有限被覆法による3次元ソリッド構造の解析法

正員 鈴 木 克 幸* 正員 大 坪 英 臣*
金 伝 栄* 中 西 克 嘉*

Three Dimensional Solid Analysis Using Finite Cover Method

by Katsuyuki Suzuki, *Member* Hideomi Ohtsubo, *Member*
Jin Chuanrong Katsuyoshi Nakanishi

Summary

The concept of cover is employed from manifold method into voxel analysis and applied to 3D solid analysis to make the accuracy control possible. For the mathematical cover, regular square or cubic cover is used, and appropriate weight functions and cover functions that keep the linear independency between approximate functions are proposed. Mathematical proofs are given for the sufficiency of some conditions. The integration method of stiffness matrix and load vector using geometric voxels is proposed. The example problem with analytical solution is solved, and it was shown that with cover functions with higher order polynomial, the error becomes smaller. Also local arrangement of higher order cover functions are carried out, and almost same error norm with the case higher order cover function is used all over.

1．緒　　言

設計の3次元CADへの移行に伴い、シミュレーションの中心的な技術である有限要素解析も3次元への移行が急速に進んでいる。それに伴い、モデルの複雑化とともに解析モデル生成やメッシュ分割に要するコストが莫大になるという問題が生じている。現在、工業製品の有限要素解析において有限要素モデル生成に要する時間がほとんどを占めているといっても過言ではない。

これに対し、近年対象をメッシュ分割することなく解析を行おうというメッシュレス法が注目を集め、多くの研究が行われている[1]。しかし、現在までこのメッシュフリー法を本当にメッシュ生成が困難である3次元ソリッドへの適用を試みた例はほとんどない。これは、おもに積分の問題、境界条件の設定の問題、剛性マトリクスのスパース性が少なくなる等の問題があるためであると思われる[2]。

一方において、3次元ソリッドのメッシュを容易に生成しようという考え方に基づいたボクセル解析[3]は、基本的に従来の有限要素解析の考え方をベースにしているため、上記のような問題が生じず、3次元ソリッド解析に非常に有効である。しかし、モデルをボクセルとしてギザギザの形状で近似するため、精度に関しては多少問題があり、これに対して鈴木ら[4]は多重ボクセル情報を用いた解析法を提案し、解析の詳細度と形状表現の詳細度をそれぞれ独立に定義することにより、境界をより正確に表現することを可能にした。

ボクセル解析法のもう1つの問題点として、この方法は全体を一様なメッシュで分割するため、有限要素法のようにメッシュサイズを部分的に細かくして精度コントロールを行うことができないという点がある。これに対して、この論文では、Manifold Method[5,6]に規則的な被覆を導入することにより、ボクセル解析のメリットを生かしながら、局所的な精度コントロールを可能にする方法として有限被覆法[7]（Finite Cover Method, FCM）を提案し、その有効性を実証する。

* 東京大学大学院工学系研究科

原稿受理　平成10年7月10日
秋季講演会において講演　平成10年11月12，13日

2. 有限被覆法

2.1 Manifold法

Manifold 法に基づいた有限被覆法の特徴的な考え方は、Fig. 1のように「近似関数の定義される数学的な部分領域」と「支配方程式が満たされるべき物理的な部分領域」を別々にとらえることにある。すなわち、物体形状とは無関係に数学的な関数領域である「被覆」を設定できるため、どんなに複雑な形状をしている物体でも規則的な形状の被覆を設定することで解析が可能となる。離散化の概念自体は従来の有限要素法と同様であり、数学的な部分領域である被覆によって変位を離散化した後、支配方程式の弱形式に代入して物体の存在する領域で積分を行う。

しかし、この数学的な被覆は全く任意に配置できるわけではなく、後述するような重み関数の条件を満足する関数が定義できなければならない。また、用いた数学被覆に対して適当な重み関数を見つけることができた場合にも、剛性マトリクスや荷重ベクトルの計算にはその数学被覆と物理領域の共通な領域で積分を行う必要があり、任意の数学被覆においてこの積分を行うのは容易ではない。

