。結果的に$l_W(y)\ll 1$の仮定は不適当であると判明するが，それでも物理的考察に基づいた近似理論と考える。

2.1 近場

滑走艇近傍流れは，仮定により，y=一定の断面ごとの2次元ポテンシャル流れと見なせる。したがって，Fig. 2に示すように，一様流中に置かれた，トリム角を$\tau(y)$，未定浸水長を$l_W(y)$とする半無限長2次元滑走平板まわりの流れを求めればよい。

揚力線理論と同様，滑走艇近傍では後曳渦（流場内に渦の実体はないが，流体力学的表現が渦の形となるため，翼

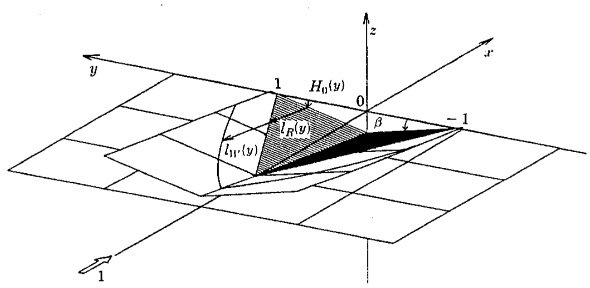

Fig. 1 Coordinate system and definitions of basic quantities

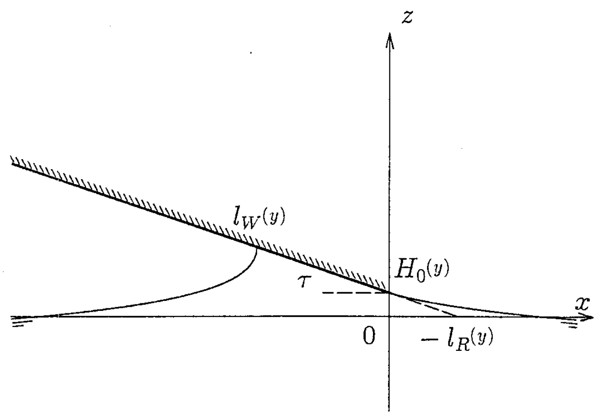

Fig. 2 Flow configuration in near field

理論用語として用いる）による上向き誘導速度 $w_i(y)$（実際には下向きの downwash）が生じる。このため，水面は傾斜し，有効迎え角 $\alpha(y)$ は

$$\alpha(y)=\tau(y)+w_i(y) \tag{4}$$

となる。遠場解の漸近形を考慮し，downwash の項を予め取入れることにすると，速度ポテンシャル Φ, 波高 h は

$$\Phi(x,z;\,y)=x+\varphi_1(x,z;\,y)+w_i\cdot z+\cdots \tag{5}$$

$$h(x;\,y)=\hbar_1(x;\,y)+w_i\cdot x+\cdots \tag{6}$$

と展開される。$\varphi_1, \hbar_1$ は

$$[\mathrm{L}]\quad \frac{\partial^2\varphi_1}{\partial x^2}+\frac{\partial^2\varphi_1}{\partial z^2}=0 \quad \text{for} \quad z<0 \tag{7}$$

$$[\mathrm{B}]\quad \frac{\partial\varphi_1}{\partial z}+w_i=\frac{\partial H}{\partial x} \quad \text{on } z=0 \quad \text{for } -l_W<x<0 \tag{8}$$

$$[\mathrm{P}]\quad \frac{\partial\varphi_1}{\partial x}=0 \quad \text{on } z=0 \quad \text{for } x<-l_W,\ x\geqq 0 \tag{9}$$

$$[\mathrm{K}]\quad \frac{\partial h_1}{\partial x}=\frac{\partial\varphi_1}{\partial z} \quad \text{on } z=0 \text{ for } x<-l_W,\ x>0 \tag{10}$$

$$[\mathrm{F}]\quad \hbar_1(0;\,y)=H_0 \tag{11}$$

$$[\mathrm{S}]\quad \hbar_1(-l_W;\,y)+w_i\cdot(-l_W)=H_0-\tau\cdot(-l_W) \tag{12}$$

の関係を満足する必要がある。[L]は連続の式，[B]は(4)式と対応する物体表面条件を表す。[P]，[K] は波面における条件であり，[P]は Kutta の条件を含む圧力条件，[K]は運動学的条件を表す。[F] 及び [S] は，それぞれ滑走板後方，前方における波高の規準点を与え，滑走板高さと波高の一致を述べたものである。

φ_1 は，$\hbar_1$ と独立した方程式 [L]，[B]，[P] から求められる。これは翼弦長を l_W とする薄翼理論の定式化に他ならない。φ_1 に対応する複素ポテンシャルを導入すれば，

$$\varphi_1=\{\tau(y)+w_i(y)\}\cdot\mathrm{Re}[F_1(\zeta;\,y)] \tag{13}$$

$$F_1=\mathrm{i}\{\zeta-\sqrt{\zeta(\zeta+l_W)}\} -\frac{\pi l_W}{2\pi\mathrm{i}}\left\{\log\frac{2\zeta+l_W+2\sqrt{\zeta(\zeta+l_W)}}{l_W}+\mathrm{i}\,\pi\right\} \tag{14}$$

$$\zeta\equiv x+\mathrm{i}\,z \tag{15}$$

を得る。

φ_1 が求められたので，[K] に従って積分すれば $\hbar_1$ が求められる。ただし，$x>0$ の下流部分には[F]，$x<-l_W$ の上流部分には [S] が課される。その結果，両者は統一的に次のように表される。

$$\hbar_1=(\tau+w_i)\left\{-x+\mathrm{sgn}(2x+l_W)\sqrt{x(x+l_W)} -\frac{l_W}{2}\cdot\log\frac{|2x+l_W|+2\sqrt{x(x+l_W)}}{l_W}\right\}+H_0(y) \tag{16}$$

波面の挙動について考察し，h に課した [F]，[S] の条件が適切であることを確認しておく。後端で，h は

$$h\sim H_0+(\tau+w_i)\left\{-x+\frac{2}{3\sqrt{l_W}}x^{3/2}+\cdots\right\} \quad \text{as} \quad x\to 0_+ \tag{17}$$

