密度関数法による気泡流に対する 直接数値シミュレーション

正員金井亮浩* 正員宮田秀明*

A Marker-Density-Function approach for the direct numerical simulations of bubbly flows

by Akihiro Kanai, Member Hideaki Miyata, Member

Summary

The Marker-Density-Function(MDF) method is developed for the direct numerical simulation of bubbly flows. The method is a front-capturing approach and then can capture three-dimensional complicated interfaces. The two phases of gas and liquid are separately solved and the dynamic boundary conditions at the interface are employed to connect the two phases. A new technique to avoid merging of bubbles is also developed to investigate the effects of a large number of bubbles in a periodical turbulent channel flow. Here the turbulent Couette flow containing 108 bubbles is simulated and the mechanism of drag reduction by microbubbles is explained by showing the 3dimensional flow structures.

1. 緒 言

2相流は多くの理学的、工学的分野で見られ、非常 に重要な問題とされている。特に、気泡流は化学プラ ントや原子力発電の冷却装置などに見られ、安全性の 点から研究が進められている。また、キャビテーショ ン問題としても注目されており、騒音や壊食が問題と されている。一方、気泡を積極的に活用した例として マイクロバブルによる摩擦抵抗低減の効果がある。こ れは、壁面乱流境界層中に 1mm 以下の気泡を放出する ことにより摩擦抵抗を最大で 80%程度も減少させるこ とが可能というものであり、現在これを実際の船舶な どに応用しようという研究が進められている。しかし、 その効果は主として実験的に試行錯誤的に進められて おり、その摩擦抵抗低減のメカニズムについてはほと んど分かっていない。また、最近注目されている二酸 化炭素による地球温暖化の問題に対して、工学的には 二酸化炭素を海中に投棄しようという計画もあり、こ こでも2相流の問題が存在している。

以上のような問題に対して、実験的に気泡流の詳細 な構造を理解することは非常に難しく、数値シミュレ ーションによるアプローチが有効であると考えられる。 これまでにも、さまざまな方法の2相流に対するシミ ュレーションが提案されてきた。大きく分けると3つ の方法に分類される。1つはマクロ的な方法であり、 2流体モデルに代表されるもので、2相の流体がそれ ぞれの存在比率に応じ流体の特性が平均的に扱われる というものである。この方法は、2相の流体が同程度 に存在する場合には有効であるが、気泡が分散してい るような流れには適当でない。もう1つの方法は、分

 ^{*} 東京大学大学院工学系研究科環境海洋工学専攻
 原稿受理 平成 11 年 1 月 8 日
 春季講演会において講演 平成 11 年 5 月 12, 13 日

散性気泡流を取り扱ったラグランジュ法と呼ばれるも ので、個々の気泡を粒子的に捉え、その運動方程式を 解くことにより気泡を追跡するというものである。こ の方法では、気泡に働く力などをモデル化する必要性 があり、精度的な問題がある。最後の方法として、気 泡の界面を直接計算するものであり、モデル化を必要 としなく気泡周りの流れの構造を直接把握することが でき、気泡の変形も考慮することが可能である。しか し、多数の気泡を同時に扱うためには膨大な計算容量 が必要となる。しかし近年の著しい計算機能力の向上 により、このような膨大な多相流の計算が可能となっ てきている。¹⁾

この直接数値シミュレーションは大きく2つに分類 でき、それぞれフロントトラッキング法^{1),7)}、フロント キャプチャリング法^{8),11)}と呼ばれている。フロントト ラッキング法は、界面を直接その速度を用いて移動さ せる方法であり、精度は良いが複雑な変形に対しては 対処できない。また、フロントキャプチャリング法は、 計算領域全体で定義された値、例えば気相で 0、液相で 1の値を与え、界面は 0.5の値を取るところと定義され る。新しい界面は、その輸送方程式を解くことにより 求められる。この方法は複雑な変形や分裂、合体に容 易に適応可能であるが、界面の精度はフロントトラッ キング法に比べ劣る。