そのため、数学的には連続体から不連続体まで扱える非常に汎用的な方法であるが、ほとんどの適用例は地盤問題などの不連続体である。

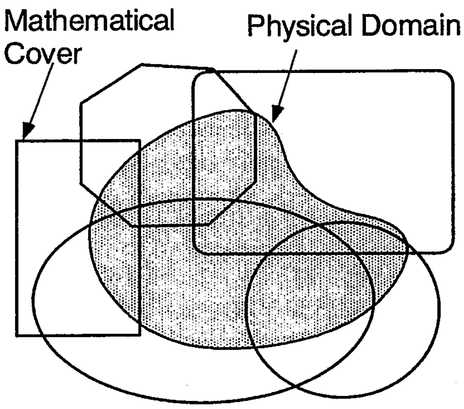

Fig. 1 Mathematical Cover and Physical Domain in Manifold Method

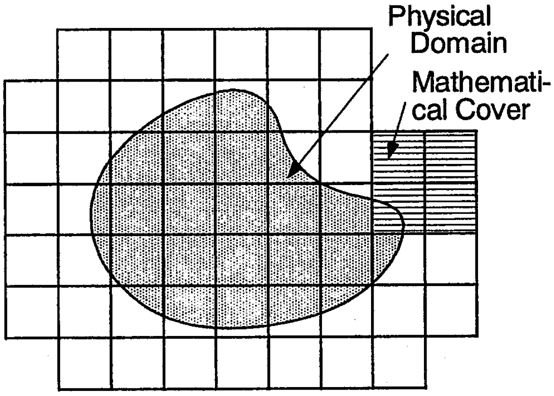

Fig. 2 Mathematical Cover and Physical Domain in Finite Cover Method

2.2 有限被覆法における数学被覆

このManifold法を鋼構造等の連続体に適用する場合に問題となるのは、以下の2つの点であると思われる。

- どのような数学被覆を用いるか
- その被覆上で、どのような関数（重み関数、被覆関数）を用いるか。

有限被覆法[7]では、Fig. 2のように互いに重なり合う正方形（2次元の場合）または立方体（3次元の場合）の被覆を用いて物理領域をおおう。Fig. 2では、ハッチをつけた4つの正方形のブロックが1つの被覆に相当する。3次元の場合は、8つの小さい立方体が1つの被覆になる。また、任意の物理領域は必ず4つ（2次元の場合）または8つ（3次元の場合）の数学被覆によって覆われることになる。このような数学被覆を用いるメリットとして、以下のようなことが考えられる。

- 被覆の生成が非常に容易に行える。これは、被覆をある意味の「要素」と解釈すれば、領域に対する要素生成が容易に行えるというボクセル解析法のメリットと共通する。これは特に3次元領域において大きなメリットとなる。
- 重み関数を定義することが容易にできる。一般に、任意の数学被覆において後述するような条件を満足する重み関数を定義するのは容易ではないが、ここに述べる規則的な正方形(立方体)の被覆に対しては適当な重み関数を定義することができる。
- 領域の積分を容易に行える。一般に任意形状の領域の積分にはガウス積分等の高精度な積分法を用いることは困難で、領域を細かいセルに分割する必要がある。この数学被覆の場合、被覆を分割したものをそのままセルとして用いることによって積分が容易に行える。

2.3 重み関数、被覆関数の定義

それでは、有限被覆法として使うべき具体的な重み関数、被覆関数を考えてみよう。各数学被覆において、変位は以下のように近似される。

$$u(x)=\sum_{i=1}^{k} f_i(x)w_i(x) \tag{1}$$

ただし、

$f_i(x)$ ：被覆関数

$w_i(x)$ ：重み関数

であり、すべての物理領域はk=4個の数学被覆（2次元の場合）またはk=8個の数学被覆（3次元の場合）によって覆われている。

マニフォールド法における重み関数は、U_iを各数学被覆領域とすると、以下の条件を満足する必要がある[5]。

$$\begin{cases} w_i(x)\geq 0 & x\in U_i \\ w_i(x)=0 & x\notin U_i \end{cases} \tag{2}$$

$$\sum w_j(x)=1 \tag{3}$$

(2)の条件は近似関数がその被覆内にしか存在しない（被覆外でゼロである）という条件である。(3)式の条件は、すべての重み関数を足し合わせると1（定数）となる（逆にいえば、1をいくつかの関数に分解した）という意味でPartition of Unityと呼ばれる。また、被覆関数 は基本的に任意に設定できるが、これらの関数は、被覆ごとの被覆関数と重み関数の積がお互いに一次独立性を保つように定義しなければならない。この条件は後に議論する。被覆関数としてはここでは多項式を用いることとする。

上記の条件を満足する重み関数として、最も簡単なものとして、有限要素法の1次アイソパラメトリック要素等で用いられる各座標軸方向に線形関数を用いた双一次関数が考えられる。例えば2次元で数学被覆が(x, y)∈[-2, 2] x [-2, 2]で定義される場合、以下のような式で表される。Fig.3はこれをプロットしたものである。

$$w(x,y)=\begin{cases}(x+2)(y+2)/4 \\ \qquad (-2\le x\le 0,-2\le y\le 0) \\ (x+2)(-y+2)/4 \\ \qquad (-2\le x\le 0,0\le y\le 2) \\ (-x+2)(y+2)/4 \\ \qquad (0\le x\le 2,-2\le y\le 0) \\ (-x+2)(-y+2)/4 \\ \qquad (0\le x\le 2,0\le y\le 2)\end{cases} \tag{4}$$

