

高温場の圧縮性を考慮した乱流熱対流の解析

(その1) 低マッハ数近似による数値解析

正員 胡 長 洪* 正員 福 地 信 義*

Computation of Turbulent Thermal Convection with Large Temperature Variation
(Part 1) Numerical Simulation of Compressible Flow Using Low Mach-Number Approximation

by Changhong Hu, *Member* Nobuyoshi Fukuchi, *Member*

Summary

Predicting the spread of smoke from a marine fire in enclosed spaces is still one of the challenge to the functional design of safe and comfortable environments for marine systems. A distinguishing feature of the problem is that the temperature difference as well as the density variation is very large while the smoke flow induced by the heat release is much slower than the propagation of acoustic waves. Therefore, this flow should be considered as a low-Mach-number compressible flow. The generally used Boussinesq approximation, in which the density is assumed constant except for the buoyancy term, is limited to very small temperature difference, and is not an appropriate model for the problem.

In this paper, a numerical method is developed, in which the control equations are derived on low-Mach-number approximation, and the Favre averaged compressible $k-\varepsilon$ model is used to solve the turbulent transportation coefficients. A two-dimensional thermal plume above a line source is simulated by the present method and the method based on Boussinesq approximation. By comparing the distribution of vertical velocity and temperature above the heat source to theoretical and experimental results, it is found that when the strength of the heat source is very small, the two models give almost the same results. On the other hand, for the case of large strength of the heat source, computation by the low-Mach-number model gives better results than by Boussinesq model.

1. はじめに

近年、船舶や海洋構造物では高度化された機能が求められる他に、安全性や快適性を追求する機運が高まっており、機能システムに係わる熱量設計や環境設計にも高度な熱・流体解析が不可欠となっている。その中に、火災時の煙流動予測のように、高温部の密度変化のために空間内流体の部分的な圧縮性流れが生起する現象があるが、このような問題には一般的に温度変化による密度変化の影響を浮力項以外は無視する Boussinesq 近似が用いられ、非圧縮性流体としての解析がなされている。ただ空間内流体の温度差が大きい場合には、Boussinesq の仮定が成立せず¹⁾、

低マッハ数の圧縮性を考慮した乱流熱拡散現象の解明が必要である。

本研究では、火災時の煙流動のように高温熱源があり、密度変化が大きいために起こる圧縮性流れを考慮した非定常の乱流熱拡散現象を解明するために、低マッハ数の近似とその数値計算法を提案し、この計算法を高温線熱源上のサーマル・プルーム現象に適用する。この解析例では、外乱のない空間における高温熱源からの上昇気流の様相は熱源の大きさにより決まるが、ここでは層流と乱流の上昇気流について数値計算を行う。熱源真上の温度および上昇流速の解析値および実験結果と比較し、低マッハ数近似と Boussinesq 近似との差異およびその適用性について考察する。

2. 低マッハ数圧縮性流れの支配方程式

2.1 低マッハ数近似の考え方

低マッハ数の圧縮性を考慮した乱流熱対流に関する解析

* 九州大学大学院工学研究科

原稿受理 平成 11 年 7 月 1 日

秋季講演会において講演 平成 11 年 11 月 18, 19 日

では、大きな温度変化に伴う圧縮性を考慮する支配方程式およびその数値解析に適した乱流モデルの構築が課題である。

この問題の解析方法としては、航空工学の分野等で用いられている高マッハ数の圧縮性流体を対象とした解析法の適用が考えられるが、火災時の煙流動などのような低マッハ数の流れを精度良く解くことは困難である。これには次の理由があげられる。

- 1) 圧縮性流れの厳密な解析では、速度・温度だけでなく、圧力伝播の状態も解析する必要があるため時間差分のステップ間隔を極めて小さくすることが不可欠であり、長い時間スケールを解析するためには膨大な計算時間が必要となる。
- 2) 高マッハ数の圧縮性流体の解法では運動方程式で参照される圧力が状態方程式によって定められるが、低マッハ数の場合には圧力の空間変動が極めて小さくなるために、状態方程式による解には非常に高い精度が要求され、収束解を得ることが難しい。

このような低マッハ数圧縮性の問題を解くために、流体の圧縮性を取り入れながら、密度波を無視した近似的な支配方程式を導くことになるが、その方法は2種考えられる。一つは摂動法に基づいて、マッハ数またはその2乗による級数展開²⁾³⁾により近似方程式を求める方法である。他は熱源によって駆動される流れの場に対する次元解析による方法である⁴⁾⁵⁾。次元解析法は物理的意味が明確であるのに対し、級数展開法は数学的に簡単に扱いやすい特長があり、本研究ではマッハ数の2乗による級数展開法を使用して低マッハ数近似の方程式を導く。

数値計算における乱流モデリングについては、平均操作にアンサンブル平均か圧縮性流体に対する密度の重みを付した Favre 平均を採用したレイノルズ平均乱流モデル、または空間フィルターをかけた SGS (Subgrid Scale) モデルがある。SGS モデル適用については今後の研究課題とし、ここでは実用性の高いレイノルズ平均乱流モデルを適用し、Favre 平均に基づく圧縮性 k-ε モデルを採用する。なお、アンサンブル平均に基づく圧縮性 k-ε モデルも考えられるが、密度変動との相関項が多く含まれているために数値解析には非常に複雑である。村上らの研究⁶⁾によると、この2つの方法で得られた結果はほぼ一致する。

2.2 低マッハ数近似による方程式

ここでは直交デカルト座標 x_i ($i=1, 2, 3$, x_3 は鉛直方向) をとり、以下に示す諸式はテンソル表示とし、添字については総和規約に従うものとする。時間を t とし、状態量としての密度、速度、圧力、温度をそれぞれ ρ , u_i ($i=1, 2, 3$), p , T とすると、無次元化された圧縮性流体の支配方程式は以下ようになる。

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x_i}(\rho u_i) = 0 \quad (1)$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial(\rho u_i)}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x_j}(\rho u_i u_j) \\ = -\frac{1}{\gamma M^2} \frac{\partial p}{\partial x_i} + \frac{1}{\text{Re}} \frac{\partial \tau_{ij}}{\partial x_j} - \frac{1}{Fr^2} \rho \delta_{i3} \end{aligned} \quad (2)$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial(\rho T)}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x_i}(\rho T u_i) = \frac{\gamma-1}{\gamma} \frac{Dp}{Dt} \\ + \frac{\gamma-1}{\gamma} \frac{\gamma M^2}{\text{Re}} \mu \phi + \frac{1}{\text{PrRe}} \frac{\partial}{\partial x_i} \left(\mu \frac{\partial T}{\partial x_i} \right) + Q \end{aligned} \quad (3)$$

$$p = \rho T \quad (4)$$

ただし、 $\tau_{ij} = \mu \left(\frac{\partial u_i}{\partial x_j} + \frac{\partial u_j}{\partial x_i} - \frac{2}{3} \delta_{ij} \frac{\partial u_k}{\partial x_k} \right)$, $\phi = \left(\frac{\partial u_i}{\partial x_j} + \frac{\partial u_j}{\partial x_i} - \frac{2}{3} \delta_{ij} \frac{\partial u_k}{\partial x_k} \right) \frac{\partial u_i}{\partial x_j}$, δ_{ij} はクロネッカーのデルタである。