本研究では、多数気泡の存在する場合や複雑な変形 にも対応可能にするため、後者のフロントキャプチャ リング法である密度関数法を採用した。また、界面で の精度を向上させるため液相と気相を別々に取り扱っ ている。一方、従来のフロントキャプチャリング法で は2つの異なる界面が近づいた場合、その間隔が1格 子以内になると自動的に合体してしまう。これでは周 期境界を用いた計算領域において、時間的に定常な状 態を作り出すことができなくなってしまうため、それ ぞれの気泡をフラッギングし、お互いに近づいてもそ れぞれの界面を維持するような方法を開発した。これ により多数の気泡が集中的に存在しても、精度よくそ れぞれの気泡を捕らえることを可能としている。

以上のように本研究では、気泡流の直接数値シミュ レーションに焦点を当て、気泡流の詳細な構造解明を 可能にするシミュレーションコードの開発を行い、未 だ解明されていない気泡と乱流の相互干渉や気泡によ る摩擦抵抗低減のメカニズムについて明らかにするこ とを目的とする。

2. 数值計算法

2.1 支配方程式

支配方程式は以下のナビエストークス方程式と連続 の式である。

$$\frac{\partial u}{\partial t} + (u \cdot \nabla)u = -\nabla p + \nabla \cdot \left(\frac{2D}{Re}\right) + \frac{n_g}{Fn^2}$$
(1)

$$\frac{\partial u}{\partial t} + (u \cdot \nabla)u = -\frac{1}{\rho_2} \nabla p + \nabla \cdot (\frac{2D}{\text{Re}_2}) + \frac{n_g}{Fn^2}$$
(2)

(3)

 $\nabla \cdot u = 0$

ここで、t は時間、u は速度ベクトル、p は圧力、D は変形速度テンソル、Re はレイノルズ数、Fn はフル ード数、ng は重力方向単位ベクトル、pは密度を表して いる。添字の1、2 はそれぞれ液相と気相を意味してい る。なお、すべて変数は無次元化されている。

2.2 アルゴリズム

格子は直交格子系を採用しているが、従来のほとん どのフロントキャプチャリング法では2相の流体を1 つの流体と考え、界面付近では流体の密度、粘性が連 続的に変化させた手法を取っている。この場合、界面 付近の取り扱いが実際とは異なるものとなってしまい、 界面が曖昧であり精度的に問題がある。そこで本研究 では2相をまったく別々に取り扱い、界面に直接境界 条件を設定している。ナビエストークス方程式の対流 項、拡散項を求める際にもこの境界条件を考慮してい る。また、表面張力も圧力の境界条件に組み込み、界 面にのみ働くようになっている。

プロセスとしては、まず新しい界面が密度関数によ り計算され、最初に気相の圧力が SOR 法で解かれる。 次に液相の圧力が解かれ、速度が更新される。差分化 には、時間に関してはオイラー法、対流項は3次上流 差分、それ以外の項は2次の中心差分を用いている。 密度関数の輸送方程式は CIP 法¹²⁾を用いている。

2.3 密度関数法 (MDF法)

支配方程式は以下の輸送方程式である。

$$\frac{\partial M}{\partial t} + u \cdot \nabla M = 0 \tag{4}$$

M は密度関数を表しており、ここでは気相で 0. 液 相で1の値を取り、界面は 0.5 で定義されている。CIP 法を用いているが、数値散逸を完全に取り去ることは できないため、毎ステップごとに、界面を挟むセル以 外の密度関数の値は 0 または 1 にリセットし、また、 個々の気泡の体積が一定になるように修正している。

気液の境界では、(4)式により運動学的条件が満たさ れ、以下の力学的条件も満たす必要がある。 密度関数法による気泡流に対する直接数値シミュレーション

$$p_{1} - p_{2} + \sigma \kappa = 2\mu_{1}n_{k}\left(\frac{\partial u_{k}}{\partial n}\right)_{1} - 2\mu_{2}n_{k}\left(\frac{\partial u_{k}}{\partial n}\right)_{2}$$
(5)
$$\mu_{2}\left(t,\frac{\partial u_{k}}{\partial n} + n,\frac{\partial u_{i}}{\partial s}\right)_{2} - \mu_{1}\left(t,\frac{\partial u_{k}}{\partial n} + n,\frac{\partial u_{i}}{\partial s}\right)_{1} = \frac{\partial\sigma}{\partial s}$$
(6)
$$\frac{\partial}{\partial n} = n \cdot \nabla, \ \frac{\partial}{\partial s} = t \cdot \nabla, \ \sigma \text{it} \text{Kit} \text{mes},$$