と展開され，水の切れた波面の様子を表している。[F]は，波高を指定する条件に過ぎないが，φ_1 に課された Kutta の条件[P]と相まって，波面の水切れを要求したことになる。一方，$x=-l_W(y)$ の点は，spray root になることが要求される。波高では

$$h\sim H_0+(\tau+w_i) \times\{l_W-2\sqrt{l_W}\sqrt{-(x+l_W)}-(x+l_W)+\cdots\} \quad \text{as} \quad x\to -l_{W-} \tag{18}$$

のように表現され，spray root 近傍に特有の波面[2]，$\sqrt{-(x+l_W)}$ が生じている。これは翼理論でいう前縁特異性に付随して生じたものであり，[S]によるものではない。Spray root であるからには，スプレーとして系外流出する吸い込み特異点が，Φ に表現されていて然るべきである。しかし，スプレー厚さは $\pi/4\cdot\tau^2\cdot l_W$ であり，$O(\tau^2)$ の項となるため現れてこない。同じ理由で，第 1 近似の [S] にもスプレー厚さを表現すべきではなく，単に波高と底面高さの一致を求めればよい。この意味であれば，[S] をスプレー条件と呼んでもよい[5]。

以上で，l_W, w_i を未知としたまま，近場解が確定した。しかし，$x\to\pm\infty$ のとき，

$$h\sim(\tau+w_i)\left\{\frac{l_W}{2}\log\frac{1}{|x|}-\frac{l_W}{2}\log\frac{2}{l_W} +(1-\log 2)\frac{l_W}{2}+O\left(\frac{1}{x}\right)\right\} +H_0(y)+w_i\cdot x+\cdots \quad \text{as } x\to\pm\infty \tag{19}$$

のように対数特異性を持つため，純 2 次元問題としては，無限遠方の基準水面を特定し得ないという欠陥がある。この特異性は，Φ の $x\to\infty$ における挙動

$$\Phi\sim x+(\tau+w_i)\mathrm{Re}\left[-\frac{\pi l_W}{2\pi\,\mathrm{i}}\{\log(x+\mathrm{i}z)+\mathrm{i}\pi\}\right] +w_i\cdot z+\cdots \quad \text{as } x\to\infty \tag{20}$$

から，2 次元平板まわりの拘束渦に起因していることがわかる。したがって，次節の遠場で，2 次元拘束渦を 3 次元拘束渦の局所的表現と見直すことにより，近場解に意味を持たせることができる。

2.2 遠場

滑走板全体を見渡せる場を考える。アスペクト比が大きいと仮定しているので，Fig. 3 に示すように，滑走板の浸水面は，y 軸の $-1<y<1$ の部分に縮退したと見なすことができる。

速度ポテンシャル $\Phi(x, y, z)$，波高 $h(x, y)$ を

$$\Phi = x + \phi_1(x, y, z) + \cdots \tag{21}$$

$$h = h_1(x, y) + \cdots \tag{22}$$

と展開し，線形化すると，ϕ_1, h_1 は以下の関係を満足する必要がある。

$$[\mathrm{L}] \quad \frac{\partial^2\phi_1}{\partial x^2}+\frac{\partial^2\phi_1}{\partial y^2}+\frac{\partial^2\phi_1}{\partial z^2}=0 \quad \text{for } z<0 \tag{23}$$

$$[\mathrm{P}] \quad \frac{\partial\phi_1}{\partial x}=0 \quad \text{on } z=0 \tag{24}$$

$$[\mathrm{K}] \quad \frac{\partial h_1}{\partial x}=\frac{\partial\phi_1}{\partial z} \quad \text{on } z=0 \tag{25}$$

$$[\infty] \quad \phi_1\sim 0, \quad h_1\sim 0 \quad \text{as} \quad x\to-\infty \tag{26}$$

[P] は，未知関数 $\Gamma(y)$ を用いて，次のように書き換えることができる。すなわち，浸水面(線)より後方の静水面上では，

$$\phi_1(x, y, 0_-) = -\Gamma(y)/2 \quad \text{for } -1<y<1 \tag{27}$$

それ以外の静水面上では［∞］にも従う必要から，

$$\phi_1(x, y, 0_-) = 0 \tag{28}$$

(23) (27) (28)式を満足する ϕ_1 は

$$\phi_1=\frac{1}{4\pi}\int_{-1}^{1}\Gamma(\eta)\frac{z}{(y-\eta)^2+z^2} \times\left\{1+\frac{x}{\sqrt{x^2+(y-\eta)^2+z^2}}\right\}d\eta \quad \text{for } z<0 \tag{29}$$

と表される。ϕ_1 は，浸水面後方の静水面上に，強さ密度 $\Gamma(y)$ の後曳渦対（微小馬蹄渦）を分布させたものである (Fig. 3 参照)。[K] に従うように積分すれば，h_1 は

$$h_1=\frac{1}{4\pi}\mathcal{H}\!\!\int_{-1}^{1}\Gamma(\eta)\frac{x+\sqrt{x^2+(y-\eta)^2}}{(y-\eta)^2}d\eta \tag{30}$$

となる。ただし，積分記号の H は $\eta=y$ で有限部分を取ることを表す。滑走板前方では

$$h_1\sim\frac{-1}{2x}\cdot\frac{1}{4\pi}\cdot\int_{-1}^{1}\Gamma(\eta)d\eta \quad \text{as} \quad x\to-\infty \tag{31}$$

の挙動をするから，(30)式の h_1 は，[∞]を満足すると共に，$z=0$ が静水面となることを保証している。滑走板後方では

$$h_1\sim\frac{2x}{y^2}\cdot\frac{1}{4\pi}\cdot\int_{-1}^{1}\Gamma(\eta)d\eta \quad \text{as} \quad x\to+\infty \tag{32}$$

のように，波高の等高線が放物線を描きつつ発散する。しかし，この特異性は，非線形影響，あるいは重力影響の考慮により除去可能であるため，以後，このことに注意を払わない。