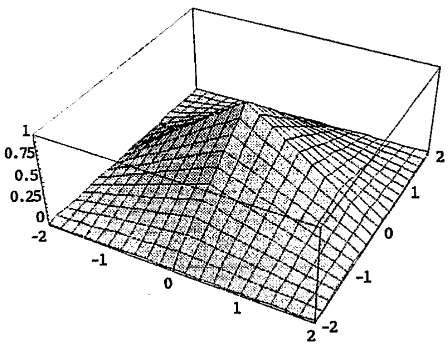

Fig. 3 Bilinear Weight Function

しかし、実はこのような重み関数を用いることができるのは被覆関数の多項式として0次関数（定数関数）のみを用いる場合だけである。例えば、1次元において以下のような例を考えてみる。

$$w_i(x)=a_{i0}\div a_{i1}x \tag{5}$$

$$f_i(x)=d_{i0}+d_{i1}x \tag{6}$$

この時2つの被覆U_i, U_{i+1}の重なり合った領域での変位の近似関数$u(x)$はそれぞれの被覆関数に重み関数をかけた和であり、

$$\begin{aligned}u(x)&=w_i(x)f_i(x)+w_{i+1}(x)f_{i+1}(x)\\ &=g_0(d_{i0},d_{i+10})+g_1(d_{i0},d_{i1},d_{i+10},d_{i+11})x \\ &\quad +g_2(d_{i1},d_{i+11})x^2\end{aligned} \tag{7}$$

となる。$u(x)=0$とすると、$1,x,x^2$は一次独立であるから次式が成り立つ。

$$\begin{cases}g_o(d_{i0},d_{i+10})=0\\ g_1(d_{i0},d_{i1},d_{i+10},d_{i+11})=0\\ g_2(d_{i1},d_{i+11})=0\end{cases} \tag{8}$$

しかしこれは4つの未知数を含む 3 つの連立方程式であるから、解は不定である。すなわち、このような場合重みつき被覆変位関数はお互いに一次独立ではない。同様のことが2次元、3次元に対しても言うことができ、1次以上の被覆関数を用いる場合に、被覆の異なる近似関数間での一次独立性を保つためには、重み関数にさらにいくつかの条件を科す必要がある。以下、被覆関数が複数の互いに1次独立な関数の和で表現されるとき、近似関数の1次独立性が満足されるような重み関数の十分条件をいくつか検討してみる。なお、ここでは1次元で示すが、これを多次元に拡張する際にはそれぞれの次元で独立に関数を定義して、それらを掛け合わせればよい。

(1) 1次独立性の重み関数に対する十分条件　その1

被覆iに対する被覆関数を以下のように定義する。

$$\Phi_i(x)=\sum_{j=1}^{n_i} d_{ij}\phi_{ij}(x) \tag{9}$$

ただし、ϕ_{ij}はi番目の被覆内で互いに1次独立な関数で、n_i個定義されているものとする。d_{ij}はそれらの関数に対する適当な係数である。近似関数は、以下のようになる。

$$u=\sum_i w_i\Phi_i=\sum_i\sum_{j=1}^{n_i} d_{ij}w_i(x)\phi_{ij}(x) \tag{10}$$

この時、解が一意的に求められるためには$w_i\phi_{ij}$が互いに1次独立である必要がある。同じ被覆i内での1次独立性は明らかであるので、異なるiでの1次独立性を考える。

定理1：

重み関数w_iが次の条件を満たす時、近似関数$w_i\Phi_i$はiに対して互いに1次独立である。

$$\begin{cases}w_i(x)\ge 0 & x\in U_i\\ w_i(x)=0 & x\notin U_i\end{cases} \tag{11}$$

$$\sum_i w_i=1 \tag{12}$$

$$\begin{cases}w_i=1\\ w_j=0, j\ne i\end{cases} \quad \text{at} \quad O_i \tag{13}$$

$$w_j^{(k)}=0, k=1,2,\cdots n_j-1 \quad \text{at} \quad O_i \tag{14}$$

ただし、O_i は実際は被覆内の任意の点でよいが、FCM への適用を容易にするためここでは被覆 U_i の中心点とする。上付き添字(k)は k 階の微分を意味する。

証明：
(11)、(12)式は重み関数の一般的な条件である。全領域で

$$u=\sum_i w_i\Phi_i=0 \qquad (15)$$

の場合に、$w_i\Phi_i$ の n_j-1 階までの微分が O_i で 0 となることを数学的帰納法で証明すれば、一次独立性は言える。
i) 0 階の場合
(15)式が成り立つとすると、(13)式より明らかに以下の式が成り立つ。

$$\Phi_i=0 \quad \text{at} \quad O_i \qquad (16)$$

ii) Φ_i の m-1 階までの微分が O_i で 0 であるとする。すなわち、

$$\Phi_i^{(j)}=0 \ \text{at} \ O_i, \ i=1,2,\cdots m\text{-}1 \qquad (17)$$

とする。その時、m 階の微分は(15)式から

$$u^{(m)}=\sum_i\sum_{l=0}^{m}C_m^l w_i^{(l)}\Phi_i^{(m-l)}=0 \qquad (18)$$

が成り立つ。よって、(14)、(15)式より、

$$\Phi_i^{(m)}=0 \quad \text{at} \quad O_i \qquad (19)$$

が言える。よって Φ_i の n_j-1 階までの微分は O_i で 0 となる。
証明終わり

実は、この意味では普通の有限要素法（FEM）は FCM の特例と見られる。すなわち、FEM にこの一時独立性の問題がないのは、今の条件がすべて満たされているからである。つまり、普通の有限要素法の形状関数をここでいう重み関数、被覆関数を定数関数と考えると、(11)～(13)式の条件は普通の有限要素法の形状関数が満たしている上、被覆関数が 0 次であるから、(14)式の条件は不要になる。ただし、形状関数の構築は近似関数の完備性を満足するため面倒になる。

