

滑走艇の未定浸水面問題に関する変分原理について

正員 勝井辰博* 正員 松村清重**
正員 鈴木敏夫**

Variational Principle with Unknown Wetted Surface of Planing Ship

by Tokihiro Katsui, *Member*
Toshio Suzuki, *Member*

Kiyoshige Matsumura, *Member*

summary

A variational principle is presented for solving the problem how we determine an unknown wetted surface of a planing ship in fixed condition. The functional of variational principle is not represented by the pressure distribution but loading function, circulation distribution around longitudinal sections, and the unknown wetted length distribution in order to avoid troublesome behavior of the pressure at the spray root line which is the boundary of the wetted surface. The extremal of the functional satisfies the lifting-surface integral equation and the elevated water surface condition along the spray root line, both are sufficient to determine the wetted surface. And also, an approximate functional actually determines well, regardless of adoption of trial function, the unknown wetted surface distribution of high aspect ratio planing plate.

1. 緒 言

滑走艇の特徴は、排水量型の船舶とは異なり航走時の浸水面が静止時に比べ大幅に変化することである¹⁾。通常、船舶流体力学では線形理論が用いられ、静止時浸水面を流体境界にとる。しかし、滑走艇の特にモーメント特性は浸水面に依存して変化するから、浸水面の第1近似として静止時浸水面を用いることは許容できず、浸水面はあくまで未知のまま、流場を求めるのと同時に求めなければならない。この点で同じ未定境界の問題であっても、自由表面を求める問題のように静止時水面を第1近似とし、流場が求まった後で波高を決定できる場合とは大きく異なる。しかし、非線形理論を用いなければ、この問題を解決し得ない訳ではない。線形理論の枠組みでは、滑走艇の浸水面の境界にあたる spray root line は滑走艇が航走することによって生じる波面と艇が一致する位置にあたり²⁾、波面の盛り上

がりを考慮しさえすれば、線形理論でも浸水面を求められる。

Wagner³⁾ は楔型の着水問題を未定境界の問題として扱い、波面の盛り上がりを考慮すれば問題が解決できることを示した。この理論は dead rise angle を持つ滑走艇の問題に適用され、自己相似流れが仮定されたため船体側方の波面の盛り上がりのみが考慮されていた。この場合 spray root line は直線になるが、平野ら^{4),5)} の実験では spray root line は緩やかな曲線であることから、松村ら⁶⁾ は船体前方の波面の盛り上がりをも考慮し、滑走艇の船首付近ではあたかも、かまぼこ状の波面上を滑走するかのように扱えば、spray root line が放物線となる相似解があることを示した。また松村ら⁶⁾ は高アスペクト比の滑走板についての未定境界問題について論じ、揚力線理論に基づいて未定浸水長を求める積分方程式を導いた。積分方程式は滑走板の未定浸水長分布 l_w と各断面の循環 Γ によって表され、 l_w と Γ が関連付けられることを示した。別所⁷⁾ は重力影響を考慮した滑走板の未定境界問題について論じた。この理論では滑走板の浸水長の変化が微小であるとし、滑走板の圧力の第1近似を用いた積分方程式を解くことによって浸水長の変化を求め得ることが示された。

これらの研究はすべて微分方程式あるいは積分方程式に

* 大阪大学大学院工学研究科博士後期課程在学

** 大阪大学大学院工学研究科

原稿受理 平成10年1月9日

春季講演会において講演 平成10年5月14, 15日

よる定式化であり、それらを解くには格段の工夫を要する。一方、変分直接法は方程式を解く代りに汎関数の極値問題に置き換えるものであり、解を単純な試験関数で近似しても良い結果が得られるので、流体力学を含めて工学上の多くの問題について用いられている^{8),9)}。しかし、未知の問題に対して変分原理そのものを導出することは一般に困難であり、本論で扱おうとする滑走艇の未定境界問題に対する変分原理は知られていない。ただ、滑走艇に類似した流れに対する変分原理はいくつか知られている。その中でも Flax の変分原理¹⁰⁾は揚力面の積分方程式を解くために導出されたものである。揚力面の積分方程式は主流方向の対称性を持たないため、逆流 (reverse flow) と呼ばれる、ちょうど一様流が逆方向から流れてくるような仮想の流れも併せて定式化がなされた。別所¹¹⁾は、Flax の変分原理を滑走艇の問題に拡張し、そのオイラー方程式が、滑走艇の高さに関する境界条件を満足させる積分方程式となるものがあることを示した。ただし、滑走艇の浸水面形状は既知とされた。

本論は、拘束状態にある滑走艇の未定浸水面を求めるための変分原理を示すために行われたものである。またそれに基づき高アスペクト比の滑走平板について具体的な計算を行ったので、ここにその結果をご報告し、ご批判を仰ぐ次第である。

2. 滑走艇まわりの流れの支配方程式

典型的な滑走艇を考えるために、後端がトランサム状で、ハードチャインを持つ船型を取り上げる。座標系を Fig. 1 に示すように設定し、 $z=0$ を静水面とする。滑走艇の半幅は b とし、拘束状態を考える。滑走艇の高さを $H(x, y)$ とし、船体後端を $x=0$ 、静止時水線は $x=-l_w(y)$ で表される曲線とする。この滑走艇を拘束状態のまま前進速度 1 で定常滑走させ、その結果、spray root line, すなわち浸水面の境界が $x=-l_w(y)$ となった場合を考える。ただし、速度

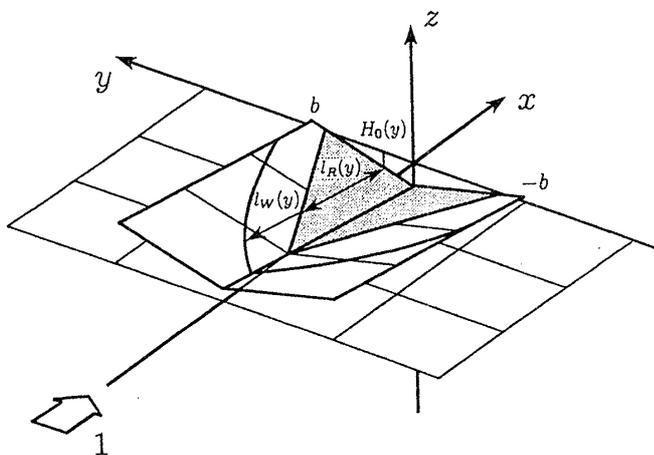


Fig. 1 Coordinate system and definitions of basic quantities

の次元は一様流速 U_∞ で無次元化したものである。また滑走艇の後端高さは $H_0(y)$ とする。 $H_0(y) > 0$, すなわち静水面より上方に固定された滑走艇についても考える。ただしこの場合は、水面に攪乱を与えるなどして強制的に定常滑走に至った後の状態を対象とする。