滑走板近傍では，ϕ_1, h_1 は，それぞれ次のように漸近展開される[12)13)]。

$$\phi_1\sim\mathrm{Re}\left[-\frac{\Gamma(y)}{2\pi\mathrm{i}}\{\log(x+\mathrm{i}z)+\mathrm{i}\,\pi\}\right] + w_i\cdot z+\cdots \quad \text{as} \quad x\to 0 \tag{33}$$

$$h_1\sim\frac{\Gamma(y)}{2\pi}\log\left(\frac{1}{|x|}\right) +\frac{1}{2\pi}\left\{-(1-\log 2)\Gamma(y)+\frac{1}{2}\mathcal{H}\!\!\int_{-1}^{1}\frac{\Gamma(\eta)}{|y-\eta|}d\eta\right\} + w_i\cdot x+O(x^2) \quad \text{as} \quad x\to 0 \tag{34}$$

ここに

$$w_i(y)\equiv-\frac{1}{4\pi}\cdot\frac{d}{dy}\oint_{-1}^{1}\frac{\Gamma(\eta)}{y-\eta}d\eta \tag{35}$$

である。ϕ_1 の 1 項目の対数項は拘束渦を表し，($\mathrm{i}\,\pi$) の項は後曳渦面上下のポテンシャル・ジャンプを表す。また，第 2 項目は downwash（表示符号は upwash）の効果を表す。それぞれに対応する波高が h_1 の 1，3 項目であり，拘束渦による対数的水面変位，後曳渦に誘起された局所的水面勾配を意味する。これらに対し，h_1 の 2 項目は，後曳渦ではなく，拘束渦が誘起する局所的な水面の盛り上がりを表し，1 項目の対数挙動を補うものである。h_1 の 3 項目が 2 項目に比べて高次項であるから，後曳渦の効果を揚力線理論ほど重視する必要はない。h_1 の対数的発散挙動は近場解(19)式に対応するものであるが，あくまでも無限遠方で静水面に漸近する(30)式の局所的挙動である。

2.3 浸水長の決定方程式

未知の関数 $l_w(y)$ 及び $\Gamma(y)$ を定めることを考える。これは，近場と遠場で求められた h の同一挙動(マッチング)を要求すればよい。(19)式と(34)式で，対数項同士を比較すると，次の関係を得る。

$$\Gamma(y)=\pi(\tau+w_i)l_w(y) \tag{36}$$

具体的には，次の Γ に関する積分方程式となる。

$$\frac{\Gamma(y)}{\pi l_w(y)}+\frac{1}{4\pi}\cdot\frac{d}{dy}\oint_{-1}^{1}\frac{\Gamma(\eta)}{y-\eta}d\eta=\tau(y) \tag{37}$$

これは，$\Gamma(\pm1)=0$ が満足されるならば，揚力線理論の積分方程式に他ならない。$l_w(y)$ は未知であるので，さらに，h の定数項の同一性を要求すると，

$$\frac{\Gamma(y)}{2\pi}\left\{\log\frac{2}{l_w(y)}-2(1-\log 2)\right\} +\frac{1}{4\pi}\mathcal{H}\!\!\int_{-1}^{1}\frac{\Gamma(\eta)}{|y-\eta|}d\eta=H_0(y) \tag{38}$$

の積分方程式を得る。(37)式と(38)式を連立させて解けば，$l_w(y)$, $\Gamma(y)$ を決定できるはずであり，また，近場の 2 次元

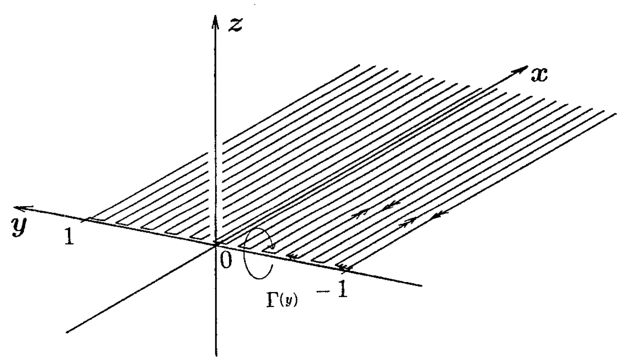

Fig. 3 Flow configuration in far field

問題の欠陥も解消される。(37)式は，h の対数項のマッチングにより得られたが，Φ について行っても同一の結果が得られる。それに対し，定数項は波高にのみ現れるから，滑走艇の未定境界問題を解く鍵は波高のマッチングにある。見かけフルード数が高いため，その必要性は認め難いが，今後の課題として近場においても重力影響を考慮することが考えられる。そのような場合，波高の対数挙動は見られない[8]にしても，定数項のマッチングは依然として必要と考えられる。

浸水長分布の相似則について考える。浸水長を支配しているパラメタは $\tau(y)$ 及び $H_0(y)$ の２つである。しかし，両方程式は，Γ について見れば線形であるので，τ が一定で，底面に捻れがない場合には，

$$\hat{\Gamma}(y)\equiv\frac{\Gamma(y)}{\tau} \tag{39}$$

$$l_R(y)\equiv-\frac{H_0(y)}{\tau} \tag{40}$$

と定義することにより，$l_R(y)$ のみをパラメタとする方程式に簡単化できる。滑走艇は通常 $H_0<0$ に設定されるので，$l_R(y)$ は静止時浸水長分布を意味する。自由浮体としての静止時浸水長と区別し，l_R を拘束静止時浸水長と呼ぶ。空中に拘束し，$l_R<0$ となる場合にも，同じ呼称を用いる。これらの定義のもとで，浸水長の決定方程式(37)，(38)式はそれぞれ

$$\frac{\hat{\Gamma}(y)}{\pi l_W(y)}+\frac{1}{4\pi}\cdot\frac{d}{dy}\oint_{-1}^{1}\frac{\hat{\Gamma}(\eta)}{y-\eta}d\eta=1 \tag{41}$$

$$\frac{\hat{\Gamma}(y)}{2\pi}\left\{\log\frac{2}{l_W(y)}-2(1-\log 2)\right\}+\frac{1}{4\pi}\int_{-1}^{1}\frac{\hat{\Gamma}(\eta)}{|y-\eta|}d\eta=-l_R(y) \tag{42}$$