以上の条件は非常に一般的であるが、これによって重み関数を構築すると被覆関数の次数が上がるに伴って、(14)の条件を満足するために重み関数の次数もどんどん上がり、それに伴い近似関数の次数は非常に高くなってしまう。特に、剛性行列を作る時、積分関数の次数が高すぎると、厳密な積分に必要なサンプリング点の数が急速に増加し、計算時間が増加するのみでなく、高次の近時を行うガウス積分の点や重みをあらかじめ計算しておくのが困難になる。また、被覆関数の次数を変えるたびに重み関数も変化させなければならないのは非常に不便である。そこで、もう一つの十分条件を考え、重み関数の次数が被覆関数の次数と無関係になるように構築することを考える。

(2) 1 次独立性の重み関数に対する十分条件　その 2

前述のように、ここでは別の定義により、被覆関数の次数と無関係に定義できる重み関数を考える。ここでも 1 次元で述べるが、前述のようにそれぞれの次元の関数を掛け合わせることにより多次元への拡張は容易に行うことができる。

すなわち、Fig. 4 に示すような、それぞれの数学被覆の中心である O_1 と O_2 の中点 C の左右で異なる、微係数が連続な 2 次関数よりなる重み関数を考える。式であらわすと、以下のようになる。

$$w_i(x)=\begin{cases} w_{il} & x\le C \\ w_{ir} & x>C \end{cases}, \quad i=1,2 \qquad (20)$$

ただし、

$$\begin{aligned} w_{1l}&=-a(x-O_1)^2+1 \\ w_{1r}&=a(x-O_2)^2 \\ w_{2l}&=a(x-O_1)^2 \\ w_{1r}&=-a(x-O_2)^2+1 \end{aligned} \qquad (21)$$

$$\text{ただし} \quad a=2/(O_2-O_1)^2$$

この関数は明らかに、(2)、(3)の条件を満足する。

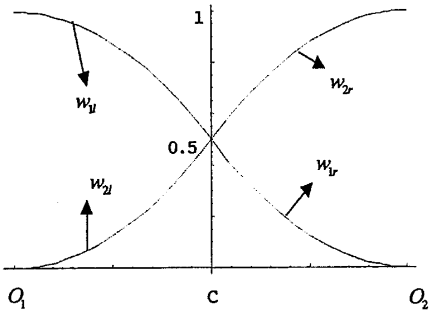

Fig. 4 Quadratic Weight Function

定理 2：
(20)～(21)で定義された重み関数および(9)で定義される被覆関数を用いたとき、近似関数 $w_i\Phi_i$ は i に対して互いに 1 次独立である。

証明：
O_1 と O_2 の間で恒等的に

$$u=\Phi_1 w_1+\Phi_2 w_2=0 \qquad (22)$$

であるとする。明らかに、その中の 1 点 C でも

$$u^{(k)}(C)=0, k=0,1,2,\cdots\infty \qquad (23)$$

となる。$k\ge 2$ の時、C 点で、右側と左側から別々に k 階の微分を求めると、

$$u^{(k)}(C)=\sum_{l=0}^{2}C_k^l(\Phi_1^{(k-l)}w_{1l}^{(l)}+\Phi_2^{(k-l)}w_{2l}^{(l)})=0 \qquad (24)$$

$$u^{(k)}(C)=\sum_{l=0}^{2}C_k^l(\Phi_1^{(k-l)}w_{1r}^{(l)}+\Phi_2^{(k-l)}w_{2r}^{(l)})=0 \qquad (25)$$

となる。(24)～(25)式より、

$$\Phi_1^{(k)}(C) = \Phi_2^{(k)}(C),\ k = 0,1,2,\cdots\infty \quad (26)$$

つまり、O_1とO_2の間で、

$$\Phi_1 = \Phi_2 \quad (27)$$

であり、その上、

$$w_1 + w_2 = 1 \quad (28)$$

であるから、O_1とO_2の間で恒等的に

$$u = \Phi_1 = \Phi_2 = 0 \quad (29)$$

となる。よって、近似関数の１次独立性がいえる。

証明終わり

この重み関数を用いれば、被覆関数の次数はいくらあがっても、近似関数が一次独立性を保つ。また、各被覆間においてΦ_iの次数は独立に定義することができるので、局所的に次数を上げる場合にもこれは成立する。