流体は、非粘性渦なしであるとし、重力影響も無視することにする。このとき浸水面が未定であることを除けば、流場は無限流体中の平板翼まわりのものと等価である。速度ポテンシャル ϕ を

$$\phi(x, y, z) = x + \phi(x, y, z) \quad (1)$$

と線形化すると、線形化した船体底面圧力 $p_0(x, y) \equiv p(x, y, 0)$ と ϕ には

$$\begin{aligned} \phi(x, y, z) = & \frac{1}{4\pi} \int_{-b}^b \int_{-l_w(\eta)}^0 2p_0(\xi, \eta) \frac{z}{(y-\eta)^2 + z^2} \\ & \times \left(1 + \frac{x-\xi}{\sqrt{(x-\xi)^2 + (y-\eta)^2 + z^2}} \right) d\xi d\eta \\ & \text{for } z < 0 \end{aligned} \quad (2)$$

の関係がある。滑走艇上で線形化された物体表面条件を課せば以下の積分方程式を得る。

$$\begin{aligned} \frac{\partial H}{\partial x}(x, y) = & \frac{1}{4\pi} \int_{-b}^b \frac{d\eta}{(y-\eta)^2} \int_{-l_w(\eta)}^0 2p_0(\xi, \eta) \\ & \times \left(1 + \frac{x-\xi}{\sqrt{(x-\xi)^2 + (y-\eta)^2}} \right) d\xi \end{aligned} \quad (3)$$

以後、この積分方程式を滑走艇の傾きに関する積分方程式と呼ぶ。 $l_w(y)$ が既知であれば (3) 式は線形揚力面理論の積分方程式と同じであるから、Kutta の条件 $p_0(0, y) = 0$ を課すことで p_0 は一意に定められ、したがって ϕ を定め得る。

しかし、 $l_w(y)$ はあらかじめ特定できていないため、このままでは問題は閉じない。これが未定境界問題である。松村⁶⁾は問題を閉じさせるために、既知の滑走艇の高さと波面の高さが一致するという条件を、滑走艇の spray root line 上、または後端で課せばよいことを示した。波高 $h(x, y)$ は、自由表面での線形化した運動学条件

$$[K] \quad \frac{\partial h}{\partial x} - \frac{\partial \phi}{\partial z} = 0 \quad \text{on } z=0 \quad (4)$$

に従う必要があり、無限前方で $h=0$ となるように ϕ を [K] にしたがって積分すれば、波高 h は

$$\begin{aligned} h(x, y) = & \frac{1}{4\pi} \int_{-b}^b \frac{d\eta}{(y-\eta)^2} \int_{-l_w(\eta)}^0 2p_0(\xi, \eta) \\ & \times \left(x - \xi + \sqrt{(x-\xi)^2 + (y-\eta)^2} \right) d\xi \end{aligned} \quad (5)$$

となる。ただし、(5) 式は水面波高のみならず、滑走艇の高さを与える式にもなっており、この場合は (5) 式に示したように積分の有限部分をとればよい。波高が滑走艇の高さに一致するという条件を、ここでは spray root line 上で課す。

$$[S] \quad h(-l_w(y), y) = H(-l_w(y), y) \quad (6)$$

具体的に書き下せば

$$H(-l_w(y), y)$$

$$= \frac{1}{4\pi} \iint_{-b}^b \frac{d\eta}{(y-\eta)^2} \int_{-l_w(\eta)}^0 2p_0(\xi, \eta) \times \left(x - \xi + \sqrt{(x-\xi)^2 + (y-\eta)^2} \right) d\xi d\eta \quad (9)$$

$$\times \left(-l_w(y) - \xi + \sqrt{(-l_w(y) - \xi)^2 + (y-\eta)^2} \right) d\xi \quad (7)$$

が成立している必要がある。以後、この積分方程式を滑走艇の高さに関する積分方程式と呼ぶ。

これで $p_0(x, y)$ と $l_w(y)$ を未知とする 2 つの積分方程式が得られたので、(3)式と(7)式を連立させて解けば spray root line の形状が決定される。次節以降にその取り扱いについて述べる。

3. 変分原理

滑走艇の浸水面を求めるために満足すべき方程式(3)、(7)式が、オイラーの方程式となる変分原理は知られていない。あるべき変分原理の性質を知るために、従来から知られている 2 つの変分原理を調べておく。

Flax¹⁰⁾ は無限流体中の 3 次元揚力面の積分方程式(3)式を解く問題を、底面圧力分布 $p_0(x, y)$ を変関数とする汎関数の変分問題に置き換え、以下のような汎関数を定義した。

$$I[p_0, \bar{p}_0] \\ \equiv \int_{-b}^b \int_{-l_w(y)}^0 \left\{ -2p_0(x, y) \frac{\partial H}{\partial x}(x, y) - 2\bar{p}_0(x, y) \frac{\partial H}{\partial x}(x, y) \right\} dx dy \\ + \int_{-b}^b \int_{-l_w(y)}^0 2\bar{p}_0(x, y) \left\{ \frac{1}{4\pi} \iint_{-b}^b \frac{2p_0(\xi, \eta)}{(y-\eta)^2} \times \left(1 + \frac{x-\xi}{\sqrt{(x-\xi)^2 + (y-\eta)^2}} \right) d\xi d\eta \right\} dx dy \quad (8)$$