また、 g は重力加速度、 Re はレイノルズ数、 Pr はプラントル数、 Fr はフルード数、 M はマッハ数、 c_p は定圧比熱、 μ は粘性係数、 λ は熱伝達率、 R は気体定数、 γ は比熱比、 Q^* は発熱量である。

これらの式における無次元量は、上付き “*” を次元量および下付き “0” を参考 (代表) 量とすると、次のように表される。

$$u_i = u_i^*/U_0, \quad x_i = x_i^*/L_0, \quad t = t^*U_0/L_0,$$

$$p = p^*/\rho_0 R T_0, \quad \rho = \rho^*/\rho_0,$$

$$T = T^*/T_0, \quad \mu = \mu^*/\mu_0, \quad \lambda = \lambda^*/\lambda_0,$$

$$Q = Q^*L_0/\rho_0 c_p T_0 U_0,$$

$$\text{Re} = \frac{\rho_0 U_0 L_0}{\mu_0}, \quad \text{Pr} = \frac{\mu_0 c_p}{\lambda_0} = \frac{\mu c_p}{\lambda}, \quad Fr = \frac{U_0}{\sqrt{g L_0}},$$

$$M = \frac{U_0}{\sqrt{\gamma R T_0}}, \quad c_p = \frac{\gamma R}{\gamma - 1}$$

熱対流現象では参考速度 U_0 は音速よりはるかに小さく、したがってマッハ数は非常に小さくなる。ここで、 $\varepsilon = \gamma M^2$ とすると、低マッハ数では $\varepsilon \ll 1$ になり、この ε を摂動パラメータとして状態量を展開すると次のように表される。

$$p = p^{(0)} + \varepsilon p^{(1)} + o(\varepsilon), \quad \rho = \rho^{(0)} + \varepsilon \rho^{(1)} + o(\varepsilon),$$

$$u_i = u_i^{(0)} + \varepsilon u_i^{(1)} + o(\varepsilon), \quad T = T^{(0)} + \varepsilon T^{(1)} + o(\varepsilon).$$

なお、 $o(\varepsilon)$ は ε^2 以上のオーダーの項を意味する。

これらの量を支配方程式 (1)~(4) に代入して、 ε に対して次数を比較する。一番低い次数 (ε^0) に係わる方程式は次のようになる。

$$\frac{\partial \rho^{(0)}}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x_i}(\rho^{(0)} u_i^{(0)}) = 0 \quad (5)$$

$$\frac{\partial p^{(0)}}{\partial x_i} = 0 \quad (6)$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial(\rho^{(0)} u_i^{(0)})}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x_j}(\rho^{(0)} u_i^{(0)} u_j^{(0)}) = -\frac{\partial p^{(1)}}{\partial x_i} + \frac{1}{\text{Re}} \frac{\partial \tau_{ij}^{(0)}}{\partial x_j} \\ + \frac{1}{Fr^2} (1 - \rho^{(0)}) \delta_{i3} \end{aligned} \quad (7)$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial(\rho^{(0)} T^{(0)})}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x_i}(\rho^{(0)} T^{(0)} u_i^{(0)}) \\ = \frac{\gamma-1}{\gamma} \frac{Dp^{(0)}}{Dt} + \frac{1}{\text{PrRe}} \frac{\partial}{\partial x_i} \left(\mu \frac{\partial T^{(0)}}{\partial x_i} \right) + Q \end{aligned} \quad (8)$$

$$p^{(0)} = \rho^{(0)} T^{(0)} \quad (9)$$

$$\text{ただし } \tau_{ij}^{(0)} = \mu \left(\frac{\partial u_i^{(0)}}{\partial x_j} + \frac{\partial u_j^{(0)}}{\partial x_i} - \frac{2}{3} \delta_{ij} \frac{\partial u_k^{(0)}}{\partial x_k} \right).$$

なお、式(7)において $p^{(1)} + x_3/Fr^2 \rightarrow p^{(1)}$ と置き換えている。また、方程式(6)は ε^{-1} オーダーの式で、 $p^{(0)}$ が空間的に一定であることを意味しており、零階近似では総圧力が以下の式で表される。

$$p = p^{(0)} + \gamma M^2 \left(p^{(1)} - \frac{x_3}{Fr^2} \right) \quad (10)$$

ここで、 $p^{(0)}$ は熱力学的な圧力であり、時間のみの関数である。したがってこの圧力は空間的な平均圧力を意味する。低マッハ数近似では、密度の伝播速度（音速）を無限大と見なし、温度変化による圧力変化は瞬時に全流れ場に伝わる仮定をとる。一方、 $p^{(1)}$ は流体運動に伴う動的な圧力を表し、空間と時間の関数である。零階近似では $p^{(0)}$ と $p^{(1)}$ の相互干渉はない。なお、有次元の静圧と動圧は以下のようになるが、低マッハ数の場合では動圧より平均圧力のほうがはるかに大きい。

$$p^{*(0)} = p^{(0)} \rho_0 R T_0, \quad p^{*(1)} = p^{(1)} \rho_0 U_0^2.$$

以降、 $p^{(0)}$ と $p^{(1)}$ 両方が出現する圧力を除して式における上添字“(0)”は簡略化のために全て省略し、圧力は $p^{(0)} \rightarrow p^0$, $p^{(1)} \rightarrow p$ とする。

式(5)～(9)は低マッハ数近似の方程式系である。流れが層流の場合にはこれらの式を直接使って数値解析できるが、温度差の大きい乱流熱対流の場合では後述する平均化された Reynolds 方程式を使用する。

2.3 低マッハ数近似の Reynolds 方程式

圧縮性流体の場合では、密度変動との相関項の処理を避けるため、質量加重平均いわゆる Favre 平均を用いて Reynolds 方程式を導出する。Favre 平均では、関数 f の平均値を $\bar{f}$ および変動分を f'' として、以下のように定義する。

$$f = \bar{f} + f'' \quad \bar{f} = \frac{\overline{\rho f}}{\bar{\rho}} = \langle f \rangle \quad \overline{\rho f''} = 0 \quad (11)$$