Table 1 は各被覆で同じ n 次の被覆関数を定義した場合の各関数の次数を示している。積分すべき関数としては変位の近似関数を１回微分したものをひずみとして、エネルギーを積分することになる。例えば、２次の被覆関数を用いたい場合、(1)の項で示した重み関数を用いると近似関数は７次となり、積分するべき多項式はそれらを変位として剛性の形に掛け合わせるので 12 次になっていしまう。また、３次の被覆関数では 18 次になってしまう。このような高次のガウス積分のスキームは非常に多くのサンプリング点を要するので計算時間がかかるのみでなく、その積分点、重みを Legendre 多項式より求めるのも困難である。(2) の項で示した２次の重み関数であれば、２次の被覆関数に対して６次、３次の被覆関数に対して８次の関数を積分するスキームを用いればよい。

Table 1 Comparison of the Order of Functions

Type of Weight Function	Cover Function	Weight Function	Approximate Function	Function to be Integrated
(1)	n	2n+1	3n+1	6n
(2)	n	2	n+2	2n+2

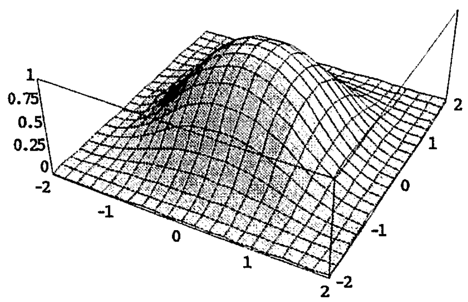

Fig. 5 Quadratic Weight Function in 2D

そこで、以後重み関数として(2)で定義した関数を使うことにする。これを、２次元、３次元に拡張するにはそれぞれの座標軸方向に対してこの関数を掛け合せればよい。Fig. 5 に２次元の場合の重み関数を示す。

被覆関数に関しては、任意の１次独立な関数を定義できる。ここでは被覆変位関数として(30)式のように最大２次までの完全多項式を用い、多項式のそれぞれの項に独立した自由度を与える。完全多項式であるから、被覆変位関数として１次関数、２次関数を用いる場合には、各被覆は、それぞれ一軸方向あたり 4,10 個の自由度を持つことになる Fig. 6 にいくつかの被覆関数と、重み関数をかけた近似関数の例を示す。

$$f_i(x,y,z) = a_0 + b_1x + b_2y + b_3z + c_{11}x^2 + c_{22}y^2 + c_{33}z^2 + c_{12}xy + c_{23}yz + c_{31}zx \quad (30)$$

この被覆関数の次数は被覆ごとに変えることができるため、FEM のように高次の近似関数を導入するために内部節点を新たに設けるといった作業は全く必要なく、容易に高次被覆を導入できる。

2.4 剛性マトリクス、荷重ベクトルの計算

次に、このようにして定義された近似関数を変位として用い、Galerkin 法に基づき剛性マトリクス、荷重ベクトルを計算する。有限被覆法においては、ボクセル解析法のように境界をギザギザの形状で近似するのではなく、実際の物理領域で表現し、その領域で積分が行われる。剛性マトリクスは、物理領域に対して

$$[K] = \int_\Omega [B]^T[D][B]d\Omega \quad (31)$$

と計算することができる。ただし、$[D]$は材料定数マトリクス、$[B]$はひずみの近似を$\{\varepsilon\}$、未知定数を$\{d\}$としたとき

$$\{\varepsilon\} = [B]\{d\} \quad (32)$$

となるマトリクスである。

一般に、有限要素法においてはこの積分にガウス積分が用いられるが、これは積分を行う領域の形状が２次元の場合３角形や４角形、３次元の場合４面体や６面体といった比較的単純な領域であるため行うことができるのであり、複雑な形状の領域に対してはガウス積分を行うことは難しい。そこで、被覆をさらに細分化した形状ボクセルをあらかじめ定義しておき、それを用いて積分を行う方法である。境界にある被覆に対しては、それをさらに細分化し、たとえば Fig. 7 のように 8×8×8 に分割し、それぞれの中央の点が物体内部に存在するか外部に存在するかを示すフラッグ（内部なら 1、外部なら 0 の値を持つ）を持たせる。これらは、境界のボクセル要素の詳細な形状を表現するので、「形状ボクセル」[4] と呼ぶ。この情報を補助的に用い、物体内部にある形状ボクセルに対して各形状ボクセルの中央の点で積分するべき関数の値を評価し、以下のように形状ボクセルの体積を重みとしてかけて(33)式のように和を取ることにより、複雑な形状の積分を近似的に行うことができる。

$$[K]=\int_{\Omega}[B]^T[D][B]d\Omega \approx \sum_{in-voxels}[B]^T[D][B]V_e \tag{33}$$