μは粘性係数、nは界面に垂直な方向の単位ベクトル、t は界面に接する方向の単位ベクトルである。

ここでは矩形格子を用いており、格子間隔も気泡の 周りの境界層を解像できるほど細かくないため、厳密 にこの力学的境界条件を満たすことは精度的に重要で なく、また困難である。したがって、以下の簡略化し た境界条件を満たすこととする。

$$p_{1} - p_{2} + \sigma \kappa = 0$$

$$\left(\frac{\partial u}{\partial n}\right)_{2} >> \left(\frac{\partial u}{\partial n}\right)_{1}$$
(8)

(8)の条件は、気相と液相の粘性係数、密度の違いから、気相にとり液相は固体壁と見なせ、気相側の速度勾配は液相側に比べ大きくなりうるということである。 具体的に、(7)は圧力の境界条件として満たされ、(8)は 対流項、拡散項の計算の際に以下のように考慮される。

まず、液相側の対流、拡散項は、界面での速度勾配 が0と見なせ、Fig.1のように気相側に速度を等値外挿 することにより求める。点3のように対応する液相側 の速度点が1点の場合にはU3=U1となるが、点4のよ うに2点以上ある場合には、速度U4はU2、U5と点 4から界面までの距離 la、lbを用いて、

$$U4 = \left(\frac{1}{la}U5 + \frac{1}{lb}U2\right) / \left(\frac{1}{la} + \frac{1}{lb}\right)$$
(9)
と計算される。

逆に、気相側の対流、拡散項は、界面での速度勾配 が線形になるように、Fig.2 のように液相側に速度が外 挿され、求められる。なお、点3,4の速度はそのま ま液相における速度を用いて、点1,2の速度のみ外 挿される。

従来のフロントキャプチャリング法では、1つのセ ルの中に2つ以上の界面が存在できなく、気泡同士の 結合が起きてしまう。したがって、本研究での周期境 界を持ったチャンネル流れを計算する場合に、長時間 の計算を行うと気泡の結合が連続的に起こり、定常的 な流れを得ることができない。そこで、個々の気泡を フラッグを立てることにより区別し、結合を抑えてい る。これに伴い、表面張力に関しても、個々の気泡に 相当する密度関数を用いて計算されている。



Fig.1 Velocity extrapolation from the liquid side into the gas side for the advection-diffusion term at a liquid-phase point.



Fig.2 Velocity extrapolation from the gas side into the liquid side for the advection-diffusion term at a gasphase point.

3. 計算法の評価

3.1 上昇気泡

計算精度の評価を行うため、実験データの存在する 単独上昇気泡のシミュレーションを行う。ここでは Table.1 に示す広範囲なレイノルズ数をもつ4つの場合 について計算を行った。

Table.1	Computational	conditions	for	а	rising
bubble.					

Case	RB1	RB2	RB3	RB4			
Mo	0.065	1.75e-5	6.14e-7	2.53e-11			
Ео	39.3	17.5	9.9	53.7			
Re	19.4	100	153.7	5400			
We	15.3	10	5.87	20			
0./0.	727	828	763	727			

Mo は Morton 数、Eo は Eotvos 数であり、それぞれ

 $Mo = g\mu^4 / \rho\sigma^3$ 、 $Eo = \rho g d^3 / \sigma$ で定義される。なお、 代表長さには気泡直径 d、代表速度には上昇速度を用い ている。RB1 は Hnat¹³⁾らの実験、RB2 は Ryskin⁶⁾ら の界面適合コードによる計算、RB3 は高木¹⁴⁾による実 験、RB4 は Wegener ら¹⁵⁾による実験の条件である

Fig.3 にそれぞれの気泡の上昇速度の時刻暦を示す。 速度はそれぞれの実験結果、計算結果で無次元化して いる。したがって、RB1から RB3 までは非常に精度よ く計算されていることがわかる。また、RB4 に関して は、レイノルズ数が非常に高いため、spherical-cap と 呼ばれる不安定な半球状の形状が現れ、気泡の wake は完全に乱流状態となり、実験にも 10%程度の幅が生 じることが実験結果から分かる。このことから、この 計算結果は妥当であると判断できる。

Fig.4 には、RB4 の気泡形状と気泡 wake の縦渦の等値 面を示した。時間とともに縦渦が変化し、非対称な縦 渦が発生していることが分かる。これに伴い気泡の形 状が不安定になり、挙動に wobbling motion が現れて いることが分かる。



Fig.3 Rising velocities normalized by experimental or numerical result for the cases RB1, RB2, RB3, RB4.