方程式(5)～(9)において、密度を含む速度と温度の項には Favre 平均を用いる。

$$u_i = \bar{u}_i + u_i'' \quad T = \bar{T} + T'' \quad (12)$$

一方、密度を含まない圧力項と密度自体にはアンサンブル平均を適用する。

$$p = \bar{p} + p' \quad \rho = \bar{\rho} + \rho' \quad (13)$$

平均化により導出された Reynolds 方程式は以下のようになる

$$\frac{\partial \bar{\rho}}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x_i} (\bar{\rho} \bar{u}_i) = 0 \quad (14)$$

$$\frac{\partial \bar{p}^0}{\partial x_i} = 0 \quad (15)$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial (\bar{\rho} \bar{u}_i)}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x_j} (\bar{\rho} \bar{u}_i \bar{u}_j) &= - \frac{\partial \bar{p}}{\partial x_i} \\ &+ \frac{1}{\text{Re}} \frac{\partial \bar{\tau}_{ij}}{\partial x_j} + \frac{1}{Fr^2} (1 - \bar{\rho}) \delta_{i3} \end{aligned} \quad (16)$$

$$\frac{\partial (\bar{\rho} \bar{T})}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x_i} (\bar{\rho} \bar{T} \bar{u}_i) = \frac{\gamma - 1}{\gamma} \frac{D \bar{p}^0}{Dt} + \frac{1}{\text{Re}} \frac{\partial \bar{\sigma}_{ij}}{\partial x_i} + Q \quad (17)$$

$$\bar{p}^0 = \bar{\rho} \bar{T} \quad (18)$$

ただし、

$$\begin{aligned} \bar{\tau}_{ij} &= \mu \left(\frac{\partial \bar{u}_i}{\partial x_j} + \frac{\partial \bar{u}_j}{\partial x_i} - \frac{2}{3} \delta_{ij} \frac{\partial \bar{u}_k}{\partial x_k} \right) + \mu \left(\frac{\partial \bar{u}_i''}{\partial x_j} + \frac{\partial \bar{u}_j''}{\partial x_i} \right. \\ &\quad \left. - \frac{2}{3} \delta_{ij} \frac{\partial \bar{u}_k''}{\partial x_k} \right) - \text{Re} \bar{\rho} \langle u_i'' u_j'' \rangle \end{aligned} \quad (19)$$

$$\bar{\sigma}_{ij} = \frac{\mu}{\text{Pr}} \frac{\partial \bar{T}}{\partial x_i} - \text{Re} \bar{\rho} \langle u_i'' T'' \rangle \quad (20)$$

計算上は、式(19)の右辺第2項は第1項より小さいために無視される。

$$\bar{\tau}_{ij} = \mu \left(\frac{\partial \bar{u}_i}{\partial x_j} + \frac{\partial \bar{u}_j}{\partial x_i} - \frac{2}{3} \delta_{ij} \frac{\partial \bar{u}_k}{\partial x_k} \right) - \text{Re} \bar{\rho} \langle u_i'' u_j'' \rangle \quad (21)$$

式(14)～(18)は低マッハ数近似の Reynolds 方程式系である。この方程式系では、2つの2階モーメント相関項、レイノルズ応力項 $\langle u_i'' u_j'' \rangle$ と乱流熱流束 $\langle u_i'' T'' \rangle$ が含まれるため完結していない。これを解決するため、次のような Boussinesq 仮定に基づく渦粘性近似を行う。

$$\begin{aligned} - \bar{\rho} \langle u_i'' u_j'' \rangle &= \frac{\mu_t}{\text{Re}} \left(\frac{\partial \bar{u}_i}{\partial x_j} + \frac{\partial \bar{u}_j}{\partial x_i} \right) \\ &\quad - \frac{2}{3} \delta_{ij} \left(\bar{\rho} k + \frac{\mu_t}{\text{Re}} \frac{\partial \bar{u}_k}{\partial x_k} \right) \end{aligned} \quad (22)$$

$$- \bar{\rho} \langle u_i'' T'' \rangle = \frac{\mu_t}{\text{Pr}_t \text{Re}} \frac{\partial \bar{T}}{\partial x_i} \quad (23)$$

ここで、 k は無次元乱流エネルギー ($k \equiv \langle u_i'' u_i'' \rangle / 2$)、 μ_t は μ_0 によって無次元化された乱流渦動粘性係数であり、後述の圧縮性を考慮した k - ε モデルにより求める。 Pr_t は乱流プラントル数である。

したがって、式(20)と(21)は以下になる。

$$\bar{\sigma}_{ij} = \left(\frac{\mu}{\text{Pr}} + \frac{\mu_t}{\text{Pr}_t} \right) \frac{\partial \bar{T}}{\partial x_i} = \mu_{\text{eff}} \frac{\partial \bar{T}}{\partial x_i} \quad (24)$$

$$\bar{\tau}_{ij} = (\mu + \mu_t) \left(\frac{\partial \bar{u}_i}{\partial x_j} + \frac{\partial \bar{u}_j}{\partial x_i} \right) = \mu_e \left(\frac{\partial \bar{u}_i}{\partial x_j} + \frac{\partial \bar{u}_j}{\partial x_i} \right) \quad (25)$$

なお、 k と $\partial u_k / \partial x_k$ に関する項が、数値計算上は圧力項に吸収できるために、式(25)には現れてない。

2.4 Boussinesq 近似の方程式

Boussinesq 近似の支配方程式は方程式系(5)～(9)あるいは(14)～(18)に対してさらに制約を課した場合に相当する。例として、方程式系(5)～(9)に対して、温度変化が小さい場合を仮定し、①密度は運動方程式の浮力項以外は一定 ($\rho=1$)、②平均圧力は時間的にも一定 ($p^0=1$)、という条件を与える。また運動方程式(7)の浮力項に用いる密度について、式(9)から次のように Taylor 級数展開する。

$$\rho = \frac{p^0}{T} = \frac{1}{1 + (T-1)} = 1 - (T-1) + (T-1)^2 + \dots \quad (26)$$

ここで、温度変化は小さいので $T-1 \ll 1$ となり、 $(T-1)$ の2次以上の項はが無視できる。更に、 $\mu=1$ として、

Boussinesq 近似を適用した支配方程式は以下のようになる。

$$\frac{\partial u_i}{\partial x_i} = 0 \quad (27)$$

$$\frac{\partial u_i}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x_j} (u_i u_j) = -\frac{\partial p}{\partial x_i} + \frac{1}{\text{Re}} \frac{\partial^2 u_i}{\partial x_j \partial x_j} + \frac{1}{Fr^2} (T-1) \delta_{i3} \quad (28)$$

$$\frac{\partial T}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x_i} (T u_i) = \frac{1}{\text{PrRe}} \frac{\partial^2 T}{\partial x_i \partial x_i} + Q \quad (29)$$

2.5 低マッハ数近似の数値解析

低マッハ数近似の数値解析は基本的には非圧縮性流の解法を応用できるので、ここでは支配方程式系(14)～(18)に対する SIMPLE 法⁹⁾の適用による解法を考える。