ただし、V_e は形状ボクセルの体積である。

境界条件は、文献4)同様に変位拘束、荷重ともに近似的に

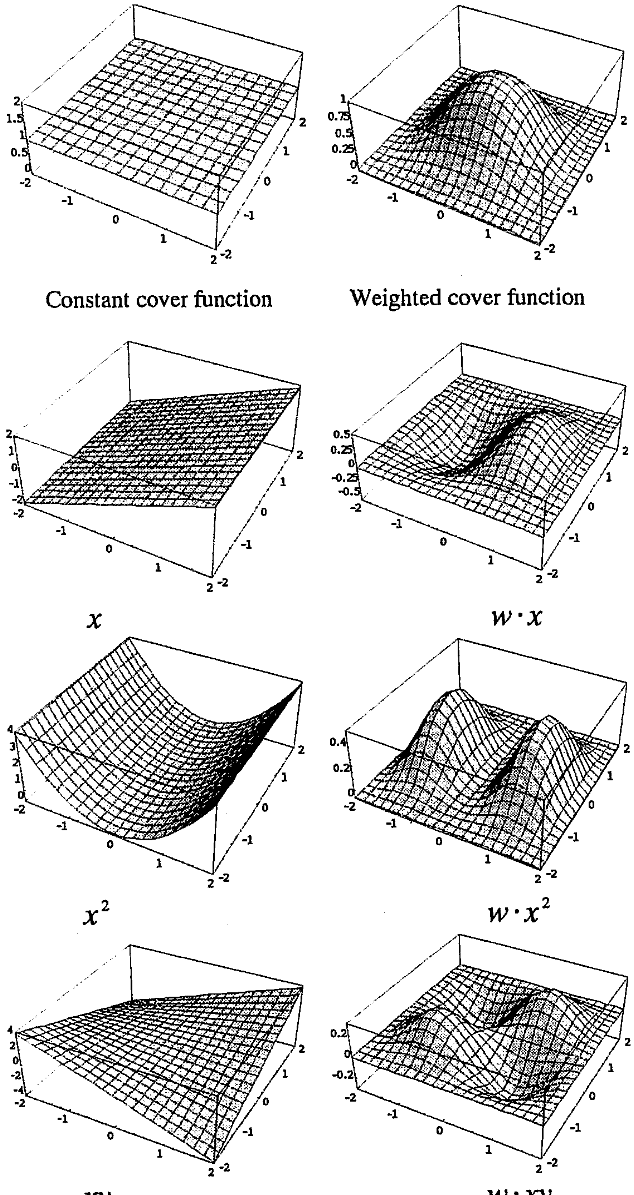

Fig. 6　Some Examples of Cover Function and Approximate Function

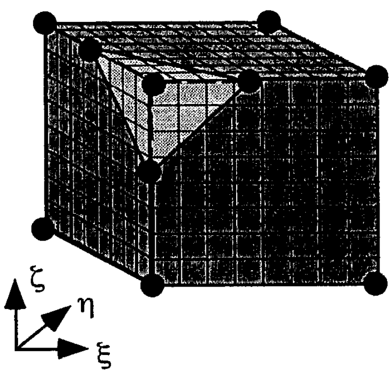

Fig. 7 Integration Using Geometric Voxel

形状ボクセルに対して与える。すなわち、被覆の重なり合う部分（ここでは1つのボクセルと解釈できる）に変位の拘束条件 $\overline{u}(x)$ が境界 Γ_u 上にある場合には

$$u(x)=\sum_{i=1}^{k} f_i(x)w_i(x)=\overline{u}(x) \quad on \quad \Gamma_u \tag{34}$$

の条件が自由度間への線形の拘束として導入される。これは、ペナルティとして容易に実装することができる。

また、境界荷重 $\bar{t}(x)$ が境界 上にかかっている場合には、以下のように弱形式の積分を行うことにより各自由度に対する等価な荷重にすることができる。

$$\int_{\Gamma_t} u \cdot \bar{t} d\Gamma = \int_{\Gamma_t}\left(\sum_{i=1}^{k} f_i(x)w_i(x)\right)\cdot \bar{t} d\Gamma \tag{35}$$

これらを3次元の一般形状に対するプログラムとして実装する場合には、境界条件を前述の形状ボクセルに対して与えるものとする。

連立方程式の解法としては、必要な記憶容量がクリティカルになってくるため、反復法が好ましい。ここでは、対角項を前処理行列として用いた共役勾配法を用いた。

2.5　有限被覆法とボクセル解析法

この有限被覆法におけるボクセル被覆と、文献3)や文献4)のボクセル解析法のボクセル要素の関係は、Fig. 8 のようになる。3次元の互いに重なり合うボクセル被覆は8つのボクセル要素と解釈することができ、ボクセル要素の数と等しいボクセル被覆の数はほぼ同じになる。

有限被覆法において重み関数として1次関数、被覆関数として定数関数を定義した場合には、立方体に対する HEXA 要素の形状関数と一致し、文献4)のボクセル解析法と同じになる。しかし、ここで定義した2次の重み関数を用いると、従来の有限要素法とは大きく異なってくる。

ボクセル解析法においては全体を一様の要素に分割し、すべての要素に同じ形状関数を用いるため、より詳しく応力状態を知りたい場所に、より多くの解析自由度を与えるといった精度コントロールができなかったが、有限被覆法を用いると、被覆単位で独立に近似関数を設定することができ、容易に精度コントロールを行うことができる。この「被覆」の中央点は、ボクセル解析における「節点」に相当するため、これは