となる。両方程式から，$H_0(y)$, τ の組み合わせ如何に関わらず，拘束静止時浸水長分布 $l_R(y)$ が等しい限り，浸水長分布 $l_W(y)$ も等しいという相似則が得られる。Deadrise がなく，最も単純な場合には，l_W は一定値 l_R のみに依存する。Deadrise angle β を有する場合，

$$l_R(y)=l_R(0)-\frac{\beta}{\tau}|y| \tag{43}$$

となり，$l_R(0)$ のほかに，もう１つのパラメタ β/τ(relative deadrise angle と呼ぶ）にも依存する。例えば，母型となる滑走板があり，$H_0(0)$ とτを母型の２倍に設定したとき，βを２倍とした滑走板を作れば，流体力学的に元の滑走板と同じ流れとなる。

3. 浸水長の近似的決定方程式とその解法

未定境界問題の基礎的解法を得るため，τを一定とした，浸水長の決定方程式(41)(42)式を解析対象とする。両式は $\hat{\Gamma}$ について線形であるが，l_W も未知関数であるから複雑な非線形積分方程式となっている。特に(42)式は l_W の対数非線形項を含み，その解を得ることは相当困難である。両方定式を連立させて解くことは今後の課題とし，本章では，$w_i\fallingdotseq 0$ と近似し，downwash 効果を無視して解くことを考える。遠場の節で述べたように，滑走艇理論では後曳渦による水面勾配よりも，拘束渦による局所的水面変形の効果の方が重要であるから，そのような近似が許される。

3.1 Downwash 効果を無視した近似積分方程式

(41)式は

$$\hat{\Gamma}(y)\fallingdotseq\pi l_W(y) \tag{44}$$

と近似されるので，(42)式は，次の l_W のみを未知関数とする積分方程式となる。

$$\frac{l_W}{2}\cdot\log\frac{2}{l_W}-(1-\log 2)l_W+\frac{1}{4}\int_{-1}^{1}\frac{l_W(\eta)}{|y-\eta|}d\eta=-l_R \tag{45}$$

(45)式は l_W の対数非線形項を伴うため，意外な多様性を生じさせる。$l_W\ll 1$ として摂動論的な定式化を行ってきたから，第１近似方程式

$$\frac{l_W}{2}\cdot\log\frac{1}{l_W}=-l_R \tag{46}$$

について考察する。Fig. 4 の図式解法から明らかなように，l_R に応じて解の個数と，そのオーダーは異なる。整理すると

i）　$l_R>0$ の場合：$l_W\ll 1$ ではなく，$l_W=O(1)$ の解のみが存在する。

ii）　$-0.5/\mathrm{e}<l_R\leqq 0$ の場合：相異なる２つの解を持つ。この内の１つは，$l_W\ll 1$ の仮定に合致した解であり，もう１つは $O(1)$ の解である。

iii）　$l_R<-0.5/\mathrm{e}$ の場合：解は存在しない。

ii）の場合，仮定に合致する方の解は，$|l_R|$ が大きいほど，

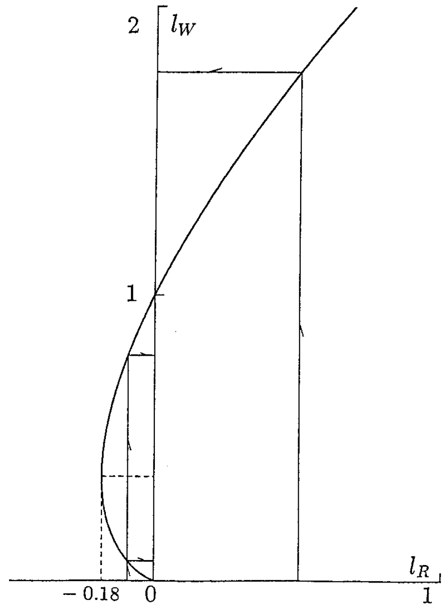

Fig. 4　Property of nonlinear logarithmic equation as the first approximate one to determine the unknown wetted length

すなわち浮上量が大きいほど，浸水長は長くなるという物理的に奇妙な結果を表す。このような解が不安定なことは，$l_R=0$ の場合を想起すれば明かである。これは，後端がちょうど静水面に一致する場合であり，非接水を意味する $l_W=0$ も解の1つであろう。しかし，若干でも水面に揺らぎがあれば，直ちにもう一つの解 $l_W=1$ に移行するであろう。このことと，通常の拘束状態 i）の場合を考え併せると，これまでの仮定：$l_W \ll 1$ を放棄し，$l_W=O(1)$ と考えるべきであると思われる。これを認めると，ii）の場合の不安定解を除けると共に，摂動論的意味では考慮外のiii）の場合についても言及できる。iii）の場合，解が存在しないとは，限度以上に滑走板後端を持ち上げた時，どんな強制攪乱を加えても定常接水しないことを意味する。こうして，$l_W \ll 1$ の仮定を放棄すれば，拘束航走時に予測される物理現象を如実に表すことができることが明らかとなった。本論では，摂動論的根拠の喪失に拘わらず，これまでの理論を物理的考察に基づく近似理論と考えることにする。

後の考察の便利のため，(45)式の発散積分の有限部分を取る計算を，$\eta=y$ における特異性を予め分離し，

$$\text{f.p.}\int_{-1}^{1}\frac{l_W(\eta)}{|y-\eta|}d\eta$$
$$=-l_W(y)\log\left(\frac{1}{1-y^2}\right)-\int_{-1}^{1}\frac{l_W(y)-l_W(\eta)}{|y-\eta|}d\eta \quad (47)$$

の形に直す。したがって(45)式は

$$l_W\left\{\log\frac{2\sqrt{1-y^2}}{l_W}-2(1-\log 2)\right\}$$
$$-\frac{1}{2}\int_{-1}^{1}\frac{l_W(y)-l_W(\eta)}{|y-\eta|}d\eta=-2l_R \quad (48)$$