ただし、後述の本論で示す変分原理の汎関数にあわせて、(8)式を、原著論文と符号を逆にしてある。この汎関数には、(3)式の核関数が対称性を持たないため、求めるべき流れ(順流れ)のみならず、ちょうど一様流の方向が逆の仮想的な流れ(逆流れ)に対する圧力分布 \bar{p}_0 も含まれている。この意味で Flax の変分原理は、ポテンシャル論で通常見られる最大原理とは様相を異にし、随伴変分原理と呼ばれる。それでも Kutta の条件を課すことで、汎関数を停留させる p_0 は(3)式を満足する。

別所¹¹⁾ は Flax の変分原理を滑走艇の問題に適用し、新たに滑走艇の高さに対する積分方程式に対しても Flax の変分原理と同様の原理があることを示した。別所の原理では重力影響を考慮しているが、重力影響を無視して書き下すと、以下ようになる。

$$J[p_0, \bar{p}_0] \\ \equiv \int_{-b}^b \int_{-l_w(y)}^0 \left\{ 2p_0(x, y) H(x, y) - 2\bar{p}_0(x, y) H(x, y) \right\} dx dy \\ + \int_{-b}^b \int_{-l_w(y)}^0 2\bar{p}_0(x, y) \left\{ \frac{1}{4\pi} \iint_{-b}^b \frac{2p_0(\xi, \eta)}{(y-\eta)^2} \right.$$

やはり、逆流れに対する \bar{p}_0 の仲介を必要とするが、この汎関数が停留すれば、滑走艇の高さに関する積分方程式が浸水面全体で満足される。しかし、この変分原理では浸水面、すなわち積分範囲に現れた $l_w(y)$ を既知としている。滑走艇の高さに関する積分方程式は、 l_w を自由に与えてしまうと Kutta の条件を満足させ得ないことを別所¹¹⁾ 自身が示している。したがって(9)式を基礎に浸水面を求めるには、繰り返し計算等の複雑な手続きを要することは否めない。

本研究ではこれを拡張し、浸水面も未知として取り扱うことを考える。浸水面を未知とした場合、積分方程式の積分範囲が定められないことになるため、変分法としては自由端問題となる。自由端問題の単純な解決法としては、Flax の変分原理に spray root line 上で波高と滑走艇の高さが一致する条件(6)式を課すことが考えられる。また別所の変分原理を自由端問題として取り扱うことなども考えられる。しかし、いずれの原理でも汎関数が底面圧力 p_0 で表現されており、 p_0 の自由端 (spray root line 上) における $1/\sqrt{l_w(y)-x}$ の特異性のために、自由端の変化に伴う汎関数の変分を有限値で表すことができなくなる。これに対し、松村らが示した浸水長を決定する積分方程式では、高アスペクト比近似も手伝っているが、未定浸水長 l_w は滑走板の各断面周りの循環 Γ に関係付けられている⁹⁾。2次元翼理論でよく知られているように、翼周りの循環は本来自由に設定できるものであり、物理的観点から Kutta の条件が導入され、決め得る量となる。このとき Γ は固有値を意味する。滑走艇の場合にも Γ のような流場の変数とは独立に、自由度を増やせる量が必要と考えられる。このことは条件付き変分原理で通常見られるように、ラグランジュ乗数を導入することと一脈通じるものがある。このような考えに基づき、積分方程式に Γ が陽に表れるように変形すると、(3)、(7)式は、以下のように書くことができる¹²⁾。

$$\frac{\partial H}{\partial x}(x, y) = \frac{1}{4\pi} \iint_{-b}^b \frac{\Gamma(\eta)}{(y-\eta)^2} \left(1 + \frac{x}{\sqrt{x^2 + (y-\eta)^2}} \right) d\eta \\ + \frac{1}{4\pi} \iint_{-b}^b \int_{-l_w(\eta)}^0 \frac{\mu(\xi, \eta)}{\{(x-\xi)^2 + (y-\eta)^2\}^{3/2}} d\xi d\eta \quad (10)$$

$$H(-l_w(y), y) \\ = \frac{1}{4\pi} \iint_{-b}^b \frac{\Gamma(\eta)}{(y-\eta)^2} \left(-l_w(y) + \sqrt{l_w(y)^2 + (y-\eta)^2} \right) d\eta \\ + \frac{1}{4\pi} \iint_{-b}^b \int_{-l_w(\eta)}^0 \frac{\mu(\xi, \eta)}{(y-\eta)^2} \\ \times \left(1 + \frac{-l_w(y) - \xi}{\sqrt{(-l_w(y) - \xi)^2 + (y-\eta)^2}} \right) d\xi d\eta \quad (11)$$

式中の μ は艇底面上に分布したダブレット強さの意味を持つ。また $\mu =$ 一定の曲線は渦線となることから、むしろ

渦線関数と解釈すれば、船体後方の波面には無限後方にまで延びた直線的な渦線が存在するのみであり、個々の渦糸の強さが $d\Gamma$ となる。したがって、Kutta の条件は、滑走艇後端までに生じた渦が後方へ流れ去っていくことであるから