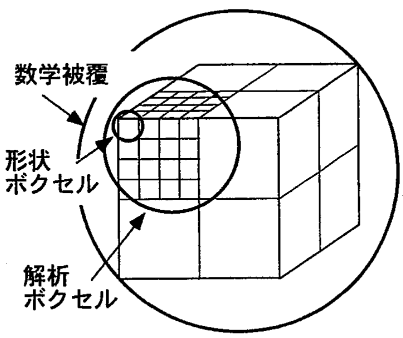

Fig. 8 Mathematical Cover and Analysis Voxel

見方を変えれば節点単位で精度をコントロールする方法であると解釈することもできる。すなわち、p法などのアダプティブ法は要素の「辺」に対して精度コントロールを行うため、通常の要素の情報に加え「辺」の情報も必要になるのに比べ、もともとある「節点」単位でアダプティブ法が行えると思われる。

3. 解　析　例

単位内圧を加えた圧肉球殻の1/8のモデル（Fig. 9）に対して、ここに述べた2次の被覆関数までを用いた有限被覆法を用いて解析した。この問題は、解析解があるため、制度の評価を行うことができる。数学被覆としては解析ボクセルの分割相当で 5×5×5、境界上のボクセルに関しては、4×4×4の境界形状ボクセルに分割して解析を行った（Fig. 10）。全部で解析ボクセル数は86となり、被覆数は168となった。先述のように、被覆変位関数に完全多項式を用いているため、被覆変位関数が1次、2次の場合、一つの被覆の持つ自由度は一軸方向あたりそれぞれ4,10となる。したがって系全体の自由度はそれぞれ2,016、5,040となっている。ここでは被覆変位関数として1次以上の多項式を用いるため、前述のように異なる被覆の関数間の1次独立性を保つためにFig. 5のような2次の重み関数を用いた。

Fig. 11, 12はそれぞれすべての被覆で1次の完全多項式の被覆関数、2次の完全多項式の被覆関数を用いて解析を行った場合の球殻の中心を通る断面での von Mises 応力の分布である。被覆変位関数の次数が上がるにつれて応力の分布が滑らかになっている様子がわかる。

これを定量的に評価するため、以下のように von Mises 応力の領域全体での誤差ノルムを比較した。

$$e_1 = \frac{\sqrt{\int_\Omega \left(\overline{\sigma}_{exact} - \overline{\sigma}_{FCM}\right)^2 d\Omega}}{\sqrt{\int_\Omega \overline{\sigma}_{exact}{}^2 d\Omega}} \qquad (36)$$

ただし $\overline{\sigma}_{exact}$ は解析解による von Mises 応力、$\overline{\sigma}_{FCM}$ は有限被覆法による von Mises 応力であり、積分は領域全体で行う。Table 2の e_1 の欄に全体を1次の被覆関数を用いたばあい、部分的に2次被覆関数を用いた場合（後述）、全体に2次被覆関数を用いた場合の誤差を比較する。

やはり2次の被覆関数を用いた場合のほうが解析精度が向上していることが定量的にも確認できる。また、前述のように高次被覆を局所的に配置することも可能であり、Fig. 13のように全被覆数168個のうち、球殻の内壁寄りの約半数の87個の被覆に2次の被覆変位関数を設定し、残りの被覆については1次の被覆変位関数を設定した場合を考えてみる。図中球で表している個所が2次関数を設定した被覆である。この場合、系全体での自由度は3,528となる。このように局所的に高次被覆を設定したモデルで解析した場合の誤差ノルムを、Table 2に併せて表示してある。全ての被