と書き直せる。

3.2 積分方程式の数値解法

逐次近似法に基づく2つの解法を試みる。最初の方法は，線形積分方程式を解く要領に近く，性質の調査や，今後，連立方程式を解く際に有効と思われる。2番目のものは，対数方程式の純数値解法である。

3.2.1 ルジャンドル級数による解法

$l_W(y)$ がルジャンドル多項式 $P_n(y)$ の無限級数で

$$l_W(y)=\sum_{n=0}^{\infty}a_n\cdot P_n(y) \quad (49)$$

と表されるとする。有限部分を取る積分について

$$\text{f.p.}\int_{-1}^{1}\frac{P_n(\eta)}{|y-\eta|}d\eta$$
$$=-P_n(y)\left[\log\left(\frac{1}{1-y^2}\right)+2\{\psi(n+1)-\psi(1)\}\right] \quad (50)$$

が成立する。ここにψはディ・ガンマ関数である。したがって，

$$\int_{-1}^{1}\frac{l_W(y)-l_W(\eta)}{|y-\eta|}d\eta$$
$$=2\sum_{n=0}^{\infty}a_n\cdot\{\psi(n+1)-\psi(1)\}P_n(y) \quad (51)$$

となり，やはりルジャンドル級数で表される。ルジャンドル多項式の直交性を利用するため，(48)式と $P_n(y)$ の積をとり，$(-1,\ 1)$ の区間で積分すると，

$$a_n\cdot\{\psi(n+1)-\psi(1)+2(1-\log 2)\}\cdot\frac{2}{2n+1}$$
$$=\int_{-1}^{1}\left\{l_W\cdot\log\frac{2\sqrt{1-y^2}}{l_W}+2l_R\right\}P_n(y)dy \quad (52)$$

を得る。これは，右辺被積分関数を既知としたとき，a_n を与える式と見なせる。便宜上，初期関数を

$$l_W=l_0\sqrt{1-y^2} \quad (53)$$

$$\frac{l_0}{2}\cdot\log\frac{1}{l_0}=-l_R(0) \quad (54)$$

と選び，(49)(52)式の反復を行えば，振動的であるが実際に収束する。

l_W が両端点で $l_W=0$ となり，必ず特異性を持つことは，逆説的に，正則性すなわち解を有限項級数で表現し得るということの反証として，容易に証明できる。このことは方程式の持つ性質であり，端点で境界条件を設定することはできない。しかし，$l_W(\pm1)=0$ と認め得るには，偶数次多項式の性質，$P_{2n}(\pm1)=1$ のため，相当の項数まで展開を要する。この事情のため，端点での特異性を陽に明らかにすることは困難であるが，(53)式や $l_W\propto(1-y^2)^{n/2}$ の形ではないことは明かであるので，l_W は対数関数を伴う複雑な特異性を持つと考えられる。それでも(52)式が可積分程度には特異性は弱く，計算精度に合わせて級数の項数を設定すればよい。

3.2.2 対数方程式の逐次近似解法

(45)式は $l_W\cdot\log(1/l_W)$ を主関数とする対数方程式とみなせるから，

$$l_W=\frac{\omega l_W-\dfrac{1}{2}\displaystyle\int_{-1}^{1}\frac{l_W(y)-l_W(\eta)}{|y-\eta|}d\eta+2l_R}{-\dfrac{1}{2}\log\dfrac{4(1-y^2)}{l_W^2}+2(1-\log 2)+\omega} \quad (55)$$

と逐次近似できる。ωは緩和数である。数値積分は，区間を半幅で90個に cosine 分割し，短冊状に行った。標点は区間の中心である。初期関数は(53)(54)式に従い，上からの収束を計った。分割数を増せばωの値も大きく設定する必要があるが，実際上，$\omega=3\sim4$ で単精度の収束解を得る。ただし，このアルゴリズムは，単純な対数方程式の場合のような2乗収束する Newton 法 $(\omega=1)$ ではない。ω の役割は(55)式の分子分母の特異性を緩めることにあり，この意味で，端点における l_W の挙動には，やや信頼性を欠く。それでも，(55)式から得られた l_W は(45)式の l_R を正確に復元する。

4. 結果と考察

4.1 浸水面の計測実験

数値計算結果を述べるに先立ち，対応する実験を行った

ので報告する。

全幅 80 cm，弦長 40 cm，厚さ 2 cm の透明アクリル平板を用い，spray root line の観測を行った。$\beta=0°$ であり，$\tau=3$，6，9°，$l_R=0.2$，0.3，0.4 (8，12，16 cm) の組合せで写真撮影を行った。後端及び左右端で水が完全に切れるよう，$U_\infty=3$m/s($F_b=1.515$) としたが，航走速度は曳引車の限界に達しているため，フルード数影響の調査はできていない。

Fig. 5 に $\tau=6°$, $l_R=0.2$(8 cm) の場合の写真を示す。気泡は白く，浸水部は黒く写るため，白い部分はスプレーにより発生した気泡，下部のほぼ黒い部分が浸水面，それらの境界が spray root line と考えられる。高周波の非定常性のため，スプレー部分は雲状の不定形となり，浸水部へも気泡の潜り込みが観測されるが，その他の写真，目視観測共に，spray root line の形が大きく変動する様子は見られなかった。おおまかな spray root line の形は，写真中の白線で示したように，直線状でも放物線状でもない緩い曲線であり，ハードチャインを横切る。その後，側方の跳水状波面に続く。最大浸水長は拘束静止時浸水長の 2 倍強に達している。

写真を整理し，平均的な spray root line の形に直したものを Fig. 6 に示す。$\tau=6°$ に固定し，$l_R=0.2$，0.3，0.4 及び-0.07 と変化させた場合である。l_R の増加と共に浸水長も増加する様子が見られる。