まず、温度と密度は状態方程式(18)を満足しなければならないが、密度分布を仮定して温度をエネルギー式(17)で求め、式(18)を使用して密度を更新する。そして、この修正した密度を使って流速などを計算し、これより温度を求める。これらの計算手順を収束するまで繰り返す。

つぎに、連続方程式を満足する方法が問題となるが、SIMPLE 法は一種の緩和計算法であり、圧力補正を行って連続の式(14)を満たす。これには、 $\partial \bar{p} / \partial t$ を求める必要があるが、式(18)によって次のように算定する。

$$\frac{\partial \bar{p}}{\partial t} = \frac{1}{T} \left(\frac{d\bar{p}^0}{dt} - \bar{p} \frac{\partial \tilde{T}}{\partial t} \right) \quad (30)$$

この式および温度の式(17)の計算を行うには、平均圧力 $\bar{p}^0$ を知る必要がある。まず式(15)によって

$$\frac{D\bar{p}^0}{Dt} = \frac{\partial \bar{p}^0}{\partial t} + \tilde{u}_i \frac{\partial \bar{p}^0}{\partial x_i} = \frac{d\bar{p}^0}{dt} \quad (31)$$

の関係がある。また、式(18)を式(17)に代入すると次のようになる。

$$\bar{p}^0 \frac{\partial \tilde{u}_i}{\partial x_i} = -\frac{1}{\gamma} \frac{D\bar{p}^0}{Dt} + \frac{1}{\text{Re}} \frac{\partial}{\partial x_i} \left(\mu_{er} \frac{\partial \tilde{T}}{\partial x_i} \right) + Q \quad (32)$$

この式に、式(31)を考慮すると次式が求まる。

$$\frac{d\bar{p}^0}{dt} = -\gamma \bar{p}^0 \frac{\partial \tilde{u}_i}{\partial x_i} + \frac{\gamma}{\text{Re}} \frac{\partial}{\partial x_i} \left(\mu_{er} \frac{\partial \tilde{T}}{\partial x_i} \right) + \gamma Q \quad (33)$$

ここで次の2つのケースを考える。

- ① 計算領域が開放の場合：平均圧力は大気圧に等しいから定数とする。したがって、

$$\frac{d\bar{p}^0}{dt} = 0 \quad (34)$$

- ② 計算領域が閉鎖の場合あるいは小さい隙間や穴がある場合：式(33)を計算領域において Gauss の発散定理に基づき積分する。

$$\begin{aligned} \frac{d\bar{p}^0}{dt} &= -\gamma \bar{p}^0 \frac{1}{V} \iiint \frac{\partial \tilde{u}_i}{\partial x_i} dV \\ &\quad + \frac{\gamma}{\text{Re}} \frac{1}{V} \iiint \frac{\partial}{\partial x_i} \left(\mu_{er} \frac{\partial \tilde{T}}{\partial x_i} \right) dV + \frac{\gamma}{V} \iiint Q dV \\ &= -\gamma \bar{p}^0 \frac{1}{V} \iint_{\Delta S_1} \tilde{u}_i n_i dS \end{aligned}$$

$$+ \frac{\gamma}{\text{Re}} \frac{1}{V} \iint_{\Delta S_1 + \Delta S_2} \left(\mu_{er} \frac{\partial \tilde{T}}{\partial x_i} \right) n_i dS + \frac{\gamma}{V} \iiint Q dV \quad (35)$$

ただし、 V は計算領域の体積、 ΔS_1 は隙間の面積、 ΔS_2 は非断熱壁の面積、 n_i は領域境界面に対する法線方向の単位ベクトルである。

2.6 圧縮性を考慮した k-ε モデル

渦動粘性係数 μ_t は乱流エネルギー k とその散逸率 ε により次式で求められる。

$$\mu_t = \text{Re} \bar{\rho} C_\mu \frac{k^2}{\varepsilon} \quad (36)$$

ここに、 C_μ は常数である。

Favre 平均により、 k と ε に関する輸送方程式は次のように表される。

$$\frac{\partial(\bar{\rho}k)}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x_i} (\bar{\rho} \tilde{u}_i k) = D_k + P_k - \bar{\rho} \varepsilon + G_k \quad (37)$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial(\bar{\rho}\varepsilon)}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x_i} (\bar{\rho} \tilde{u}_i \varepsilon) &= D_\varepsilon \\ &\quad + \frac{\varepsilon}{k} (C_{\varepsilon 1} P_k - C_{\varepsilon 2} \bar{\rho} \varepsilon + C_{\varepsilon 3} G_k) \end{aligned} \quad (38)$$

ただし、

$$\begin{aligned} P_k &= -\bar{\rho} \langle u_i'' u_j'' \rangle \frac{\partial \tilde{u}_i}{\partial x_j} = \left[\frac{\mu_t}{\text{Re}} \left(\frac{\partial \tilde{u}_i}{\partial x_j} + \frac{\partial \tilde{u}_j}{\partial x_i} \right) \right. \\ &\quad \left. - \frac{2}{3} \delta_{ij} \left(\bar{\rho} k + \frac{\mu_t}{\text{Re}} \frac{\partial \tilde{u}_k}{\partial x_k} \right) \right] \frac{\partial \tilde{u}_i}{\partial x_j} \end{aligned} \quad (39)$$

$$D_k = \frac{1}{\text{Re}} \frac{\partial}{\partial x_j} \left(\frac{\mu_t}{\sigma_k} \frac{\partial k}{\partial x_j} \right) \quad (40)$$

$$D_\varepsilon = \frac{1}{\text{Re}} \frac{\partial}{\partial x_j} \left(\frac{\mu_t}{\sigma_\varepsilon} \frac{\partial \varepsilon}{\partial x_j} \right) \quad (41)$$

$$G_k = \frac{\mu_t}{\text{Pr}_t \text{Re}} \frac{1}{\bar{\rho}} \frac{1}{T} \frac{\partial \tilde{T}}{\partial x_i} \left(\frac{\partial \bar{p}}{\partial x_i} - \frac{1}{Fr^2} \delta_{i3} \right) \quad (42)$$

式中の普通常数は Launder 等⁷⁾の実験により求められた次の値をとることが多い。

$$\sigma_k = 1.0, \sigma_\varepsilon = 1.3, C_{\varepsilon 1} = 1.44, C_{\varepsilon 2} = 1.92, C_{\varepsilon 3} = 0.7$$

ただし、 $C_{\varepsilon 3}$ については、鉛直壁の近くでは $C_{\varepsilon 3} = C_{\varepsilon 1}$ になるが、水平壁の近くでは $C_{\varepsilon 3} = 0$ となることから、本研究で扱う壁の影響が少ない開領域に対してはその平均値 $C_{\varepsilon 3} = 0.7$ を使用する。

