

重合メッシュ法によるズーミング解析の高精度化

正員 鈴木 克幸* 正員 大坪 英臣*
 学生員 白石 卓士郎* 関 勝 載*

Improvement of the Accuracy of Zooming Analysis Using Overlaying Mesh Method

by Katsuyuki Suzuki, *Member* Hideomi Ohtsubo, *Member*
 Takushiro Shiraishi, *Student Member* Seungjae Min

Summary

The overlaying mesh finite element method, which uses global and local mesh that overlies each other, is applied for 2 dimensional elastostatic problem and plate bending problem. The results are compared with the traditional zooming analysis, in which displacement or load boundary conditions obtained by global analysis are given to local analysis. It was shown that while the accuracy of zooming analysis greatly depends on the size of the global mesh, the overlying mesh analysis generally gives quite good results even when coarse mesh is used in global analysis. Also the method that repeat local and global analysis iteratively is proposed, which makes it possible to use general purpose FEM code in overlaying mesh method, and it was shown that using under relaxation the convergence speed increases.

1. 緒 言

船体構造のような大規模な構造に対して有限要素解析を行う場合、全体構造を詳細形状まで表現したモデルで有限要素解析を行うことは非現実的である。要素数が膨大になり、解析に要する時間が莫大になることはもちろん、その解析モデルを作成する手間も膨大となる。しかし、疲労強度などを評価するためにはその詳細形状による応力集中を知る必要があり、詳細形状のモデル化が不可欠である。そこで、通常はズーミング解析と呼ばれる方法が用いられる。これは船体構造を多少粗いメッシュに分割し、船体の全体挙動を解析した後、詳細挙動を知りたい場所に対しては細かいメッシュ分割を行ったモデルを作成し、詳細解析を行うという方法である。一般に船体構造の解析においては、全船解析、ホールド解析、詳細解析というようにズーミング解析を行っている。このズーミング解析において、ローカルな部分の解析には境

界に適当な境界条件を与える必要があるが、通常これをグローバルな解析によって求められた変位、または荷重を与えている。しかし、グローバルな粗いメッシュによる解析の結果を用いて詳細な解析を行うため、精度には多少問題があり、この問題を回避するためのモデル作成には多くの経験が必要である。また、境界条件として変位を与えるべきか荷重を与えるべきかは問題によって様々である。

一般に、このようなグローバルな解析とローカルな解析を組み合わせた解析をマルチスケール解析と呼んでおり、Mote¹⁾の先駆的な研究から今日まで様々な研究が行われている。このマルチスケール解析法は以下の3つに分類することができる。

- a) グローバル解析を行った後にその結果を基にローカル解析を行うもの
- b) ローカル解析を行った後に、その結果を基にグローバル解析を行うもの
- c) グローバル解析とローカル解析を同時に行うもの

船体構造の解析に通常用いられるズーミング法は a) である。b) の方法は、非均質の材料で構造が作られている場合などに、各種の仮定を置くことによって等価な均質の材料として解析を行うなどの場合に用いられる²⁾。船体構造のグローバル・ローカル解析で、この b) に相当する手法には、ローカ

* 東京大学大学院工学系研究科

原稿受理 平成 11 年 1 月 11 日

春季講演会において講演 平成 11 年 5 月 12, 13 日

ルな構造を1つの大きな「要素」ととらえるサブストラクチャ法³⁾や、ローカルな解析は行わないが上田らの理想化構造要素法⁴⁾がある。しかし、現実にはグローバルな挙動とローカルな挙動は互いに影響を及ぼし合うものであり、より正確な解析にはc)のような手法が望ましい。

Fishらは2つのメッシュを重ね合わせることによって、グローバルな解析とローカルな解析を同時に行う重合メッシュ法^{5,6)}を提案している。この際、重ねあわせる領域の境界は必ずしも粗い有限要素メッシュの要素間境界と一致する必要はなく、単に重ねる領域の形状の条件のみを満たせばよい。非常にフレキシブルな解析が可能である。この論文では、このFishらの提案している重合メッシュ法と従来のズームング法との精度の比較を行い、この手法の有効性を実証する。そして新規に、この重合メッシュ法による解析を従来の汎用有限要素コードでの解析の枠内で行うため、グローバルとローカルな解析を反復的に行う方法を提案する。