Fig.4 Evolution of the bubble shape and the isosurfaces of the longitudinal vorticity around the vertical axis for the case RB4. The values of the isosurfaces are -2 and +2.

3.2 **気泡の結合と非結合**

2.3 で述べたように、複数の気泡が接近し接触しても 気泡同士の結合が生じないようにする方法を開発した が、ここで2つの気泡が近づき、結合する場合と結合 しない場合についてのシミュレーションを行う。初期 状態として、2つの気泡を周期境界を持つチャンネル 流(Poiseuille flow)中に、壁からの高さを気泡の半径 分だけずらして配置した。レイノルズ数はチャンネル 高さベースで 3300、ウエーバー数は気泡直径ベースで 27.2 である。Fig.5、6 にそれぞれ結合する場合と結合 しない場合の気泡の振る舞いを示した。結合する場合 には、接触すると表面張力により球形に近い形状に戻 っていることが分かる。また、結合しない場合、接触 してもそれぞれの界面が保たれ、再び2つの独立な気 泡に離れていき、この手法が有効であることが分かる。



密度関数法による気泡流に対する直接数値シミュレーション





Fig.6 Evolution of two bubbles in a channel when bubble merging is not permitted. Time is proceeding left to right and top to bottom.

4. 複数気泡を含むチャンネル乱流

4.1 問題背景

マイクロバブルによる乱流摩擦抵抗の減少は、これ まで数多くの研究が実験的に進められてきている。¹⁶⁾⁻²⁰⁾ これらの研究から、摩擦抵抗低減を得るためには以下 のことが重要であることが示されている。まず、気泡 の大きさについては、最大 1mm 以下であること。すな わち、気泡の結合が起こると抵抗減少が小さくなる。 また、壁近傍でボイド率が大きいことである。逆に、1mm 以上の大きな気泡の場合、ボイド率と共に乱流エネル ギーが増加してしまうことが報告されている。²¹⁾⁻²³⁾こ れは、気泡と壁乱流の干渉以外に、気泡自身による乱 流が存在するためと考えられている。

しかし、摩擦抵抗低減のメカニズムについては、ほ とんど分かっていなく、気泡と壁乱流の相互干渉が重 要な役割を果たしているものと考えられる。これを明 らかにするためには、気泡周りの流れを詳細に把握す る必要があり、限られたデータしか得られない実験か らでは困難である。したがって、数値シミュレーショ ンが有効な手段であり、特に、乱流構造と気泡の干渉 を捕らえるためには DNS が必要であると考えられる。

摩擦抵抗低減が得られる条件では、気泡サイズと乱 流サイズとに大きな差があり、単相のチャンネル乱流 の DNS に必要な格子数よりも約 10~20 倍程度の格子 数が必要となってしまう。このため、本研究では、最 小単位の乱流構造が得られる程度の領域にすることに より、複数気泡を含んだチャンネル乱流の DNS を行う。 24)25)

4.2 計算条件

計算領域は流れ方向(x)とスパン方向(y)に周期境界、 上下方向(z)の壁に No slip 条件を課したチャンネルで、 大きさは 2×1×2 である。格子数は 130×65×125 であ り、x 方向と y 方向は 0.0164 で等間隔、 z 方向は最小 格子間隔が 0.00197 の不等間隔である。流れは Couette 流で、下の壁が静止し上の壁が速度 2 で動いている。 レイノルズ数はチャンネル高さの半分とチャンネル中 心での速度ベースで 3300 である。気泡の直径ベースの ウエーバー数は 108.8 である。

気泡を含んだチャンネル乱流を計算するために、単 相の乱流を初期条件として用いる必要がある。ここで は、同じコードを用いて単相のチャンネル乱流を計算 した。定常状態での摩擦係数は約 0.0018 であり、した がって、z方向の最小格子間隔は viscous length scale で約 0.2 であり、粘性底層を解像するには十分な間隔で ある。また、最大格子間隔も約 1.6 であり、Kolmogorov スケールとほぼ等しい。