Fig. 7 には $l_R=0.3$ に固定し，$\tau=3$，6，9° と変化させた場合の浸水長分布を示す。浸水長は τ の増加と共にわずかに長くなる。浸水長の増加分は τ に比例して長くなるように見えるが，$\tau\to 0$ の極限形状が想起され，2.3 節で述べた浸水長の相似則にほぼ従っていると考えられる。

4.2 数値計算結果と考察

実験と対応する解の例を，l_R と共に spray root line の形で Fig. 8 に示す。$l_R=-0.155$，及び $l_R=-0.1$～0.5 まで 0.1 ごとの結果である。結果に及ぼす解法上の差は小さく，ここでは(55)式のアルゴリズムで得られた結果を示している。

拘束静止時浸水面積に比べ，相当大きな面積が浸水することがわかる。しかし，計算結果と実験結果の定量的一致度は悪く，約 2 倍の差が認められる。この差は downwash 効果の無視に起因するとは考えにくい。なぜなら，downwash は有効トリム角の減少をもたらし，むしろ l_w を増加させる役割をすると考えられるからである。実際，それを

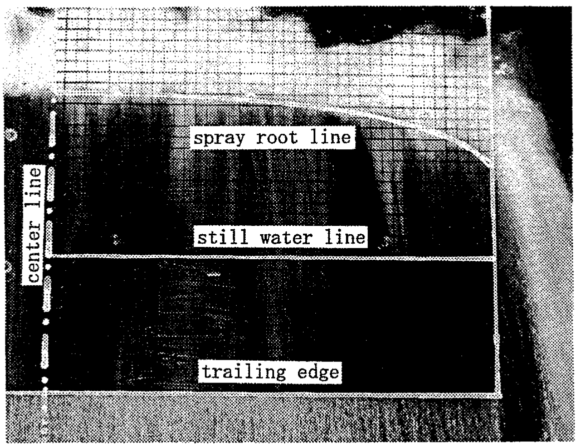

Fig. 5 Observation of spray root line

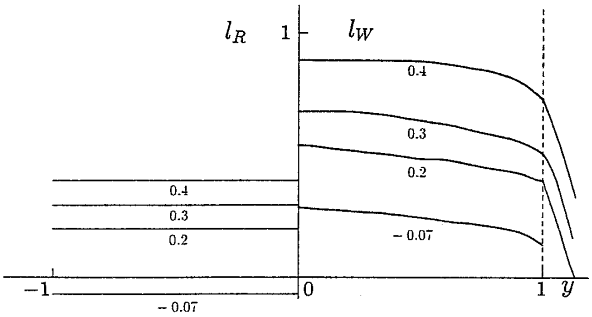

Fig. 6 Measured spray root lines corresponding to various restrained still water lines

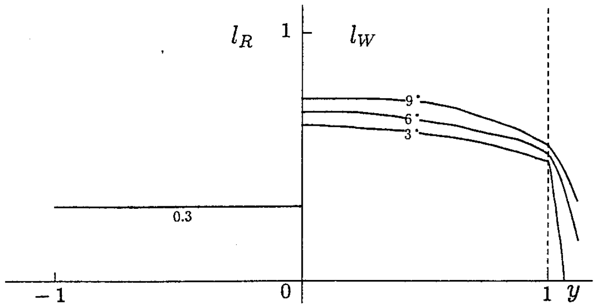

Fig. 7 Variations of measured spray root lines with trim angles in the case of $l_R=0.3$

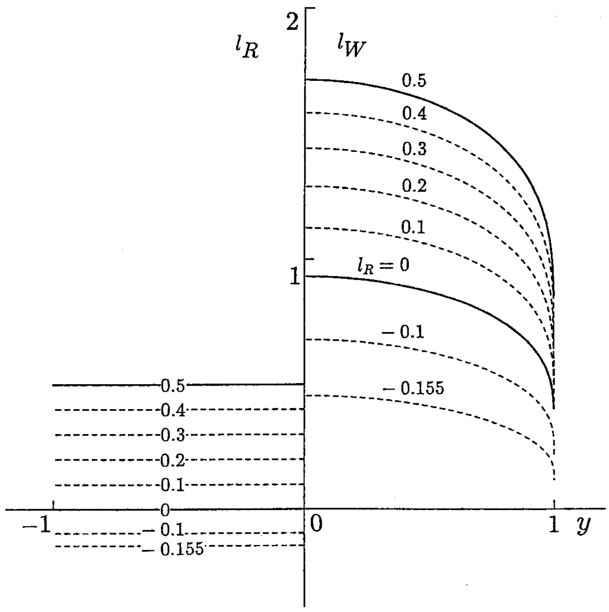

Fig. 8 Calculated spray root lines corresponding to various restrained still water lines

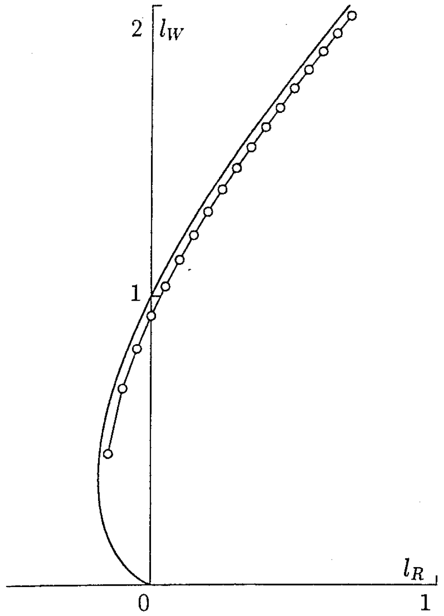

Fig. 9 Plots of calculated wetted length at the center line and the first approximate solution of the integral equation