2. 重合メッシュ法

重合メッシュ解析においては、Fig. 1に示すように2つの異なるメッシュを重ね合わせる。その際、通常のズームング解析、サブストラクチャ法のようにローカルなメッシュの境界がグローバルなメッシュと必ずしも一致する必要はなく、また、それぞれのモデルの形状が多少異なってもよい。たとえばFig. 1ではグローバルなモデルには円孔はないがローカルなモデルには円孔がある。ただし、ローカルなモデルの領域 Ω^L はグローバルなモデルの領域 Ω に含まれている必要がある。 $(\Omega^L \subset \Omega)$ グローバルな解析の通常の境界を Γ とし、グローバルなモデルとローカルなモデルの境界 (Fig. 1で太線で示した境界) を Γ^{GL} とする。

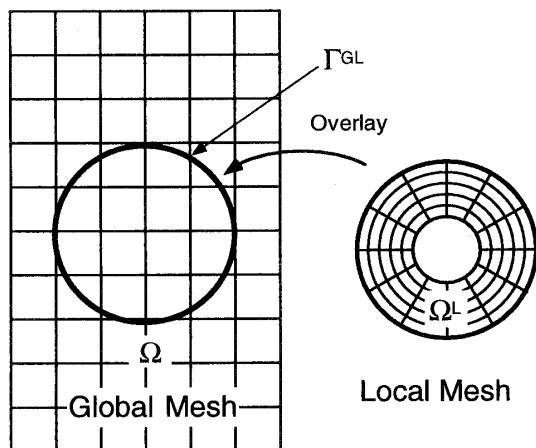


Fig. 1 Global and Local Mesh

場の関数としての変位は以下のように、グローバルモデルにおける変位 u^G とローカルな変位 u^L の重ね合わせで表現する。ただし、これだけでは u の u^G と u^L への分割の一意性がなくなり解が定まらないため、 Γ^{GL} 上では $u^L = 0$ とする。

$$u = u^G + u^L \quad u^L = 0 \quad \text{on } \Gamma^{GL} \quad (1)$$

これを、通常の有限要素法と同様に離散化を行う。それぞれの変位は適当な形状関数を用いて

$$u^G = N^G \bar{u}^G \quad (2)$$

$$u^L = N^L \bar{u}^L$$

と表すことができる。ただし、 N^G 、 N^L はそれぞれグローバル、ローカルなメッシュに対する形状関数マトリクス、 $\bar{u}^G$ 、 $\bar{u}^L$ はそれぞれのメッシュの節点変位ベクトルである。これを偏微分してひずみを求めると、ひずみは

$$\epsilon = \epsilon^G + \epsilon^L \quad (3)$$

となる。ただし、

$$\epsilon^G = B^G \bar{u}^G \quad (4)$$

$$\epsilon^L = B^L \bar{u}^L$$

である。これを弱形式 (仮想仕事の原理) に代入すると、解くべき方程式は以下になる。

$$\begin{bmatrix} K^G & K^{GL} \\ K^{LG} & K^L \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \bar{u}^G \\ \bar{u}^L \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} f^G \\ f^L \end{Bmatrix} \quad (5)$$

ただし、剛性マトリクスは

$$K^G = \int_{\Omega} B^{GT} D B^G d\Omega$$

$$K^{GL} = \int_{\Omega^L} B^{GT} D B^L d\Omega$$

$$K^{LG} = \int_{\Omega^L} B^{LT} D B^G d\Omega = K^{GLT}$$

$$K^L = \int_{\Omega^L} B^{LT} D B^L d\Omega \quad (6)$$

となる。ここで D は応力 σ に対して

$$\sigma = D \epsilon$$

となる構成方程式の行列である。荷重ベクトルは

$$f^G = \int_{\Omega} N^{GT} b d\Omega + \int_{\Gamma_f} N^{GT} t d\Gamma$$

$$f^L = \int_{\Omega^L} N^{LT} b d\Omega + \int_{\Gamma_f^L} N^{LT} t d\Gamma \quad (7)$$