時刻0で108個の直径0.16の気泡を挿入し、気泡同 士の結合はしない条件で計算を行った。なお、比較の ため、気泡を挿入しない場合も同時刻まで計算を行っ た。また、この計算領域では、乱流構造すべてを含ん だ計算と異なり、時間的に空間全体の流場が変動する ため、乱流統計量の時間的平均値はとらず、瞬時の流 場の空間平均をとることにより流場の構造を解明する。

4.3 気泡の乱流への影響

Fig.7 に上下の壁における摩擦係数の時刻歴を示した。 この時、上の壁では摩擦抵抗の減少が見られるが、下 の壁ではあまり減少していないことが分かる。なお、 計算条件としては気泡の存在のみが異なっている点で あるため、これらの変化は気泡によるものと考えられ る。Fig.8 には単位体積あたりの乱流エネルギーの時刻 歴を示した。気泡が存在しない場合には、ここには示 されていないが、周期的に乱流エネルギーが急激に大 きくなる現象が見られた。Fig.8 にもその1つとして、 時刻60あたりで急激に大きくなっていることが分かる。 これらは、乱流のバースト現象と関連があるものと考 えられる。しかし、気泡が存在している場合には、そ の急激な乱流エネルギーの増加がなくなっていること が分かる。また、流れ方向に垂直な断面における流量 の変化を Fig.9 に示した。気泡が存在する場合は、流量 が増加していることが分かる。これは摩擦が減少した

ことによると考えられる。

Fig.10 には、時刻 80 におけるレイノルズ応力対角成 分の2乗平均を示した。スパン方向成分(r.m.s. of v)と 上下壁方向成分(r.m.s. of w)については、気泡が存在し ても分布に変化は見られない。しかし、流れ方向成分 (r.m.s. of u)については、上の壁付近では、気泡がない 場合に見られたピークが気泡が存在することにより無 くなっており、逆に、下の壁付近では、乱れが大きく なっていることが分かる。単位体積あたりの乱流エネ ルギーの上下壁方向分布を Fig.11 に示した。これによ ると、Fig.10 の分布に合わせて、上の壁付近では乱流 エネルギーが減少し、下の壁付近では増加している。 また、同時刻でのボイド率の分布を見ると、Fig.12 に 示すように、上の壁近傍ではボイド率のピークが存在 し、下の壁近傍ではピークが見られなく、あまり気泡 が分布していないことが分かる。以上のことから、気 泡が壁近傍に存在する場合には乱れが抑えられ、乱流 エネルギーが減少し、逆に、気泡が壁近傍に少ない場



Fig.7 Time histories of the frictional coefficients on the top and bottom walls.



Fig.8 Time history of the turbulent energy per unit liquid volume.

合には、乱れが増幅されてしまうことが考えられる。 したがって、上の壁近傍では乱流強さが減少すること により、摩擦係数が減少しており、また、下の壁近傍 では乱流強さが増加し、摩擦係数も増加していると関 連付けることができる。なお、この結果はこれまで数 多く行われてきた実験結果と合致している。

Fig.13には流れ方向速度(u)のプロファイルを示した。 上下の壁それぞれの摩擦速度で無次元化している。下 の壁からの速度プロファイルは、気泡が存在してもほ とんど変化していなく、粘性底層では線形、外側(y⁺>30) では log-law にしたがっていることが分かる。また、上 の壁からの速度プロファイルは、気泡が存在すること により、バッファー領域(5<y⁺<30)が外側へ伸びている ことが分かる。Fig.12 でボイド率の分布を示したが、 上の壁近傍のピークの場所はこのバッファー領域に相 当しており、壁面上摩擦を減少させるためには、気泡 を壁近傍のバッファー領域に存在させる必要があると 考えられる。



Fig.9 Time history of the volume flow rate.



Fig.11 Distribution of the turbulent energy per unit liquid volume along the z direction at t=80.





Fig.12 Distribution of the void fraction along the z direction at t=0 and 80.



Fig.10 Root-mean-square velocity fluctuations of u, v, w normalized by the top and bottom wall shear velocities at t=80.



Fig.13 Streamwise velocity profiles normalized by the top and bottom wall shear velocities at t=80.