$$\mu(0, y) = \Gamma(y) \quad (12)$$

と表現される。このような解釈とは別に

$$\mu(x, y) \equiv \int_{-l_w(y)}^x 2p_0(\xi, y) d\xi \quad (13)$$

とも書け、 μ は loading function¹³⁾ と解釈できる。(13)式

$$\begin{aligned} & \Pi[\mu, \bar{\mu}, \Gamma, \bar{\Gamma}, l_w] \\ & \equiv \int_{-b}^b \int_{-l_w(y)}^0 \left\{ -\bar{\mu}(x, y) \frac{\partial H}{\partial x}(x, y) - \mu(x, y) \frac{\partial H}{\partial x}(x, y) \right\} dx dy \\ & + \int_{-b}^b \int_{-l_w(y)}^0 \bar{\mu}(x, y) \left\{ \frac{1}{4\pi} \int_{-b}^b \frac{\Gamma(\eta)}{(y-\eta)^2} \left(1 + \frac{x}{\sqrt{x^2 + (y-\eta)^2}} \right) d\eta + \frac{1}{4\pi} \int_{-b}^b \int_{-l_w(\eta)}^0 \frac{\mu(\xi, \eta)}{\{(x-\xi)^2 + (y-\eta)^2\}^{3/2}} d\xi d\eta \right\} dx dy \\ & + \int_{-b}^b \left\{ -\bar{\Gamma}(y) H(-l_w(y), y) - \Gamma(y) H(0, y) \right\} dy \\ & + \int_{-b}^b \bar{\Gamma}(y) \left\{ \frac{1}{4\pi} \int_{-b}^b \frac{\Gamma(\eta)}{(y-\eta)^2} \left(-l_w(y) + \sqrt{l_w(y)^2 + (y-\eta)^2} \right) d\eta \right. \\ & \left. + \frac{1}{4\pi} \int_{-b}^b \int_{-l_w(\eta)}^0 \frac{\mu(\xi, \eta)}{(y-\eta)^2} \left(1 + \frac{-l_w(y) - \xi}{\sqrt{(-l_w(y) - \xi)^2 + (y-\eta)^2}} \right) d\xi d\eta \right\} dy \\ & \text{under } \mu(0, y) = \Gamma(y) \end{aligned} \quad (14)$$

ただし、拘束条件は Kutta の条件である。

この汎関数の第1変分は以下のようになる。

$$\begin{aligned} \delta\Pi = & \int_{-b}^b \int_{-l_w(y)}^0 \delta\bar{\mu}(x, y) \left\{ -\frac{\partial H}{\partial x}(x, y) + \frac{1}{4\pi} \int_{-b}^b \frac{\Gamma(\eta)}{(y-\eta)^2} \left(1 + \frac{x}{\sqrt{x^2 + (y-\eta)^2}} \right) d\eta \right. \\ & \left. + \frac{1}{4\pi} \int_{-b}^b \int_{-l_w(\eta)}^0 \frac{\mu(\xi, \eta)}{\{(x-\xi)^2 + (y-\eta)^2\}^{3/2}} d\xi d\eta \right\} dx dy \\ & + \int_{-b}^b \delta\bar{\Gamma}(y) \left\{ -H(-l_w(y), y) + \frac{1}{4\pi} \int_{-b}^b \frac{\Gamma(\eta)}{(y-\eta)^2} \left(-l_w(y) + \sqrt{l_w(y)^2 + (y-\eta)^2} \right) d\eta \right. \\ & \left. + \frac{1}{4\pi} \int_{-b}^b \int_{-l_w(\eta)}^0 \frac{\mu(\xi, \eta)}{(y-\eta)^2} \left(1 + \frac{-l_w(y) - \xi}{\sqrt{(-l_w(y) - \xi)^2 + (y-\eta)^2}} \right) d\xi d\eta \right\} dy \\ & + \int_{-b}^b \int_{-l_w(y)}^0 \delta\mu(x, y) \left\{ -\frac{\partial H}{\partial x}(x, y) + \frac{1}{4\pi} \int_{-b}^b \frac{\bar{\Gamma}(\eta)}{(y-\eta)^2} \left(1 + \frac{-l_w(\eta) - x}{\sqrt{(-l_w(\eta) - x)^2 + (y-\eta)^2}} \right) d\eta \right. \\ & \left. + \frac{1}{4\pi} \int_{-b}^b \int_{-l_w(\eta)}^0 \frac{\bar{\mu}(\xi, \eta)}{\{(x-\xi)^2 + (y-\eta)^2\}^{3/2}} d\xi d\eta \right\} dx dy \\ & + \int_{-b}^b \delta\Gamma(y) \left\{ -H(0, y) + \frac{1}{4\pi} \int_{-b}^b \frac{\bar{\Gamma}(\eta)}{(y-\eta)^2} \left(-l_w(\eta) + \sqrt{l_w(\eta)^2 + (y-\eta)^2} \right) d\eta \right. \\ & \left. + \frac{1}{4\pi} \int_{-b}^b \int_{-l_w(\eta)}^0 \frac{\bar{\mu}(\xi, \eta)}{(y-\eta)^2} \left(1 + \frac{\xi}{\sqrt{\xi^2 + (y-\eta)^2}} \right) d\xi d\eta \right\} dy \\ & + \int_{-b}^b \delta l_w(y) \left[\mu(-l_w(y), y) \left\{ -\frac{\partial H}{\partial x}(-l_w(y), y) + \frac{1}{4\pi} \int_{-b}^b \frac{\bar{\Gamma}(\eta)}{(y-\eta)^2} \left(1 + \frac{-l_w(\eta) + l_w(y)}{\sqrt{(-l_w(\eta) + l_w(y))^2 + (y-\eta)^2}} \right) d\eta \right. \right. \\ & \left. \left. + \frac{1}{4\pi} \int_{-b}^b \int_{-l_w(\eta)}^0 \frac{\bar{\mu}(\xi, \eta)}{\{(-l_w(y) - \xi)^2 + (y-\eta)^2\}^{3/2}} d\xi d\eta \right\} \right. \\ & \left. - \{ \bar{\Gamma}(y) - \bar{\mu}(-l_w(y), y) \} \left\{ -\frac{\partial H}{\partial x}(-l_w(y), y) + \frac{1}{4\pi} \int_{-b}^b \frac{\Gamma(\eta)}{(y-\eta)^2} \left(1 + \frac{-l_w(y)}{\sqrt{l_w(y)^2 + (y-\eta)^2}} \right) d\eta \right. \right. \\ & \left. \left. + \frac{1}{4\pi} \int_{-b}^b \int_{-l_w(\eta)}^0 \frac{\mu(\xi, \eta)}{\{(-l_w(y) - \xi)^2 + (y-\eta)^2\}^{3/2}} d\xi d\eta \right\} \right] dy \end{aligned} \quad (15)$$

汎関数(14)式が停留するとき、順流れ、すなわち本来の物理的な流れについて次のことがいえる。

i) $\delta\bar{\mu}$ に関する変分 ((15)式右辺第1項) が0となるとき、滑走板の傾きに関する積分方程式(10)を満足する。

から明らかのように、spray root line 上で p_0 が $1/\sqrt{l_w(y)-x}$ の強い特異性を持って、 μ は $\sqrt{l_w(y)-x}$ の程度の弱い特異性を持つに過ぎない。こうして μ は滑走艇上の至る所で有限値をとり、先に述べた問題点を解決できる。