となる。ただし、 b は体積力、 t は表面力である。

ここで、 K^G 、 K^L 、 f^G 、 f^L は同じ有限要素モデルに対して同じ形状関数を用いた通常のFEMの剛性マトリクス、荷重ベクトルと全く同じになることに注意されたい。

前述のように、ローカルなモデルの境界や要素とグローバルなものは必ずしも一致しないため、 K^{GL} の積分のためには特殊な処理が必要になる。

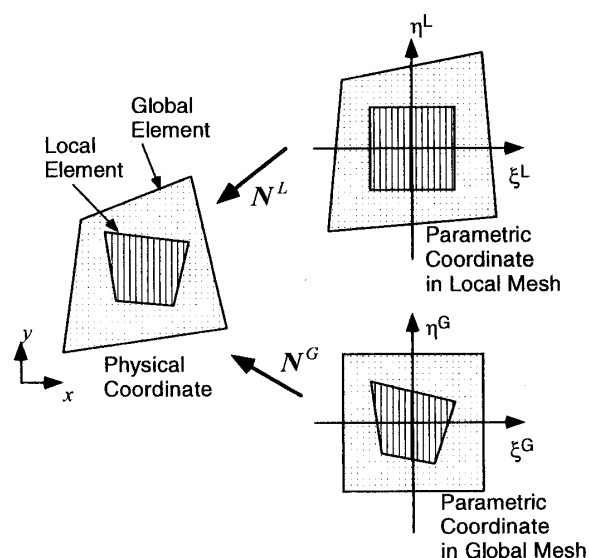


Fig. 2 Coordinate Transformation

有限要素解析でもっともよく用いられるアイソパラメトリック要素は、パラメータ座標系 (ξ, η) から物理座標系 (x, y) への写像関数として、座標値、変位値の両方に同じ形状関数を用いる。この際、Fig. 2 に示すようにローカルな形状関数によって (ξ^L, η^L) から (x, y) へ、グローバルな形状関数によって (ξ^G, η^G) から (x, y) が定義される。 K^{GL} の積分は領域 Ω^L で行うため、ローカルなメッシュ単位でガウス積分を行うが、ローカルな要素のパラメータ座標系でのガウス積分点 (ξ_i^L, η_i^L) において、 B^G を評価するには (ξ_i^L, η_i^L) を物理座標系 (x_i, y_i) に変換し、それからグローバルな要素のパラメータ座標系 (ξ_i^G, η_i^G) に逆変換することによって行う。なお、 (x_i, y_i) から (ξ_i^G, η_i^G) への逆変換は関数が陽に表されていないため、Newton Raphson 法により反復的に求める。

以上のように求めた剛性マトリクスに対して(5)式を解けば、それぞれの解析モデルの節点変位 $\bar{u}^G, \bar{u}^L$ を求めることができ、実際の変位は(1)、(2)式を使って2つの変位を重ね合わせることによって求めることができる。各部分の応力等も、同様にして容易に求めることができる。

3. ズーミング解析と重合メッシュ法の精度の比較

3.1 ズーミング解析の精度の問題

一般に、有限要素法においては実際の連続な構造に対して変位に仮定を与えているため、変位は低めに出ると考えられ、要素分割が粗い場合には要素分割が細かい場合よりも変位が低めに出る。それゆえ、ズーミング解析で変位を境界条件として与える場合には粗い解析においてその部分をより硬い構造に置き換えていることになるため、応力は実際のものより小さく出る傾向がある。逆に、荷重で境界条件を与えた場合には、応力は実際のものより高く評価される傾向がある。どちらの方が精度がよいかは一概には言えないが、ズーミング領域が全体構造に対して静定に近い形になっていれば荷重で与えたほうがよく、不静定性が高い形になっていれば変位で与えたほうがよいと思われる。しかし、これらを正しく判断するのは容易ではなく、解析者が勘に基づいて行っているのが実状であり、ズーミング領域をかなり大きく取るなど様々な工夫を行うことによって対処している。しかし、前節で述べた重合メッシュ解析法を用いれば比較的ズーミング領域も自由に設定してもよい解が得られる可能性があると思われる。それを、例題を通して見てみよう。