したがって、支配式(14)～(18)および輸送式(36)～(38)は低マッハ数近似により乱流熱対流を解析するための基礎方程式系である。

なお、以下に平均操作の表示である“ $-$ ”と“ $\sim$ ”はすべて省略する。

3. 数値計算法

3.1 SIMPLE 法による解法

低マッハ数近似された基礎方程式の数値解析には、2.5 に述べた基本的な考え方に従って、SIMPLE 法⁹⁾に準じた方法を適用するが、ここでは2次元問題に対する具体的な方法について述べる。なお、座標は直交デカルト系 $(x_1,$

x_3) とする。

運動量, 温度, k , ε に関する輸送方程式は, ϕ を状態量, Γ_ϕ を拡散係数, S を輸送の駆動源とすると, 次の形に表される。

$$\frac{\partial \rho \phi}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x_1} \left(\rho u_1 \phi - \Gamma_\phi \frac{\partial \phi}{\partial x_1} \right) + \frac{\partial}{\partial x_3} \left(\rho u_3 \phi - \Gamma_\phi \frac{\partial \phi}{\partial x_3} \right) = S \quad (43)$$

これを Fig. 1 に示すようにスタガード座標系で有限体積法を用いて離散化すると, 次の式に変換される。

$$\begin{aligned} \rho_{i,j} \frac{\phi_{i,j} - \phi_{i,j}^n}{\Delta t} \Delta x_1 \Delta x_3 + \left(\rho u_1 \phi - \Gamma_\phi \frac{\partial \phi}{\partial x_1} \right)_{i+\frac{1}{2},j} \Delta x_3 \\ - \left(\rho u_1 \phi - \Gamma_\phi \frac{\partial \phi}{\partial x_1} \right)_{i-\frac{1}{2},j} \Delta x_3 \\ + \left(\rho u_3 \phi - \Gamma_\phi \frac{\partial \phi}{\partial x_3} \right)_{i,j+\frac{1}{2}} \Delta x_1 \\ - \left(\rho u_3 \phi - \Gamma_\phi \frac{\partial \phi}{\partial x_3} \right)_{i,j-\frac{1}{2}} \Delta x_1 = (S_c + S_p \phi_{i,j}) \Delta x_1 \Delta x_3 \end{aligned} \quad (44)$$

ここに, 上付き n は時間ステップの前段階を表す。この式の移流項に適切なスキームを用いると, この輸送方程式は次の形に表せる。

$$\begin{aligned} a_{i,j} \phi_{i,j} = a_{i+1,j} \phi_{i+1,j} + a_{i-1,j} \phi_{i-1,j} + a_{i,j+1} \phi_{i,j+1} \\ + a_{i,j-1} \phi_{i,j-1} + b_{i,j} \end{aligned} \quad (45)$$

ただし, 式中の各係数については文献⁹⁾ に詳しく記載されているので, ここでは省略する。

式(45)は領域内の全ての格子点で成り立つことから, 例えば速度に関する方程式では, まず適当な圧力を与えて速度に関する連立方程式を解くが, 得られた速度は一般に連続方程式(14)を満たさないから, 連続式を満足するように圧力修正式を導き, これを解いて圧力と速度を修正する。このような手順により連続式を満たすまで修正を繰り返す。

ここに, 連続式(14)を次のように離散化して用いる。

$$\begin{aligned} (\rho u_1)_{i+\frac{1}{2},j} \Delta x_3 - (\rho u_1)_{i-\frac{1}{2},j} \Delta x_3 + (\rho u_3)_{i,j+\frac{1}{2}} \Delta x_1 \\ - (\rho u_3)_{i,j-\frac{1}{2}} \Delta x_1 = - \left(\frac{\partial \rho}{\partial t} \right)_{i,j} \Delta x_1 \Delta x_3 \end{aligned} \quad (46)$$

なお, 右辺の $\partial \rho / \partial t$ は式(18)により計算する。

乱流の場合について, 数値計算の主要手順を Fig. 2 に示す。

3.2 計算上の熱源処理

解析法の妥当性を調べるための計算例として, 床面に設置した線熱源によるサーマルプルームの解析を行う。この問題の特徴は熱源により流れが生起する現象であるために, 熱源の設定条件が支配要因であり, これには熱源の温度または熱流束を与える2つの場合があるが, 以下に熱源に関する無次元化のための参考量について述べる。

1) 熱源温度 T_s が既知の場合

この場合には $\Delta T = T_s - T_0$ (T_0 は周囲の温度) が既知であるから, 熱源位置での浮力と慣性力の釣り合いから

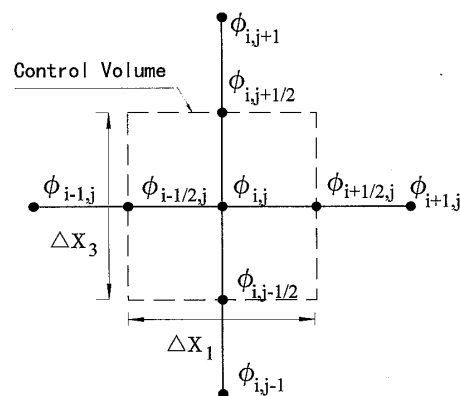


Fig. 1 Control volume specification

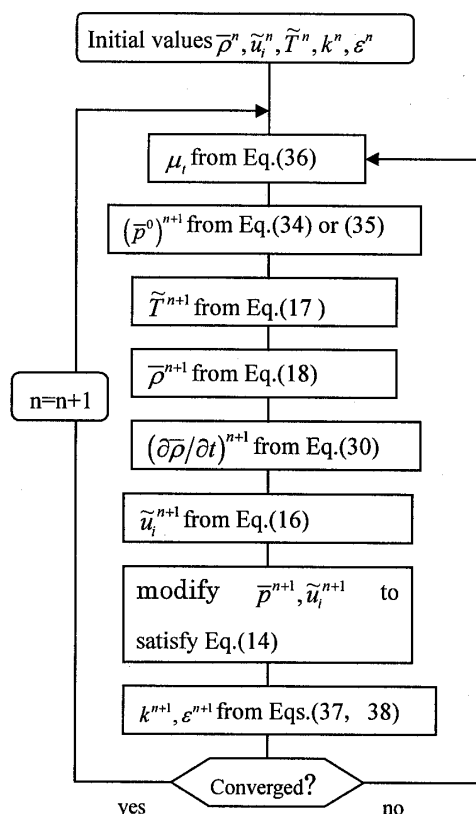


Fig. 2 Flow chart of the calculation

$\rho g \beta \Delta T \propto \rho U_0^2 / L_0$ の関係があるので, 参考速度には次式を用いる。

$$U_0 = \sqrt{g \beta L_0 \Delta T} \quad (47)$$

ここに, $\beta = 1/T_0$ は体積膨張係数である。 L_0 については, 閉鎖領域の場合では領域の高さを用いるが, 開放領域では便利のため参考時間を $t_0 = 1$ として参考長さを $L_0 = U_0 t_0$ とする。