4.4 乱流の3次元構造の変化

まず計算領域全体の時刻 80 における気泡の様子を Fig.14 に示した。このように 108 個の気泡がお互いに 接触し合い、それぞれの界面を保っており、特に問題 無く計算が行われた。また、壁近傍の気泡はせん断が 大きいため、楕円体に変形しているのが分かる。

前節で見たように、上の壁で摩擦が減少しているの で、ここからは上の壁に注目して見ていくことにする。 Fig.15 には上の壁上の摩擦係数分布コンターを示した。 気泡が存在しない場合には、摩擦が小さい流れ方向に 帯状の部分が存在しているが、これは、速度が遅い部 分に相当しており、ストリークであると考えられる。26) 気泡が存在する場合には、分布が大きく変化し、スト リーク構造は見られなく、気泡が壁近傍に存在してい る部分でやや摩擦係数が大きくなっているのが分かる が、全体として摩擦係数が小さくなっている。Fig.16 には上の壁近傍のせん断渦の等値面を示した。気泡が 存在しない場合には、シート上のせん断渦の構造が見 られ、ストリーク上でこのせん断渦が壁から剥離して いる構造が分かる。また、気泡が存在すると、そのよ うなシート上のせん断渦の構造が気泡により邪魔され てしまっている。これに対応して縦渦の等値面を Fig.17 に示した。気泡が存在しない場合、大きな縦渦の構造 が存在し、特に、Fig.16 で見られたせん断渦の剥離し ている部分から縦渦が発生しているのが分かる。これ は、速度の遅いストリーク部分から発生するバースト に対応しているものと考えられる。しかし、気泡が存 在すると、壁乱流による大きな縦渦がなくなり、気泡 周りに気泡による乱れから発生する小さな渦が見られ る。

以上の渦構造に着目すると、摩擦抵抗低減が起きる 場合には、壁近傍のせん断渦のシート状の構造が気泡 により形成されなくなり、従って、せん断渦の壁から の剥離から生じると考えられる縦渦(バースト)の発 生が抑制されていると考えられる。



Fig.14 Perspective view of the 108 bubbles in the turbulent Couette flow.



(a) without bubbles



(b) with 108 bubbles Fig.15 Contour of the frictional coefficient on the top wall.



(a) without bubbles



(b) with 108 bubbles Fig.16 Iso-surface of the spanwise vorticity at the value of -2 near the top wall.

密度関数法による気泡流に対する直接数値シミュレーション



(a) without bubbles



(b) with 108 bubbles

Fig. 17 Iso-surfaces of the longitudinal vorticity at the values of -2 and +2 near the top wall.

5. 結言

複数気泡が存在する流れを直接数値シミュレーショ ンによって解く密度関数法の開発を行い、その有効性 が示された。まず、その計算精度については、上昇気 泡の計算を行い、実験結果とよく合致した結果が得ら れた。また、これまで行われたことのないレイノルズ 数 5400 という非常に高い条件でも、安定な計算が行わ れ、この手法のロバスト性が示された。気泡同士の結 合を避ける手法の開発にも成功した。

この手法を用い、108 個の気泡が存在するチャンネ ル乱流の計算を行い、気泡による摩擦抵抗低減の構造 解明の糸口が示された。これによると、気泡が壁近傍、 特にバッファー領域に存在することにより、シート状 のせん断渦構造がなくなり、したがって、このせん断 渦の壁からの剥離がなくなり、ストリーク構造も消滅 する。これにより、縦渦の発生、バースト現象が抑え られ、乱流強さが弱くなることで、乱流エネルギーの 減少、摩擦の減少へつながっているものと考えられる。 参考文献