3.2 平面応力問題

まず、Fig. 3 に示すような正方形板に円孔が空いている問題（対称性より 1/4 領域を解析）を考える。グローバル、ローカルなメッシュとして Fig. 4 に示すようなメッシュを用いる。ただし、Fig. 4 はイメージ的な図で実際のメッシュは Table 1 に示すような、グローバルメッシュとして Fig. 4 のもの(Coarse Mesh)と、さらに各要素を 5×5 分割したもの(Detail Global Mesh)の2通りを用いた。また、ローカルメッシュとしては円周方向に 40 分割、半径方向に 20 分割したものをを用いた。4 節点アイソパラメトリック要素また、それぞれのメッシュの要素としては 4 節点アイソパラメトリック要素を用いた。

ズーミング法と比較検討するためローカルな領域の境界はグローバルなメッシュと一致させてあるが、ローカルな領域内部においてはグローバルな節点とローカルな節点は一致していない。

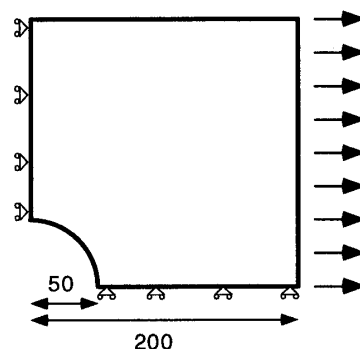


Fig. 3 Plate with Circular Hole (1/4 Area)

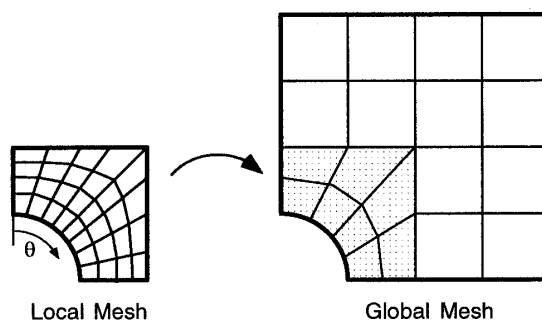


Fig. 4 Global and Local Mesh for 2D Problem

Table 1 Number of Nodes and Elements for 2D Problem

	Elements	Nodes
Coarse Global Mesh	20	31
Fine Global Mesh	500	551
Local Mesh	800	861

Fig. 5 に重合メッシュ法による解析結果、Fig. 6 に荷重による境界条件を与えたズーミング解析の結果、Fig. 7 に変位による境界条件を与えたズーミング解析の結果を示す。それぞれローカルなメッシュの円孔まわりの要素の中央点での von Mises 応力を円周まわりに Fig. 4 に示す θ の方向に取っている。実線 (ref) は参照解で、全体をローカルメッシュと同じサイズに分割して解析を行った場合である。2つの点線は上記の2種類のグローバルメッシュで解析を行った場合の結果である。Fig. 5~7 を見比べてわかるように、重合メッシュ法による解析は他の2つの解析に比べてより参照解に近い解となっている。

3.3 板曲げ問題

次に、板曲げ問題に対して重合メッシュ法を適用する。Fig. 8 に示すように、クラックのある $100 \text{ mm} \times 100 \text{ mm} \times 1 \text{ mm}$ の正方形板のクラックのない側を固定し、クラックのある側に上下に 2 kgf/mm 荷重をかける。グローバル、ローカルなメッシュのイメージ図を Fig. 9 に示す。ローカルなメッシュとしては領域を 24×12 に分割し、要素としては 4 節点 Mindlin 板要素を用いた。