無視した計算は，(40)式の定義から，見かけ上大きな l_R に対応する計算に相当し，これに対応する l_W は長くなる。不一致の原因は，Fig. 9に見ることができる。Fig. 9には計算結果の $l_W(0)$ (○印) と，(46)式の第1近似解を $l_W(0)$ とみなしたグラフを示した。$l_W(0)$ は，ほぼこの線に沿っていることがわかる。これは第1近似解が実験値の不一致の主因と疑わせるに十分であるが，対数項と定数は同一視するのが通常の感覚であり，むしろ(45)式の l_W の線形項，または積分項が十分に機能していないためと考えるのが妥当である。示すことはしないが，(45)式で線形項の係数を若干変更することで実験値と良い一致に導ける。これは今後の課題とすべき方策を暗示する。それは重力影響の考慮である。線形項は遠場の波高の Γ に関する線形項に由来しており，重力影響による local wave の低減が期待されるからである。ただし，波高の漸近展開の内，対数項は容易に得られるが，y のみに依存する項は，速度ポテンシャルの漸近展開を[K]に従って積分しても得られず，重力影響を考慮した波高の積分表示式自身を漸近展開して求めなければならない。これには相当の困難が予想される。

定量的不一致を度外視すると，いくつかの点で定性的な一致が見られる。第1に，計算された spray root line は，あたかも端点で l_W が有限値を取るかの振る舞いを見せ，実験結果に見られるハード・チャインを横切る様子とよく似ていることである。理論的には，(45)式の積分方程式が $l_W(\pm1)=0$ となる性質を持つため，spray root line がハード・チャインを横断することはないが，端点での漸近挙動をよく表現していると考えられる。

第2は，滑走板高さの設定限界に関することである。Fig. 8には，本論の2つのアルゴリズム(52)(55)式で，収束解の得られる限界，$l_R=-0.155$ の場合の結果も示している。実験では接水する限界は $l_R=-0.07(H_0=3\,\mathrm{mm})$ であり，これ以上の高さに滑走艇を設定し，どんな強制攪乱を与えても定常的には接水しなかった。両者にやや開きがあるが，(46)式で得られる限界値も $l_R=-0.5/e\fallingdotseq-0.18$ を示し，ほぼ符合していると考えられる。結果を示すことはしないが，relative deadrise angle が大きい場合，端点近傍で高さ制限を越えるために，収束解が得られない場合がある。これは，ハード・チャインで水切れしない場合に対応すると考えられる。

第3は，逆説的であるが，アルゴリズム，初期値の改善等，種々の試みにも拘わらず，(46)式の $l_W\ll1$ に相当する解が得られなかったことである。解の存在については不明であるが，存在するとしても過渡的に実現されると考えられ，今後の非定常現象からの解明に期待する。

実験結果には Fig. 7に示されるように，τ の非線形影響が見られる。本論では見通しを重視し，近場解として線形理論による解を採用したが，半無限長滑走板の自由流線理論によれば，(45)式に対応する浸水長の決定方程式は次のようになる。

$$\frac{l_W}{C}\log\frac{C}{l_w}-\frac{l_W}{C}\{2\cos^2(\tau/2)\cdot(1-\log 2)+2\sin^2(\tau/2)\cdot\log 2\}+\frac{1}{2C}\oint_{-1}^{1}\frac{l_W(\eta)}{|y-\eta|}d\eta=\frac{H_0(y)}{\sin\tau} \tag{56}$$

ここに

$$C\equiv2\cos^2(\tau/2)\cdot(2\cos\tau-1)+(\pi-\tau)\cdot\sin\tau-2\sin^2(\tau/2)\cdot\log(\sin^2(\tau/2)) \sim 2 \quad \text{as} \quad \tau\to0 \tag{57}$$

である。$\tau\to0$ の極限では(45)式と(56)式は一致する。Fig. 10に(56)式を解いた結果を示す。$\tau\to0$ の場合，実験結果と計算結果の一致が見られないのは既述の通りであるが，τ の非線形効果はよく表されていると考えられる。

4.3 自由滑走状態

拘束状態における滑走板の浸水長が定まったので，自由航走状態について考察する。l_W 自身に実験値と相違が見られても，揚力係数等の無次元パラメタは，相応の一致が得られると考えられるので，deadrise のない箱船の自由滑走状態を定める。

拘束状態での揚力係数 C_L^*，揚力中心 $(-x_C)$ は

$$C_L^*(l_R,\tau)\equiv\tau\cdot C_{LT}^*(l_R)\equiv\frac{\text{Lift}}{\rho U_\infty^2b^2}=\tau\cdot\frac{\pi}{2}\int_{-1}^{1}l_Wdy \tag{58}$$

$$x_C(l_R)=-\frac{\frac{\pi}{2}\int_{-1}^{1}\frac{3}{4}l_W{}^2dy}{C_{LT}^*(l_R)} \tag{59}$$

により求められる。C_{LT}^* は揚力傾斜を意味し，x_C の分子は

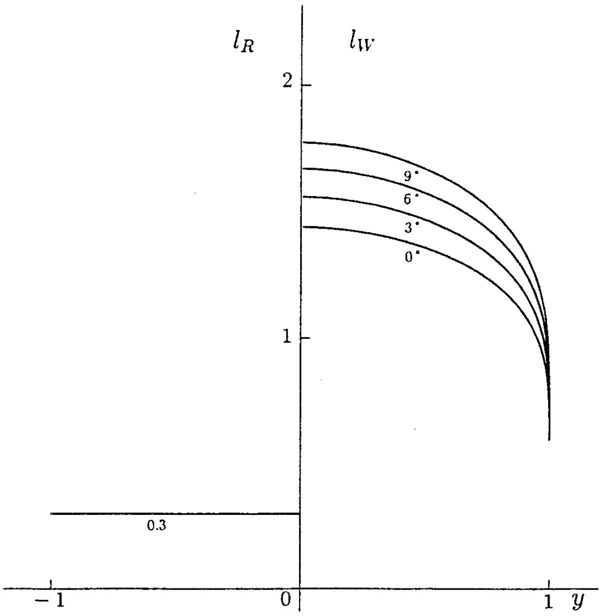

Fig. 10 Variations of calculated spray root lines with trim angles in the case of $l_R=0.3$