2) 熱源の発熱量 Q_L が既知の場合

文献⁹⁾ により, 乱流プルームの熱源上の平均流速と温度の分布は次式で表せる。

$$u_3^* \propto \left(\frac{Q_L g \beta}{c_p \rho} \right)^{\frac{1}{3}} \quad T^* \propto \frac{Q_L}{\rho c_p U_0 x_3^*} \quad (48)$$

ここに、 Q_L (W/m) は熱線の発熱量である。したがって参考速度と参考温度は以下の式で定義することができる。

$$U_0 = \left(\frac{Q_L g \beta}{\rho_0 c_p} \right)^{\frac{1}{3}} \quad \Delta T = \frac{Q_L}{\rho_0 U_0 c_p L_s} \quad (49)$$

ここに、 L_s は計算での熱源の幅であり、 L_0 と t_0 は 1) 熱源温度既知の場合と同じにとる。

4. 解析結果

数値解析法の妥当性を調べるために、既に理論解析および実験的研究が幾つか発表されている、線熱源上のサーマルプルームについて計算する。既存の結果と照査を行うために、Fig. 3 に示すような開放領域を計算対象とし、熱線の発熱量 Q_L の多少により層流上昇流または乱流上昇流となる 2 ケースについて計算を行う。

計算に使用する諸定数は以下のとおりとし、環境温度は $T_0 = 300$ K とする。

$$\begin{aligned} g &= 9.8 \text{ m/s}^2, \quad \beta = 3.33 \times 10^{-3} \text{ K}^{-1}, \\ \nu &= 1.145 \times 10^{-6} \text{ m}^2/\text{s}, \quad c_p = 1004.85 \text{ W} \cdot \text{s}/\text{kg} \cdot \text{K}, \\ \rho &= 1.1609 \text{ kg/m}^3, \quad \text{Pr} = 0.7 \end{aligned}$$

熱線の発熱量については、層流上昇流の場合 $Q = 10$ W/m, 乱流上昇流の場合 $Q = 10^4$ W/m とする。また、最小メッシュサイズは熱源の近傍の 0.02 とし、熱源は 4 つのメッシュで与える。

計算はほぼ定常状態に成るまで続け、いずれの場合についても低マッハ数近似モデル (LMN Model) と Boussinesq 近似モデル (Boussinesq Model) を用いて計算した。低マッハ数近似により計算した層流および乱流上昇流の流速ベクトルと温度分布を Fig. 4 に示す。

4.1 層流上昇気流

熱線の発熱量が $Q_L = 10$ W/m の場合における各参考量は $U_0 = 0.0654$ m/s, $t_0 = 1$ s, $L_0 = 0.0654$ m になる。

Fujii の理論解析の結果¹⁰⁾ により、上昇気流の中心軸 (0, x_3^*) における流速および温度の分布は次式で表されるが、これと計算結果を比較する。

$$u_3^* = f_1'(0) \left(\frac{g\beta}{\nu_0^2 c_p \rho_0} \right)^{\frac{2}{5}} x_3^{*\frac{1}{5}} Q_L^{\frac{2}{5}} \quad (50)$$

$$T^* - T_0 = h_1(0) (g\beta \nu_0^2 c_p^4 \rho_0^4)^{-\frac{1}{5}} x_3^{*\frac{3}{5}} Q_L^{\frac{4}{5}} \quad (51)$$

ここで、層流では $\text{Pr} = 0.7$ になるから、 $f_1'(0) = 0.808$, $h_1(0) = 0.373$ となり、諸定数を代入して、さらに無次元化した式は次のようになる。

$$u_3 = 1.85 x_3^{\frac{1}{5}} \quad (52)$$

$$T - 1 = 6.08 \times 10^{-3} x_3^{\frac{3}{5}} \quad (53)$$

両モデルで計算した上昇気流の中心軸における流速および温度の分布を Fig. 5 と Fig. 6 に示す。これらの結果では、熱源の熱量が小さい場合には密度変化も小さいことから、両モデルの計算結果はほぼ一致している。したがって、このような層流上昇流の場合には、圧縮性を考慮する

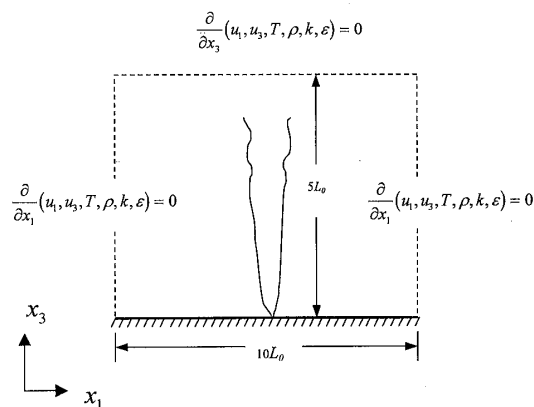


Fig. 3 Geometry and boundary condition for calculation

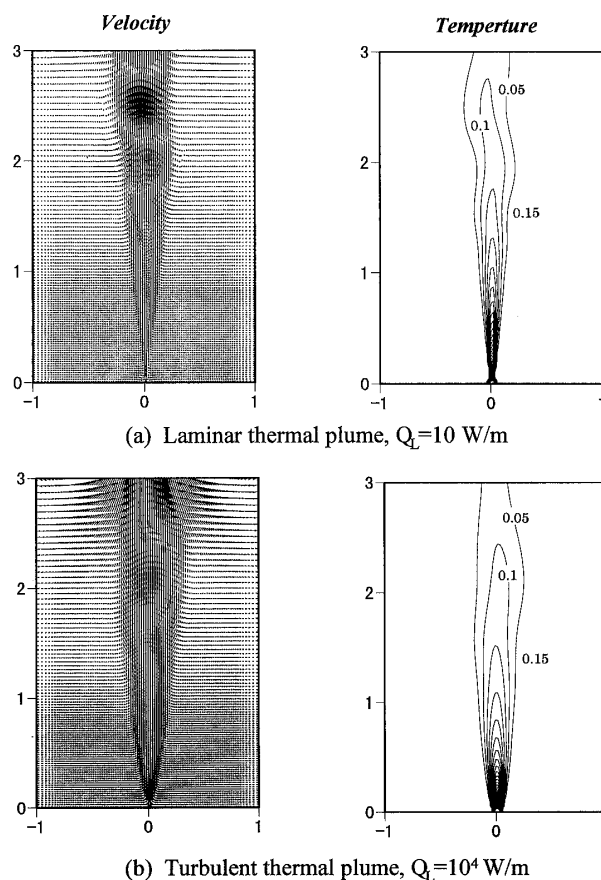


Fig. 4 Calculated thermal plume by LMN model

必要はなく、Boussinesq 近似で十分である。

4.2 乱流上昇気流

熱線の発熱量が $Q_L = 10^4$ W/m の場合の各参考量は $U_0 = 0.6543$ m/s, $T_0 = 1$ s, $L_0 = 0.6543$ m となる。