- Bunner, B. and Tryggvason, G. : 'Simulation of large bubble systems', ASME FEDSM'97, (1997), FEDSM97-3409.
- 2) Tomiyama, A., Sou, A., Zun, I., Kanami, N. and Sakaguchi, T. : 'Effects of Eotvos number and dimensionless liquid volumetric flux on lateral motion of a bubble in a laminar duct flow', Proceedings 2nd Int. Conf. Multiphase Flow '95-Kyoto, (1995), PD1-11-18.
- Lafaurie, B., Nardone, C., Scardovelli, R., Zalesky, S. and Zanetti, G. : 'Modeling merging and fragmentation in multiphase flows with SURFER', J. Comp. Phys., 113, (1994), pp.134-147.
- 4) Takagi, S., Prosperetti, A. and Matsumoto, Y. : 'Drag coefficient of a gas bubble in an asymmetric shear flow', Phys. Fluids, 6, (1994), pp.3186-3188.
- Unverdi, S.O. and Tryggvason, G. : 'A Fronttracking method for viscous, incompressible, multi-fluid flows', J. Comp. Phys., 100, (1992), pp.25-37.
- Ryskin, G. and Leal, L.G. : 'Numerical solution of free-boundary problems in fluid mechanics. Part 2. Buoyancy-driven motion of a gas bubble through a quiescent liquid', J. Fluid Mech., 148, (1984), pp.19-35.
- Hirt, C.W. and Nichols, B.D. : 'Volume of fluid(VOF) method for the dynamics of freeboundaries', J. Comp. Phys., 39, (1981), pp.201-225.
- Miyata, H. and Kanai, A. : 'Numerical analysis of structure of free-surface shock wave about a wedge model', J. Ship Research, 40, No.4, (1996), pp.278-287.
- 9) 金井亮浩,宮田秀明: "密度関数法を応用した気泡の数値シミュレーション",日本造船学会論文集179,(1995), pp.41-48.
- Sussman, M., Smereka, P. and Osher, S. : 'A level set approach for computing solutions to incompressible two-phase flow', J. Comp. Phys., 114, (1994), pp.146-159.
- Miyata, H., Katsumata, M., Lee, Y.G. and Kajitani, H. : 'A finite-difference simulation method for strongly interacting two-layer flow', J. Soc. Naval Arch. Japan, 163, (1988), pp.1-16.
- 12) Yabe, T. : 'A universal solver for hyperbolic equations by cubic-polynomial interpolation II. Two- and three-dimensional solvers', Comp. Phys. Commu., 66, (1991), pp.233-242.
- Hnat, J.G. and Buckmaster, J.D. : 'Spherical cap bubbles and skirt formation', Phys. Fluids, 19, (1976), pp182-193.
- 14) 高木周:博士論文,東京大学,(1994).

- 15) Wegener, P.P. and Parlange, J.Y. : 'Sphericalcap bubbles', Ann. Rev. Fluid Mech., 5, (1973), pp.79-100.
- 16) Guin, M.M. : Ph.D. thesis, Univ. Tokyo, (1996).
- 17) Kato, H., Miyanaga, M., Yamaguchi, H. and Guin, M.M. : 'Frictional drag reduction by injecting bubbly water into turbulent boundary layer and the effect of plate orientation', Proceedings 2nd Int. Conf. Multiphase Flow '95-Kyoto, (1995), PI-31-38.
- 18) Madavan, N.K., Deutsch, S. and Merkle, C.L.: 'Measurements of local skin friction in a microbubble-modified turbulent boundary layer', J. Fluid Mech., 156, (1985), pp237-256.
- 19) Madavan, N.K., Deutsch, S. and Merkle, C.L. : 'Reduction of turbulent skin friction by microbubbles', Phys. Fluids, 27, (1984), pp356-363.
- 20) Merkle, C.L. and Deutsch, S. : 'Drag reduction in liquid boundary layers by gas injection', Viscous Drag Reduction in Boundary Layers, Progress in Astronautics and Aeronautics, Volume 123, pp351-412.
- 21) Marie, J.L., Moursali, E. and Tran-Cong, S. : 'Similarity law and turbulence intensity profiles in a bubbly boundary layer at low void fractions', Int. J. Multiphase Flow, 23, (1997), pp227-247.
- 22) Nakoryakov, V.E., Kashinsky, O.N., Randin, V.V. and Timkin, L.S. : 'Gas-liquid bubbly flow in vertical pipes', Trans. ASME J. Fluids Eng., 118, (1996), pp377-382.
- 23) Lance, M. and Bataille, J. : 'Turbulence in the liquid phase of a uniform bubbly air-water flow', J. Fluid Mech., (1991), 222, pp95-118.
- 24) Jimenez, J. and Moin P. : 'The minimal flow unit in near-wall turbulence ', J. Fluid Mech., 225, (1991), pp213-240.
- 25) Kim, J., Moin, P. and Moser, R. : 'Turbulence statistics in fully developed channel flow at low Reynolds number', J. Fluid Mech., 177, (1987), pp133-166.
- 26) Smith, C.R. and Metzler, S.P. : 'The characteristics of low-speed streaks in the near-wall region of a turbulent boundary layer', J. Fluid Mech., 129, (1983), pp27-54.