μ, Γ, l_w をそれぞれ独立な変関数とし、さらに随伴変分原理となるように逆流れの変関数、 $\bar{\mu}, \bar{\Gamma}$ も加えて、(8)、(9)式に倣い、次の汎関数を定義する。この汎関数を停留させるものが(10)、(11)式を満足する。

ii) $\delta\bar{\Gamma}$ に関する変分 ((15)式右辺第2項) が0となるとき、滑走板の高さに関する積分方程式(11)を満足する。逆流れに対しては、

iii) $\delta\mu$ に関する変分 ((15)式右辺第3項) が0となるよう

な $\bar{\mu}$, $\bar{\Gamma}$ は、逆流れの滑走板の傾きに関する積分方程式を満足する。

- iv) $\delta\Gamma$ に関する変分 ((15)式右辺第4項) が0となるとき、逆流れの先端(順流れの trailing edge) で波高と滑走板の高さが一致する。

ただし、逆流れに対する滑走板の傾きに関する積分方程式と滑走板の高さに関する積分方程式とは、順流れに対するそれら(10), (11)で、 x を、 $-x$ に置き換えたものである。逆流れは、順流れと同じ滑走面を持たせているため、逆トリム状態となっているから、そのような条件を満足する逆流れが実際に存在するかは疑問である。本論では、逆流れはあくまで仮想の流れと考え、その存在の有無は問題としないことにする。第5項目は、やや複雑であるが、 δl_w に関する変分が0となる時順流れと逆流れの滑走板の傾きに関する積分方程式がそれぞれ spray root line 上と先端で満足していればよいことになる。しかし一般に積分方程式が浸水面全体で満足されていたとしても、端点(spray root line 及び trailing edge) で積分方程式を満足することが要請されているわけではなく、端点における積分値は任意の値をとることが許される。したがって、 δl_w に関する変分が0となるためには

$$v) \mu(-l_w(y), y) = 0$$

$$vi) \bar{\Gamma}(y) = \bar{\mu}(-l_w(y), y)$$

であることが要求される。v) は μ の定義式(13)式から明らかであるが、物理的には spray root line が渦線となるべきことを示している。vi) は逆流れの Kutta の条件に相当する。

以上から、汎関数 Π が停留するときの $l_w(y)$ が spray root line の形状であることがわかる。

4. 高アスペクト比滑走平板の未定浸水面の決定

前節で示した滑走艇の未定浸水面を求める変分原理の有効性を見るために、アスペクト比が大きい滑走平板について近似した場合を考える。

アスペクト比が大きい場合、滑走艇の傾きに関する積分方程式(10)式の核関数は以下のように近似できる。

$$\begin{aligned} & \frac{1}{4\pi} \int_{-b}^b \frac{\Gamma(\eta)}{(y-\eta)^2} \left(1 + \frac{x}{\sqrt{x^2 + (y-\eta)^2}}\right) d\eta \\ & + \frac{1}{4\pi} \int_{-b}^b \int_{-l_w(\eta)}^0 \frac{\mu(\xi, \eta)}{\{(x-\xi)^2 + (y-\eta)^2\}^{3/2}} d\xi d\eta \\ & \approx -\frac{1}{2\pi} \Gamma(y) \frac{1}{x} + \frac{1}{2\pi} \int_{-l_w(y)}^0 \mu(\xi, y) \frac{d\xi}{(x-\xi)^2} \end{aligned} \quad (16)$$

同様に滑走艇の高さに関する積分方程式(11)式の核関数は

$$\begin{aligned} & \frac{1}{4\pi} \int_{-b}^b \frac{\Gamma(\eta)}{(y-\eta)^2} \left(-l_w(y) + \sqrt{l_w(y)^2 + (y-\eta)^2}\right) d\eta \\ & + \frac{1}{4\pi} \int_{-b}^b \int_{-l_w(\eta)}^0 \frac{\mu(\xi, \eta)}{(y-\eta)^2} \\ & \times \left(1 + \frac{-l_w(y) - \xi}{\sqrt{(-l_w(y) - \xi)^2 + (y-\eta)^2}}\right) d\xi d\eta \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} & \approx -\frac{\Gamma(y)}{2\pi} \log|l_w(y)| - \frac{\Gamma(y)}{2\pi} (1 - \log 2) \\ & + \frac{1}{4\pi} \int_{-b}^b \frac{\Gamma(\eta)}{|y-\eta|} d\eta - \frac{1}{2\pi} \int_{-l_w(y)}^0 \frac{\mu(\xi, y)}{-l_w(y) - \xi} d\xi \end{aligned} \quad (17)$$

と近似できる。ただし、down wash の影響は高次項となるため、これらには含ませていない。

これまで μ と Γ を独立として扱ってきたが、物理的な観点から考えれば、Kutta の条件は滑走板の後端で μ が Γ に等しくなることであり、2次元特性が顕著に表れることを考え、 μ は

$$\mu(x, y) \equiv \Gamma(y) \mu^*(x) \quad (18)$$

のように表すことができるとし、変数 x を

$$x \equiv l_w(y) x^* \quad (19)$$

と変換すると、汎関数 Π (14)式の近似、 Π_a は次のようになる。

$$\begin{aligned} \Pi_a[\Gamma, \bar{\Gamma}, l_w] & \equiv \int_{-b}^b \int_{-1}^0 l_w(y) \left\{ -\bar{\Gamma}(y) \bar{\mu}^*(x^*) \frac{\partial H}{\partial x}(x^*, y) \right. \\ & \quad \left. - \Gamma(y) \mu^*(x^*) \frac{\partial H}{\partial x}(x^*, y) \right\} dx^* dy \\ & + \int_{-b}^b \int_{-1}^0 \bar{\Gamma}(y) \bar{\mu}^*(x^*) \\ & \quad \times \left\{ -\frac{\Gamma(y)}{2\pi} \frac{1}{x^*} + \frac{\Gamma(y)}{2\pi} \int_{-1}^0 \frac{\mu^*(\xi^*)}{(x^* - \xi^*)^2} d\xi^* \right\} dx^* dy \\ & + \int_{-b}^b \left\{ -\bar{\Gamma}(y) H(-l_w(y), y) - \Gamma(y) H(0, y) \right\} dy \\ & + \int_{-b}^b \bar{\Gamma}(y) \left\{ -\frac{\Gamma(y)}{2\pi} \log|l_w(y)| - \frac{\Gamma(y)}{2\pi} (1 - \log 2) \right. \\ & \quad \left. + \frac{1}{4\pi} \int_{-b}^b \frac{\Gamma(\eta)}{|y-\eta|} d\eta + \frac{\Gamma(y)}{2\pi} \int_{-1}^0 \frac{\mu^*(\xi^*)}{1 + \xi^*} d\xi^* \right\} dy \end{aligned} \quad (20)$$