横井の実験による研究¹¹⁾ によれば、線熱源上方の任意点 (x_1^* , x_3^*) における温度と上昇速度は次式で表される。

$$\begin{aligned} u_3^* &= 1.040 \left(\frac{Q_L g \beta}{c_p \rho_0} \right)^{\frac{1}{3}} c^{-\frac{2}{9}} \left\{ 1 + 0.442 \left(\frac{x_1^*}{x_3^* c^{\frac{2}{3}}} \right)^{\frac{3}{2}} \right. \\ &\quad \left. + 0.0474 \left(\frac{x_1^*}{x_3^* c^{\frac{2}{3}}} \right)^3 \right\} \end{aligned}$$

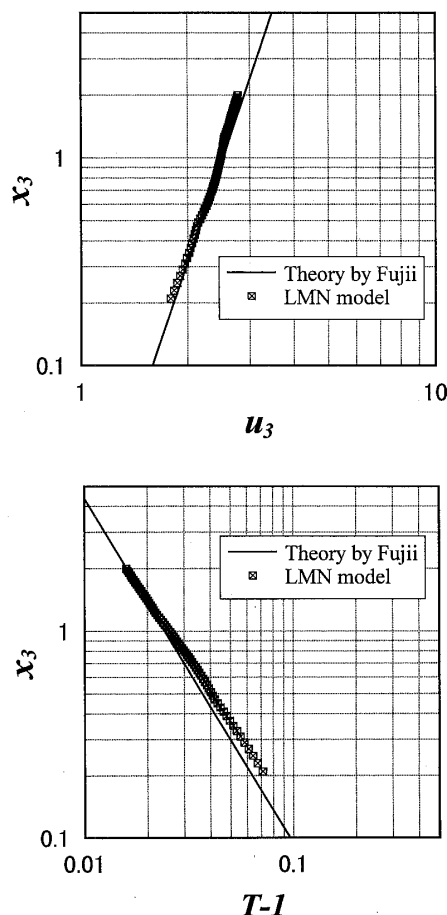


Fig. 5 Distribution of vertical velocity and temperature against the distance from the heat source, $Q_L=10$ W/m, LMN model

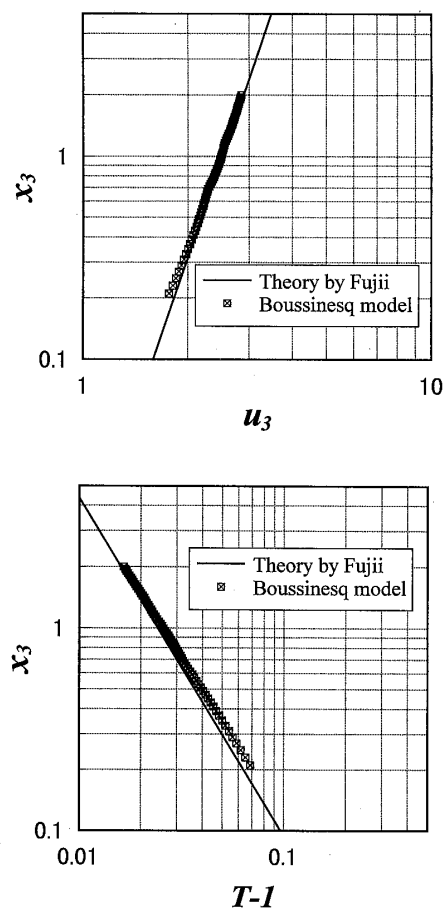


Fig. 6 Distribution of vertical velocity and temperature against the distance from the heat source, $Q_L=10$ W/m, Boussinesq model

$$-0.0085\left(\frac{x_1^*}{x_3^* c^{2/3}}\right)^{\frac{9}{2}}\left\{\exp\left\{-1.109\left(\frac{x_1^*}{x_3^* c^{2/3}}\right)^{\frac{3}{2}}\right\}\right. \quad (54)$$

$$T^*-T_0=0.663\left(\frac{Q_L^2}{c_p^2 \rho_0^2 g \beta}\right)^{\frac{1}{3}} c^{-\frac{4}{9}} x_3^{*-1}\left\{1\right. \\ +0.529\left(\frac{x_1^*}{x_3^* c^{2/3}}\right)^{\frac{3}{2}}+0.0676\left(\frac{x_1^*}{x_3^* c^{2/3}}\right)^3 \\ \left.-0.0323\left(\frac{x_1^*}{x_3^* c^{2/3}}\right)^{\frac{9}{2}}\right\}\exp\left\{-1.109\left(\frac{x_1^*}{x_3^* c^{2/3}}\right)^{\frac{3}{2}}\right\} \quad (55)$$

ここに、 c は乱れの強さを表すパラメータで、区画火災初期の燃焼などでは $c^{\frac{2}{3}} \approx 0.13$ 程度になる。これらの式に諸定数を代入し、さらに無次元化して得られた熱源真上 ($x_1=0$) の流速および温度は次のようになる。

$$u_1=2.05 \quad (56)$$

$$T-1=0.172 x_3^{-1} \quad (57)$$

両モデルにより計算した上昇気流の中心軸における流速および温度の分布をFig. 7とFig. 8に示す。これらの結果では、熱源から離れた所の計算結果は両モデルとも比較的実験値と一致するのに対し、熱源の近傍ではその差異が大きくなり、低マッハ数モデルによる結果のほうが実験デ

ータに良く合っている。

Fig. 9に高さ $x_3=1.0$ における鉛直方向の流速および温度の水平分布を示すが、Boussinesq近似の結果では上昇気流の拡がり小さく、低マッハ数モデルによる結果の方が実験データに良く一致している。この傾向はFig. 10に示す高さ $x_3=0.5$ における流速と温度の分布でさらに強くなる。これらの結果から、計算例程度に熱源熱量が大きい場合には密度変化の影響も大きいことから、Boussinesq近似による解析では無理であり、圧縮性の考慮した解析が必要であることが分かる。

5. 結 論

温度差の大きい場の圧縮性流れを考慮した乱流熱対流を解析するために、低マッハ数近似に基づく数値計算法を提案し、この計算法を高温線熱源上のサーマル・ブルーム現象に適用した。この結果とBoussinesq近似による計算値を既存の実験値および理論値と比較して、以下の結論を得た。