参照解として全体領域を 24×24 のメッシュを用いて解析したものを用いた。Fig. 10 に参照解の応力分布を示す。 4×4 のグローバルメッシュに対する重合メッシュ解析、変位によるズーミング解析の応力分布（ローカルメッシュの領域のみ）を Fig. 11 に示す。ズーミング解析ではクラックの周りの応力集中が全く表現できていないのに対し、重合メッシュ解析では応力集中を表現できているのがわかる。これは明らかにグローバルな解析が 4×4 のメッシュでは粗すぎ、変

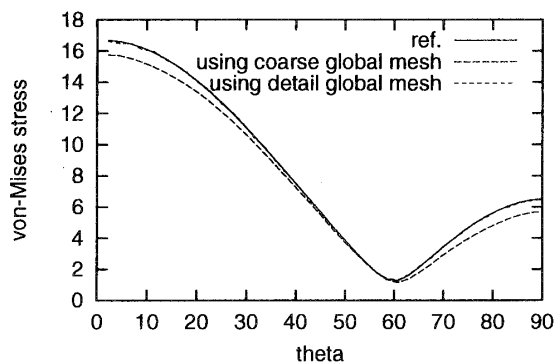


Fig. 5 The Results of 2D problem
(Overlaying Mesh Method)

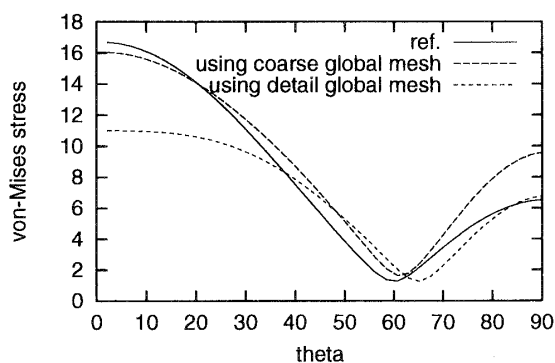


Fig. 6 The Results of 2D problem
(Zooming by Boundary Load)

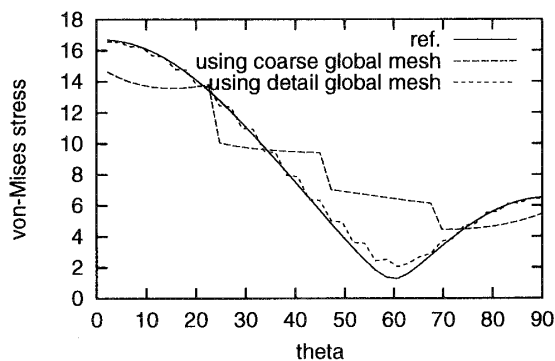


Fig. 7 The Results of 2D problem
(Zooming by Boundary Displacement)

形状を十分に表現できないためである。しかし、重合メッシュ解析ではこのように問題設定が多少不適當でもよい解が得られている。Fig. 12 にグローバルなメッシュを 8×8 にしたときの応力分布を示す。変位によるズーミング解析でも応力集中を多少表現できるようになっているが、まだ不十分である。

精度を定量的に評価するため、それぞれのケースの応力拡大係数を変位の外挿法によって求めた結果を Table 2 に示す。参照解の $1.365 \times 10^2 \text{ kgf mm}^{-3/2}$ に対して、重合メッシュ解析では数%の精度で応力集中係数を評価できているのに対し、変位によるズーミングでは 8×8 のグローバルメッシュでも余りよい値が得られていないことがわかる。