ここで関数 $\mu^*(x^*)$, $\bar{\mu}^*(x^*)$ を

$$\begin{aligned} \mu^*(x^*) & = \frac{2}{\pi} \int_{-1}^{x^*} \sqrt{\frac{-\xi}{1+\xi}} d\xi \\ \bar{\mu}^*(x^*) & = \frac{2}{\pi} \int_x^{0^*} \sqrt{\frac{1+\xi}{-\xi}} d\xi \end{aligned} \quad (21)$$

とする。これは、2次元平板翼の解の形を与えるものである。このように与えたので

$$\mu(0, y) = \Gamma(y) \quad (22)$$

$$\bar{\mu}(-l_w(y), y) = \bar{\Gamma}(y) \quad (23)$$

となり、順流れ、逆流れに対して Kutta の条件を課したことになる。また、平板を考えているから

$$\frac{\partial H}{\partial x}(x, y) = -\tau : \text{const.} \quad (24)$$

$$H(0, y) = H_0 : \text{const.} \quad (25)$$

$$H(-l_w(y), y) = H_0 + \tau l_w(y) \quad (26)$$

である。このとき、汎関数 Π_a の第1変分は以下ようになる。

$$\begin{aligned} \delta \Pi_a & = \int_{-b}^b \delta \bar{\Gamma}(y) \left[\frac{1}{4\pi} \{ \pi \tau l_w(y) - \Gamma(y) \} \right. \\ & \quad \left. + \left\{ -H_0 - \tau l_w(y) - \frac{\Gamma(y)}{2\pi} \log|l_w(y)| \right\} \right] dy \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 & + \frac{3\Gamma(y)}{2\pi} \log 2 + \frac{1}{4\pi} \int_{-b}^b \frac{\Gamma(\eta)}{|y-\eta|} d\eta \Big] dy \\
 & + \int_{-b}^b \delta\Gamma(y) \left[\frac{1}{4\pi} \{ \pi\tau l_w(y) - \bar{\Gamma}(y) \} \right. \\
 & + \left. \left\{ -H_0 - \frac{\bar{\Gamma}(y)}{2\pi} \log |l_w(y)| \right. \right. \\
 & + \left. \left. \frac{3\bar{\Gamma}(y)}{2\pi} \log 2 + \frac{1}{4\pi} \int_{-b}^b \frac{\bar{\Gamma}(\eta)}{|y-\eta|} d\eta \right\} \right] dy \\
 & + \int_{-b}^b \delta l_w(y) \left[\frac{\tau}{4} \Gamma(y) - \frac{\tau}{4} \left\{ 3 + 2 \frac{\Gamma(y)}{\pi\tau l_w(y)} \right\} \bar{\Gamma}(y) \right] dy
 \end{aligned} \tag{27}$$

$\Gamma, \bar{\Gamma}, l_w$ を独立に扱う限り、有用な方程式は得られないが、その片鱗を見出すことができる。実際、(27)式の $\delta\bar{\Gamma}(y)$ に関する変分の項（第1項）の内、第1項目は滑走板の傾きと Γ を規定する関係、第2項目は滑走板の高さに関する積分方程式である。同様のことは $\delta\Gamma(y)$ に関する変分の項についても見られる。そこで、 Γ と l_w を独立に扱うことを止め、

$$\Gamma(y) = \pi\tau l_w(y) \tag{28}$$

すなわち、2次元平板翼に対する関係で拘束する。これは μ^* を(21)式のように与えたときの、滑走板の傾きに関する積分方程式の解に他ならない。 $\delta\bar{\Gamma}(y)$ に関する変分（右辺第1項）が0であるとき以下の積分方程式を満足する。

$$\begin{aligned}
 H_0 + \tau l_w(y) &= -\frac{\Gamma(y)}{2\pi} \log |l_w(y)| \\
 &+ \frac{3\Gamma(y)}{2\pi} \log 2 + \frac{1}{4\pi} \int_{-b}^b \frac{\Gamma(\eta)}{|y-\eta|} d\eta
 \end{aligned} \tag{29}$$

これは

$$\begin{aligned}
 H_0 &= \frac{\Gamma(y)}{2\pi} \log \frac{2}{|l_w(y)|} - \frac{\Gamma(y)}{\pi} (1 - \log 2) \\
 &+ \frac{1}{4\pi} \int_{-b}^b \frac{\Gamma(\eta)}{|y-\eta|} d\eta
 \end{aligned} \tag{30}$$

とも書ける。これは松村ら⁶⁾が示した積分方程式に他ならず、spray root line 上で波高と滑走板の高さが一致する条件である。 Γ と l_w を(28)で拘束したため、 $\delta\Gamma(y), \delta l_w$ を併せた変分（右辺第2項、第3項）が0であれば、(29)と同じ積分方程式を満足するから

$$\Gamma(y) = \bar{\Gamma}(y) \tag{31}$$

の結論を得る。以上から汎関数 Π_a を停留させる $l_w(y)$ が求める spray root line の形状である。

松村らは(30)式を解いて解を得ているが、変分原理によればはるかに簡単に近似解が得られることを示す。 $l_w(y)$ に相応の関数を用いれば、近似に応じた精度の解が得られることが期待されるが、例えば単純に