- 1) 熱源の発熱量が小さい場合には、低マッハ数近似とBoussinesq近似による計算結果はほぼ一致しており、

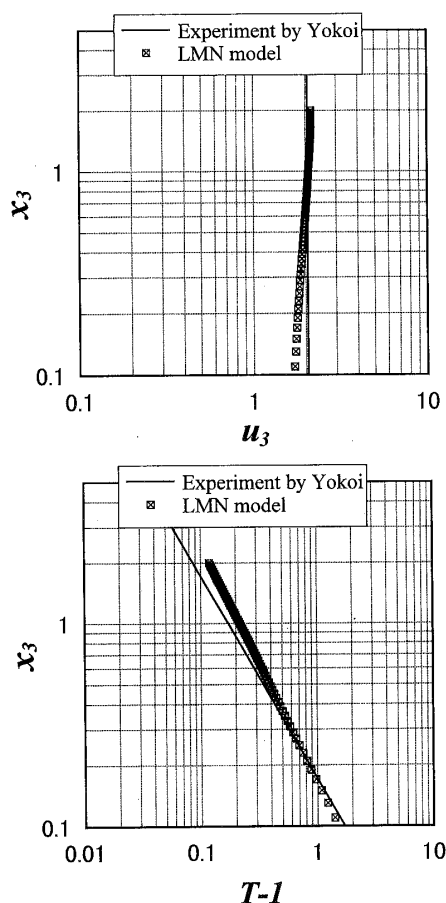


Fig. 7 Distribution of vertical velocity and temperature against the distance from the heat source, $Q_L=10^4$ W/m, LMN model

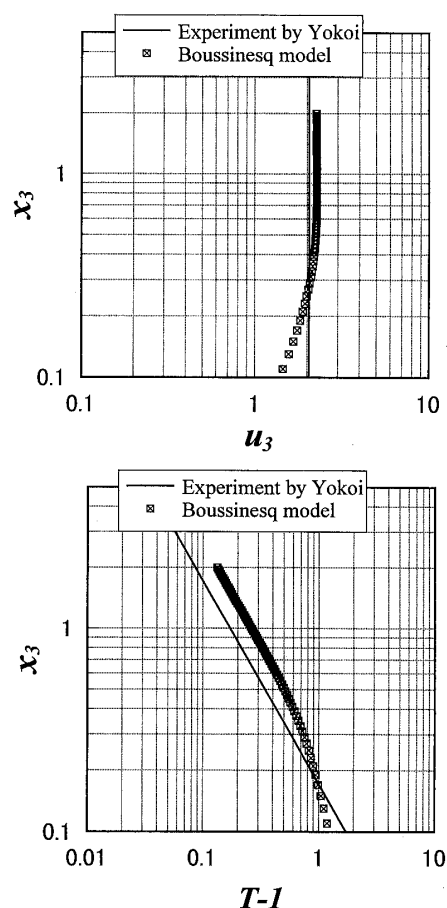


Fig. 8 Distribution of vertical velocity and temperature against the distance from the heat source, $Q_L=10^4$ W/m, Boussinesq model

理論解析解にも合っている。したがって、この場合には Boussinesq 近似モデルにより計算で十分である。

- 2) 熱源の発熱量が大きい場合には、上昇流は密度変化が大きい乱流状態になることから、低マッハ数近似モデルの解は Boussinesq 近似モデルより実験データをよく再現している。この場合の解析には圧縮性を考慮した低マッハ数近似モデルによる計算が必要である。

なお、この低マッハ数近似モデルは高温場のみならず、深冷ガス輸送問題などの低温場の乱流熱対流現象の解析にも適用可能である。

参考文献

- 1) D. D. Gray and A. Giorgini: The Validity of the Boussinesq Approximation for Liquids and Gases, Int. J. Heat Mass Transfer, Vol. 19, pp. 545-551 (1976).
- 2) J. Guerra and B. Gustafsson: A Numerical Method for Incompressible and Compressible Flow Problems with Smooth Solutions, J. Comput. Phys., V. 63, pp. 377, 1986
- 3) P. A. McMurtry, W. H. Jou, J. J. Riley and R. W.

Metcalf: Direct Numerical Simulations of a Reacting Mixing Layer with Chemical Heat Release, AIAA Journal, Vol. 24, No. 6, pp. 962-970 (1986).

- 4) R. G. Rehm and H. R. Baum: The Equation of Motion for Thermally Driven, Buoyant Flows, J. Research of the National Bureau of Standards, V. 83, No. 3, pp. 297-308, 1978
- 5) Y. Horibata: Numerical Simulation of a Low-Mach-Number Flow with a Large Temperature Variation, Computers Fluids, V. 21, No. 2, pp. 185-200, 1992
- 6) 村上周三, 加藤信介, 義江龍一郎: 高温鉛直加熱壁近傍の自然対流に関する乱流解析, 日本建築学会計画系論文集, 第 472 号, pp. 45-54, 1995
- 7) W. P. Jones and B. E. Launder: The Prediction of Laminarization with a Two-Equation Model of Turbulence, Int. J. Heat Mass Transfer, Vol. 15, pp. 301-314, 1972.
- 8) S. V. Patankar: Numerical Heat Transfer and Fluid Flow, McGraw-Hill, New York, 1980
- 9) J. Lumley and H. Tennekes, A First Course in Turbulence, MIT Press, Cambridge, MA, 1973.

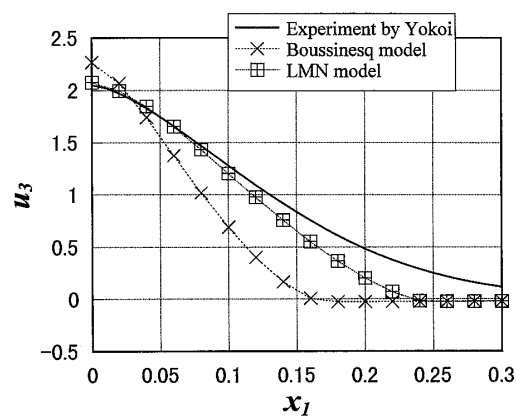


Fig. 9 Distribution of vertical velocity and temperature at $z=1.0$, $Q_L=10^4$ W/m

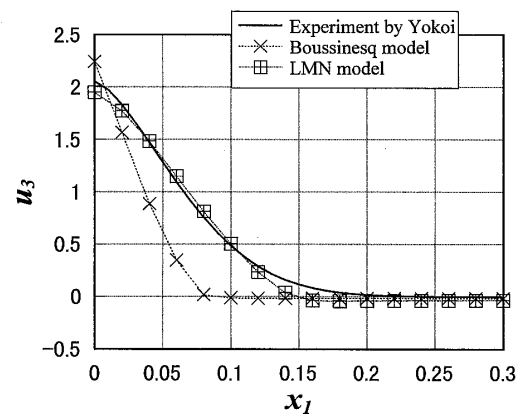


Fig. 10 Distribution of vertical velocity and temperature at $z=0.5$, $Q_L=10^4$ W/m

- 10) T. Fujii: Theory of the Steady Laminar Natural Convection Above a Horizontal Line Heat Source and a Point Heat Source, Int. J. Heat

Mass Transfer, Vol. 6, pp. 597-606, 1963.

- 11) 横井鎮男: 無限長線熱源からの上昇気流, 日本火災学会論文集, Vol. 8, No. 1, pp. 16-20, 1961.