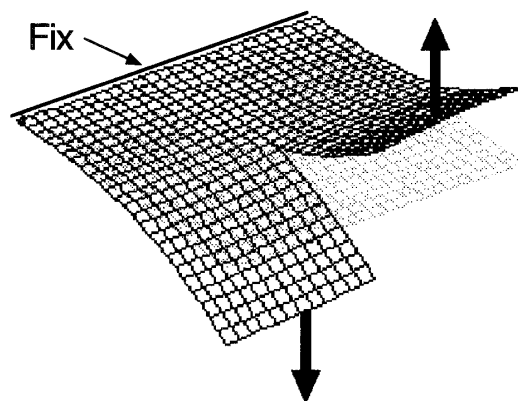


Fig. 8 Plate Bending Problem

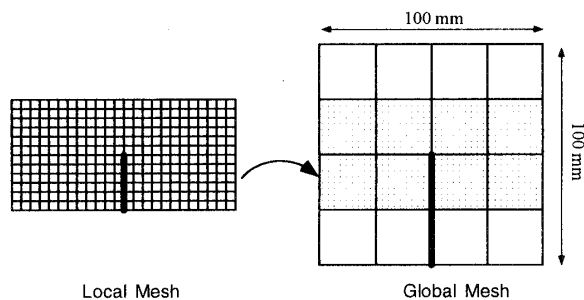


Fig. 9 Global and Local Mesh for Plate Bending Problem

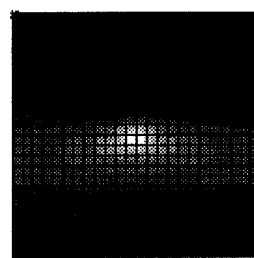


Fig. 10 Reference Result (24x24 Mesh)

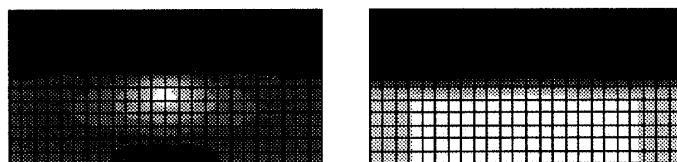


Fig. 11 Results with Coarse Global Mesh (4x4 Global Mesh)

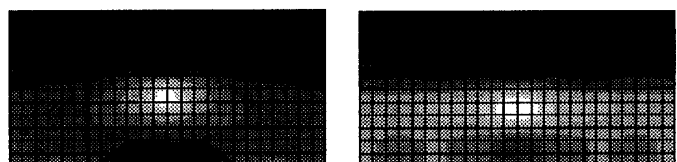


Fig. 12 Results with Detail Global Mesh (8x8 Global Mesh)

Table 2 Comparison of Stress Intensity Factors
($\text{kgf mm}^{-3/2}$)

Global Mesh	4×4	8×8
Overlaying Mesh	1.295×10^2	1.350×10^2
Zooming by Disp.	0.735×10^2	0.910×10^2
Reference	1.365×10^2	

4. 汎用有限要素コードでの重合メッシュ解析の適用

前章までで、ここに述べた重合メッシュ法を用いれば従来のブーミング法に比べ格段により精度でグローバル・ローカル解析が行える可能性のあることを示した。しかし、船体構造設計者がこれを用いる場合、全く新たなプログラムを用いなければならないのは大変である。

ところが、前述のように(5)、(6)式において K^G , K^L , f^G , f^L は通常の有限要素解析によるものと同一となるので、(5)を直接解く代わりに以下のような反復アルゴリズムによって解くことにより、従来用いていた汎用有限要素コードをそのまま使い、マトリクス K^{GL} のみをあらかじめ計算し、それを用いて入力データの荷重ベクトルの部分のみを変更すればよい。

$$\bar{u}_0^L = 0, i=0$$

repeat until converge

$$\bar{u}_{i+1}^G = (K^G)^{-1} (f^G - K^{GL} \bar{u}_i^L) \quad (8)$$

$$\bar{u}_{i+1}^L = (K^L)^{-1} (f^L - K^{LG} \bar{u}_{i+1}^G)$$

$i = i + 1$

end

すなわちこれは、グローバルとローカルな解析を交互に双方の影響を考慮しながら行うことに相当する。さらにこの反復過程に対し、以下のように緩和を行うことによりさらに加速させることができる。上記の反復ステップで得られた解を $\{\bar{u}^G \quad \bar{u}^L\}_{i+1}^T$ とすると、

$$\begin{Bmatrix} \bar{u}^G \\ \bar{u}^L \end{Bmatrix}_{i+1}^* = \omega \begin{Bmatrix} \bar{u}^G \\ \bar{u}^L \end{Bmatrix}_{i+1} + (1-\omega) \begin{Bmatrix} \bar{u}^G \\ \bar{u}^L \end{Bmatrix}_i \quad (9)$$