$$l_w(y) = l_{w0} \sqrt{b^2 - y^2} \tag{32}$$

を用いてみることにする。さらに

$$\Gamma(y) = \pi\tau l_w(y) \tag{33}$$

$$\bar{\Gamma}(y) = \pi\tau l_w(y) \tag{34}$$

と拘束すると、 Π_a は

$$\Pi_a[l_{w0}] = -\frac{1}{3}(6 - 10 \log 2) \pi\tau^2 b^3 l_{w0}^2$$

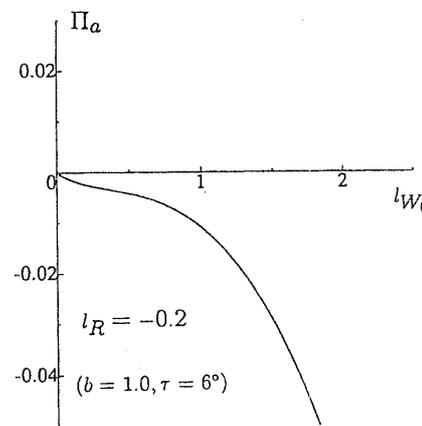
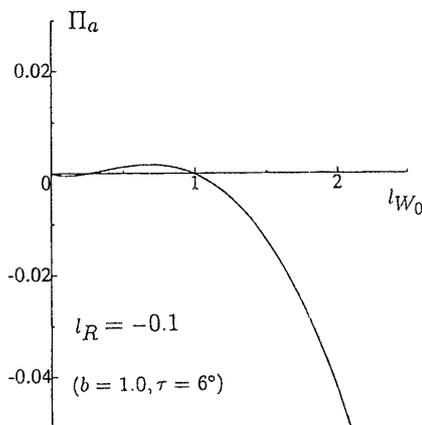
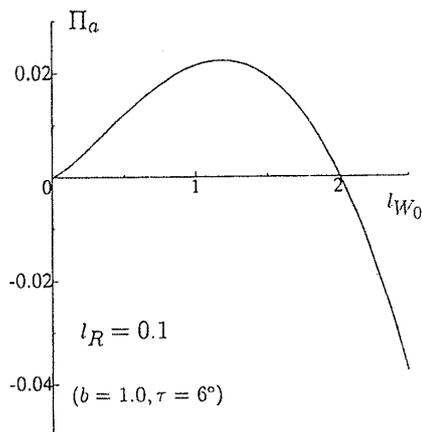


Fig. 2 Variation of characteristics of functional corresponding to l_R

$$\begin{aligned}
 & -\frac{2}{3} \pi\tau^2 b^3 l_{w0}^2 \log |l_{w0}| \\
 & -\pi^2 \tau b^2 H_0 l_{w0}
 \end{aligned} \tag{35}$$

となる。この汎関数は両辺を τ^2 で割れば、関数に含まれるパラメタは滑走板の半幅 b と H_0/τ のみになる。 H_0/τ は滑走板の静止時水線の座標 ($-l_R$) を表すので、滑走板の幅と静止時の浸水長が同じであれば、spray root line の形状は

トリムには依存しない⁶⁾。

汎関数 Π_a には l_{w_0} に関する対数非線形項が含まれるため、停留点に多様性を生じさせる。 $l_{w_0} < 0$ となることは物理的にありえないので、 $l_{w_0} > 0$ に限って考える。滑走板の半幅 b が 1 の場合の汎関数 Π_a のグラフを Fig. 2 に示す。汎関数 Π_a の停留点は静止時浸水長 l_R に対し以下のようなになる。

- i) $l_R < 0$ の場合 (滑走板の後端が静水面より下にある場合)
汎関数 Π_a の停留点は 1 つ。
- ii) $-0.15 < l_R < 0$ の場合 (滑走板の後端が静水面よりも上にある場合)
汎関数 Π_a の停留点は 2 つ。
- iii) $l_R < -0.15$ の場合 (滑走板の後端が静水面よりも上にある場合)
汎関数 Π_a は $l_{w_0} > 0$ に停留点を持たない。

松村らは滑走板の浸水面は滑走板の後端高さが静水面より下にある場合は 1 つ、滑走板の後端高さが静水面より上にある場合は 2 つの解があり、後者の場合、解を持つためには滑走板の後端の設定高さには限界があることを示したが、本論で示した近似汎関数は、非常に簡単な割に、このような性質を失ってはいない。 l_R と l_{w_0} の関係を図示すると Fig. 3 のようになる。

計算によって得られた浸水面形状を示す。Fig. 4 は松村らの計算結果との比較である。解の形を楕円分布と仮定しているため、滑走板の側端での挙動の違いを除けば、両者はよく一致している。彼らが行った実験結果を Fig. 5 に示

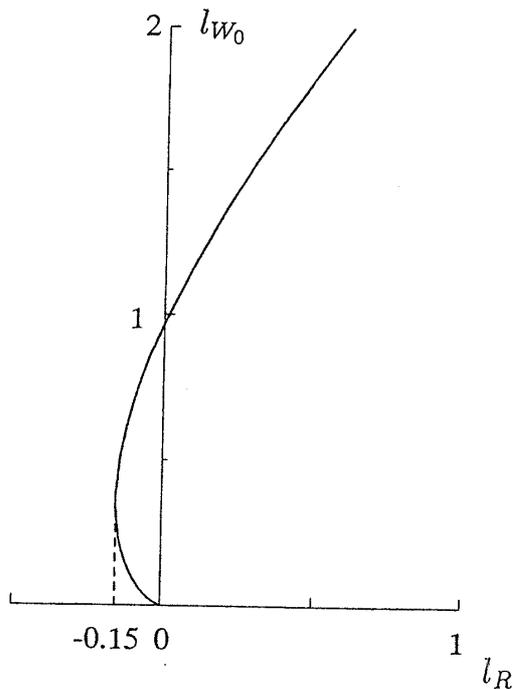


Fig. 3 Calculated wetted length at center line ($b=1$)

す。これは全幅 800[mm] のアクリル製の滑走板を $U_\infty = 3.0$ [m/s] ($Fn = 1.515$), $\tau = 6^\circ$ で曳引したときの浸水面形状である。なお、図中の数値は滑走板の半幅で無次元化したものである。実験で滑走板が接水する限界の高さは $l_R = -0.07$ に相当し、計算で求めた値、 $l_R = -0.150$ に近い値をとる。しかし、浸水面は実験値に比べ 2 倍程度大きく見積もられている。この原因は重力の影響を考慮していないことが考えられる。松村らが指摘しているように重力の影響は滑走板の近傍での波高を低減する効果があると考えられ、それに伴って浸水面の減少が見込まれる。これは今後の課題とする。