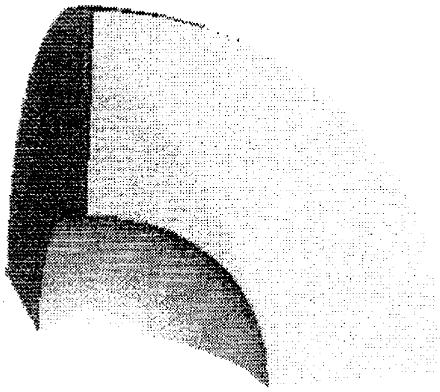

Fig. 9 Model of 1/8 Sphere

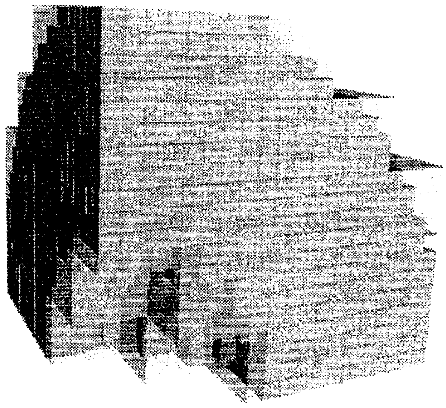

Fig. 10 Analysis Voxel and Geometric Voxel

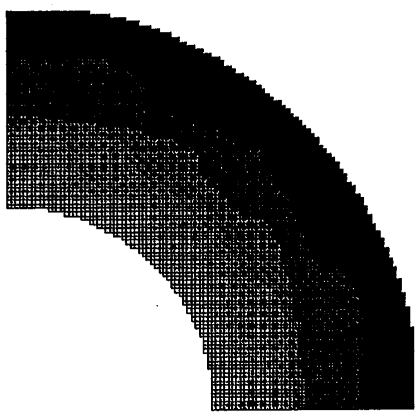

Fig. 11 The Analysis with Linear Cover Functions

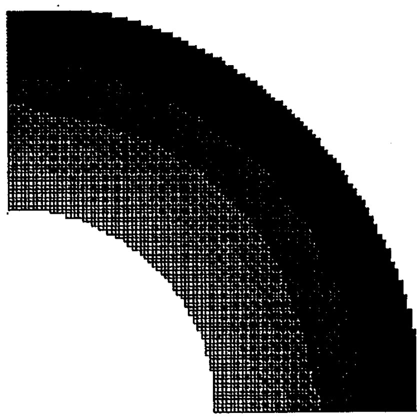

Fig. 12 The Analysis with Quadratic Cover Functions

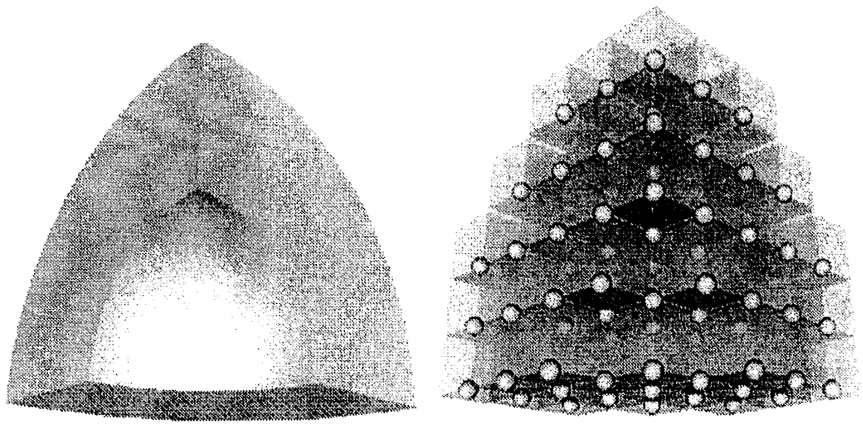

Fig. 13 Partial Arrangement of Quadratic Functions

覆で2次の関数を設定した場合とほぼ同程度に解析精度が向上していることがわかる。

また、一般に応力解析においてはローカルな応力集中をより正確に求めることが重要である。(36)と同様の評価式に対して積分を内周の表面のみで行った場合の誤差を e_2 として Table 2 に示す。やはり応力集中もより正確に表現できていることがわかる。

Table 2 Comparison of Error

	Degree of freedom	Error e_1 (Whole Volume)	Error e_2 (Inner Surface)
Linear Cover function	2,016	0.2766	0.2831
Combination of Linear & Quadratic Cover function	3,528	0.2351	0.2468
Quadratic Cover function	5,040	0.2337	0.2460

4. 結 言

物理的な領域と近似関数を定義する数学被覆を別個に定義することのできるマニフォールド法に、規則的な正方形(立方体)の互いに重なり合う被覆を導入することでボクセル解析との親和性を図った。重み関数として、一次関数では近似関数の1次独立性に問題の生じることを指摘し、関数の一次独立性を保つための数学的な十分条件を示した。より低次の関数で一次独立性を満たす関数として、部分2次関数を示した。さらに、3次元ソリッドに対して、形状ボクセルを用いた剛性マトリクスの積分方法、境界条件の評価方法を示した。

有限被覆法は、近似関数の次数を上げることによって容易に精度コントロールを行えることを実例を持って示した。また、近似関数は「被覆毎」に任意に設定することができ、誤差が大きな個所に局所的に高次被覆を設定することで、効率的に高精度の解が得られることを示した。これは解の精度コントロールが行えなかった従来のボクセル解析の問題点を克服するものであり、さらに、計算後の誤差評価の後、高次被覆の再配置を自動化などすることで、ボクセル解析にアダプティブ法的な手法を導入することも可能であろう。

参考文献

1) Belytschko, T. et. al.: Meshless Methods: An Overview and Recent Developments, Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering, Vol. 139, pp. 3-47, 1996
2) 鈴木克幸：メッシュレス解析法、ボクセル解析法の動向，第3回日本計算工学会講習会，pp 55-62, 1998
3) Kikuchi, N. & Diaz, A. 第13回 Quint セミナーテキスト、(株)くいんと, 1997
4) 鈴木克幸,他「ボクセル情報を用いたソリッド構造の解析法」日本造船学会論文集 Vol. 182 pp 595-600, 1997
5) Shi, G. H. : Manifold Method of Material Analysis, Transactions of the 9th Army Conference On Applied Mathematics and Computing, Report No. 92-1. U.S. Army Research Office, 1991
6) 大西有三：Manifold 法による岩盤問題への適用性検討，建設工学における先端計算科学技術の応用に関するワークショップ講演論文集，先端計算科学技術研究会，1996年7月
7) 大坪英臣,他：被覆単位で精度をコントロールするマニホールド法(FCM)、計算工学講演会論文集 Vol.2 pp399-402, 1997