ただし、 ω の値は経験的に決めることになる。

3.2節で解いた平面応力問題の例題 (Coarse Mesh) に対して、この反復解法を試みた。ここでは(5)式を直接解くことによって正解が得られるので、その正解との差をノルムとして以下の誤差で収束の状況を調べる。

$$Error = \frac{\|\bar{u}_i - \bar{u}_{exact}\|}{\|\bar{u}_{exact}\|} \quad (10)$$

ただし $\bar{u} = \{\bar{u}^G \quad \bar{u}^L\}^T$

いくつかの ω の値に対して試みたところ、Over relaxation ($\omega > 1$) よりも、Under relaxation ($\omega < 1$) の方が収束を加速することがわかった。Fig. 13 に $\omega=1.0, 0.75, 0.5$ としたときの反復と誤差の関係を示す。この反復は必ずしも完全に収束するまで行う必要はなく、ある程度で止めても通常のブーミング法よりもよい解が得られる。

また、この手法を用いれば、たとえばローカルな解析に対しては塑性や座屈などを考慮した解析を行い、逐次崩壊挙動を追跡するなどの拡張も考えられる。

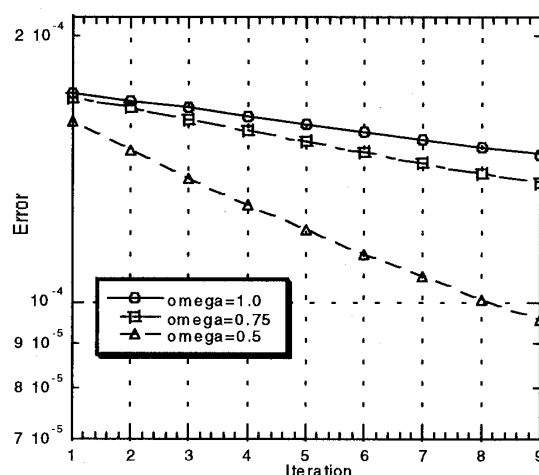


Fig. 13 The convergence of Iterative Method

5. 結 言

船体構造の解析におけるブーミング法の精度の改善のため、グローバルなメッシュとローカルなメッシュを重ね合わせ、グローバルな解析とローカルな解析を同時に行う重合メッシュ法を平面応力問題、板曲げ問題に適用し、ブーミング法に比べよい解が得られることを示した。また、グローバルな解析とローカルな解析を反復的に行うことによって重合メッシュ法を汎用有限要素コードを用いておこなうことができることを示した。

謝辞

本研究は、(社)日本造船研究協会第228研究部会「波浪中の船体構造の安全性評価の研究」の一環として行った。有益な助言をいただいた富田康光部会長、角洋一WG1主査をはじめとする委員の方々に感謝の意を表する。

参考文献

- 1) Mote, C.D. "Global-local finite element" Int. J. Numer. Methods Engrg. 3 (1971) 565-574
- 2) Lions, J.L. "Some Methods in the Mathematical Analysis of Systems and their Control" Science Press, Beijing, China (1981)
- 3) Dodds, R. H. and Lopez, L. A. "Substructuring in linear and nonlinear analysis" Int. J. Numer. Methods Engrg. 15 (1980) 583-597
- 4) 上田幸雄, Rashed, S.M.H, 片山正孝「理想化構造要素法による二重底構造の最終強度解析」日本造船学会論文集 第138号 (1975) pp 549-557
- 5) Fish, J., Markolefas, S., Guttal, R. and Nayak, P. "On the adaptive multilevel superposition of finite element meshes for linear elastostatics" Applied Numer. Math. 14 (1994) pp135-164
- 6) Fish, J., Belsky, V. and Pandheeradi, M. "Composite grid method for hybrid systems", Comput. Methods Appl. Mech. Engrg. 135 (1996) 307-325