5. 結 言

滑走艇まわりの流れをあらかじめ浸水面を定めることができない未定境界の問題と考え、重力影響を無視して、変

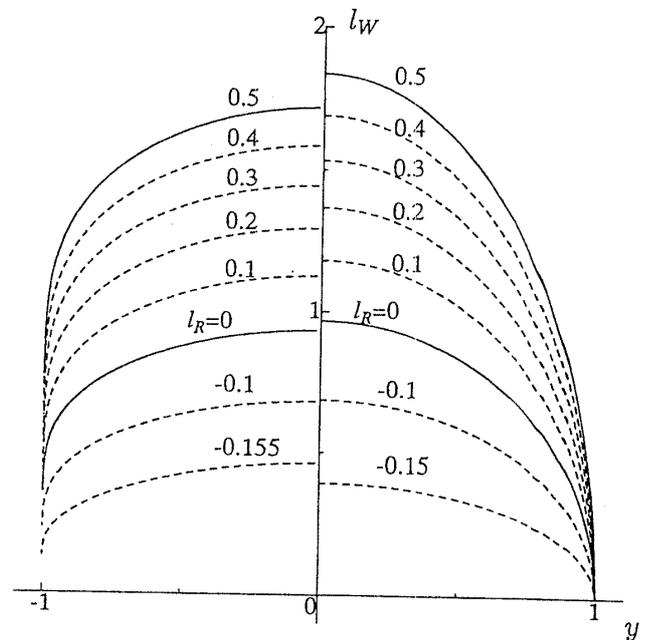


Fig. 4 Comparison of spray root lines with results obtained by Matsumura et al. (left side)

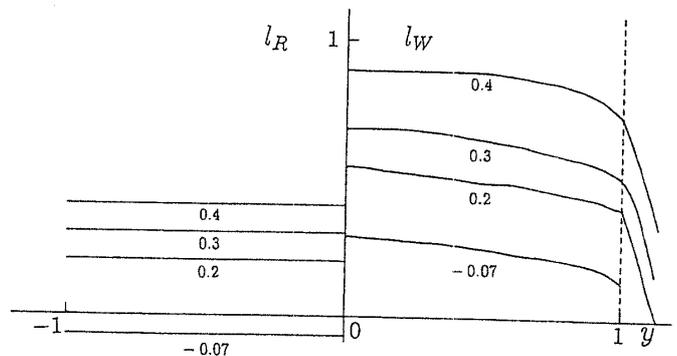


Fig. 5 Measured spray root lines corresponding to various restrained still water lines obtained by Matsumura et al.

分直接法の観点から、この問題を解くことを考えた。滑走艇まわりの流場に対する変分原理として、船底圧力を未知とした別所の変分原理が知られていたが、本論では

1) 船底圧力を変関数とする変分原理は、圧力の spray root line 上での特異性のために、未定境界問題への拡張には適さないことがわかった。

2) 代わって、渦線関数 (または loading function) μ と、固有値の役割をする縦切り断面まわりの循環 Γ の2つを変関数とする変分原理を示し、そのオイラー方程式として、滑走艇の傾きに関する積分方程式と、spray root line 上での波高と滑走艇の高さが一致する条件が得られることを示した。

3) この変分原理に基づき、高アスペクト比近似した汎関数を示し、近似汎関数のオイラー方程式として松村らが示した浸水長分布に関する積分方程式が得られることを示した。浸水面形状を単純な関数で表し、停留解を求めたところ、簡単な代数計算にも関わらず、彼らの積分方程式の解とよく一致した。また、滑走艇の接水限界高さやパラメータ依存性等、定性的性質も保持されていることを示した。

実験値により近い結果を得るためには、重力影響を考慮することが必要であると考えられる。これは今後の課題とするが、この場合にも Γ と μ を用いて定式化することが重要であると考えられる。

参 考 文 献

- 1) 鈴木勝雄：高速艇の流体力学，日本造船学会推進性能研究委員会 高速艇研究特別委員会シンポジウム“高速艇と性能” (1989)
- 2) 松村清重，黒龍英之：滑走板船首部のスプレー現象を伴う流場について，日本造船学会論文集，第174号 (1993)
- 3) Wagner, H.: Über Stoss- und Gleitvorgänge an der Oberfläche von Flüssigkeiten, Z. Angew. Math. mech. 12 (1932)
- 4) 平野 進，内田 雄，姫野洋司：柱状滑走体の底面圧力分布の計測，関西造船協会誌，第213号 (1990)
- 5) 平野 進，稲津晶平，姫野洋司：柱状滑走体の spray の観測，関西造船協会誌，第214号 (1990)
- 6) 松村清重，水谷友基：高アスペクト比近似に基づく定式化による滑走板の未定浸水面形状の決定，日本造船学会論文集，第179号 (1996)
- 7) 別所正利：定常滑走板の理論に関する一考察，西部造船会会報，第54号 (1977)
- 8) 一色 浩：造波問題における変分法的取り扱い，日本造船学会，第2回耐航性に関するシンポジウム (1977)
- 9) B. A. フィンレイソン (鷲津久一郎，山本善之，川井忠彦 共訳)：重みつき残差法と変分原理 培風館 (1974)
- 10) Flax, A. H.: General Reverse Flow and Variational Theorems in Lifting-Surface Theory, J. Aeronautical Sciences, Vol. 19, No. 6, (1952)
- 11) Bessho, M., Nomura, K.: A Contribution to the Theory of Two-Dimensional Hydro-Planing, Memories of the Defense Academy, Japan, Vol. 10, No. 1, (1970)
- 12) 花岡達郎：プロペラの基礎理論 (特に Munk の定理と揚力線理論について)，船舶技術研究所報告，第5巻，第6号 (1969)
- 13) Tuck, E. O.: Low-Aspect-Ratio Flat-Ship Theory, J. Hydronautics, Vol. 9, No. 1 (1975)