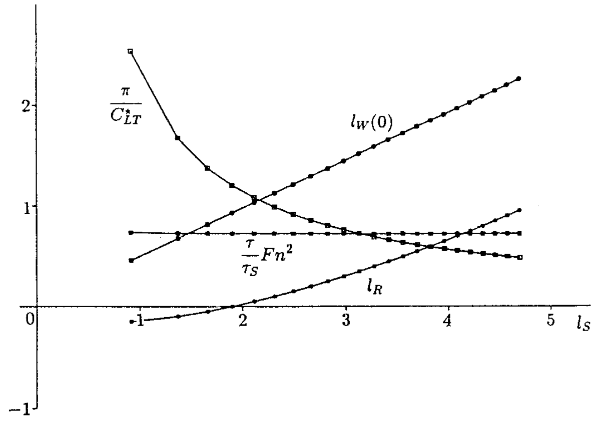

Fig. 11 Characteristics in free-running states of planing plates with various still water length

後端まわりのモーメント傾斜である。ただし，翼の場合と異なり底面のみに圧力が働いているから，揚力は半分になっていることに注意する。

全幅 $2b$，重量 W の箱船が，滑走状態に入っているとする。静止時にはトリム τ_S，無次元浸水長 l_S で浮いていたものとすると，無次元重量 w，無次元重心 x_G はそれぞれ

$$w\equiv\frac{W}{\rho g b^3}=\tau_S\cdot l_S^2 \tag{60}$$

$$x_G=-l_S/3 \tag{61}$$

で与えられる。滑走状態では重量と揚力は釣り合い，重心と揚力中心は等しいから

$$\frac{w}{F_n^2\cdot l_S}=\tau\cdot C_{LT}^*(l_R) \tag{62}$$

$$x_G=x_C(l_R) \tag{63}$$

を要求する。ここに，F_n は静止時浸水長に基づくフルード数である。

解法手順は次のようである。まず x_G が既知であるので(63)式により l_R が決まる。次に力の釣合式(62)式から τ が定まる。τ 及び l_R が定まったので，自由滑走状態での後端高さ $H_0(=-\tau\cdot l_R)$ が定まる。

滑走状態と静止状態でのトリム角，浸水長の比は，それぞれ

$$F_n^2\frac{\tau}{\tau_S}=\frac{-3x_C(l_R)}{C_{LT}^*(l_R)} \tag{64}$$

$$\frac{l_W(0)}{l_S}=\frac{l_W(0)}{-3x_C(l_R)} \tag{65}$$

で与えられる。Fig. 11 に，これらの関係と共に，π/C_{LT}^*(＝1/浸水面積) を示した。

$l_R=-0.155$ 以下の解は存在しないため，$l_S<0.75$ では安定解は存在しないことが分かる。すなわち，あまり幅広の滑走艇は滑走状態に入れないことを意味する。また，$l_W(0)$ は l_S にほぼ比例しており，滑走艇の状態は近似的に $l_W(0)/l_S\fallingdotseq0.48$, $\tau/\tau_S\fallingdotseq0.73/F_n^2$ となる。

5. 結　　　言

滑走艇の浸水長が幅に比べて小さいという高アスペクト比の仮定に基づき，揚力線理論の定式化を未定浸水長を求める問題に適用し，

1) 摂動論的に浸水長を決定するための非線形連立積分方程式を導いた。

2) さらに，後曳渦の効果を無視することにより，浸水長を未知関数とする積分方程式を導いた。この方程式は対数非線形項を伴うことから，解の分岐が起き，仮定に見合う解は，静的不安定であり，通常考える必要のない静水面上方に設置された滑走艇に対応するものであることが明らかとなった。

2)の結論から，仮定にこだわらず，積分方程式を解いた結果を以下に示す。

3) 拘束状態の捻れのない滑走板の場合，トリム角に関わらず，拘束静止時浸水長分布が等しい限り，浸水長分布は等しいという相似則を得た。トリム角の非線形影響は自由流線理論により補正できる。

4) 計算された浸水長分布は，実験結果との定量的一致を見なかったが，その傾向をよく表している。Spray root line とハード・チャインが交わるような挙動，滑走板高さに設定限界があること等，定性的にも実験結果をよく表している。

5) 自由航走状態の姿勢を推定し，あまり幅広の滑走艇は滑走状態に入れないことが明らかとなった。

本稿を終えるにあたり，熱心なご討論を頂いた大阪大学工学部，鈴木敏夫教授に感謝します。本研究の一部は文部省科学研究費の補助金，他の一部については造船学術研究推進機構の補助金を受けて実施されたことを記し，関係各

位にお礼申し上げます。

参考文献

1) 鈴木勝雄：高速艇の流体力学（その2），「高速艇と性能」シンポジウム，日本造船学会（1989）.
2) Wagner, H.: Über Stoss-und Gleitvorgänge an der Oberflächen von Flüssigkeiten, Z. Angew. Math. Mech., 12 (1932).
3) 平野進他：楔型滑走体の底面圧力分布の計測，関西造船協会誌，208号（1988）.
4) 平野進他：柱状滑走体の底面圧力分布の計測，関西造船協会誌，213号（1990）.
5) 松村清重，黒龍秀之：滑走板船首部のスプレー現象を伴う流場について，日本造船学会論文集，174号（1993）.
6) Wu, T. Y.: A Singular Perturbation Theory for Nonlinear Free Surface Flow Problems, I. S. P., Vol. 14 (1967).
7) Ting, L., Keller, J. B.: Planing of a Flat Plate at High Froude Number, Phys. Fluids, Vol. 17, No. 6 (1974).
8) 鈴木勝雄，大迫義谷：2次元滑走板の姿勢変化について－その1：理論の展開－，防衛大学校理工学研究報告，24巻，3号（1987）.
9) Shen, Y. T., Ogilvie, T. F.: Nonlinear Hydrodynamic Theory for Finite-Span Planing Surfaces, J. S. R., Vol. 16 (1972).
10) 丸尾孟：滑走艇の流体力学的研究（第2報），造船協会論文集，92号（1952）.
11) 別所正利：定常滑走板の理論に関する一考察，西部造船会会報，54号（1977）.
12) 松村清重：滑走板の浸水面形状について，38回日本造船学会推進性能研究委員会資料（1995）.
13) 松村清重：流体力学における摂動法，170回関西流体力学研究会資料（1984）.