

金属引張試験片の塑性不安定メカニズムに関する研究

正員 岡 澤 重 信* 正員 藤久保 昌 彦*

Plastic Instability Mechanism in Tensile Metal Specimens

by Shigenobu Okazawa, *Member* Masahiko Fujikubo, *Member*

Summary

The plastic instability mechanism in tensile metal specimens, which influences mechanical properties of structural members, is presented. A material instability criterion for a finite deformation problem and a structural instability (bifurcation) criterion, which is identical with Hill's criterion, are formulated. The present criteria are examined on two-dimensional and three-dimensional plastic instability analyses. It has been proved that occurrence of a peak point and necking are due to material and structural instability, respectively.

1. 結 言

構造物を構成する金属材料の強度や延性などの機械的性質は、一般に引張試験により評価される。この引張試験において弾性域を越えて塑性域に達した金属材料は、ひずみ硬化によってさらなる荷重の増加に耐え得る。そして荷重極大点が発生した後に、金属試験片の幅方向になだらかにくびれ（拡散くびれ）が発生する。拡散くびれが発生した後は、引張試験において作用する荷重は減少し続け、やがてくびれ領域にひずみが集中する局所化により試験片は最終的な破断に至る。このような金属引張試験片で観察される均一変形から破断までの一連の現象は、金属材料の種類によらず共通して見られる現象であり塑性不安定現象として広く知られている。

金属引張試験片において発生する塑性不安定現象は、その材料の機械的性質を評価する際の優位な影響因子であり¹⁾、なおかつその金属材料から構成される構造物の強度や延性ひいては耐衝突性能などにも多大な影響を及ぼすと考えられる。よって金属引張試験片の塑性不安定現象を詳細に把握することは、工学的に非常に重要な課題である。

以上のような背景から、非線形有限要素法の理論や計算機性能の爆発的な進歩の後押しもあって、最近では金属引張試験片の塑性不安定現象の計算機シミュレーションが精力的になされている^{2~4)}。しかし、金属引張試験片における荷重極大点とその直後のくびれの発生²⁾の不安定現象の違いを、有限要素法に対応させて理論的に明確にし、均一変形からどのような不安定現象を経て破断まで至るかという体系的なメカニズムについて説明されたものは筆者らの知る限りでは存在しない。本研究では、金属引張試験片における荷重極大点とくびれの発生の不安定条件を有限要素法に対応させて明らかにすると共に、有限要素解析を通してその正当性を検証する。

* 広島大学大学院工学研究科

原稿受理 平成 14 年 7 月 10 日

秋季講演会において講演 平成 14 年 11 月 14, 15 日

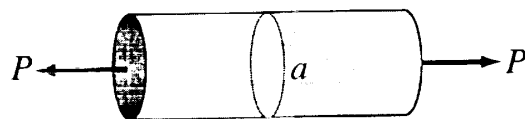


Fig. 1 One-dimensional member in tension

2. 塑性不安定理論

金属引張試験片の塑性不安定現象に対して、はじめて理論的な解釈を与えた Swift⁵⁾ による塑性不安定理論について概説した後に、 n 乗硬化則材料をその理論に適用する。

2.1 Swift の塑性不安定理論

Fig.1 のような、引張力が作用してつり合い状態にある一軸部材を考える。部材内の応力 (真応力) を σ 、断面積を a 、そして作用荷重 P とすると、次式のようなつり合い式になる。

$$\sigma a = P \quad (1)$$

作用荷重 P が増加するにつれて部材は伸び、それに伴って部材の断面積 a は減少する。また金属材料は、塑性域でのひずみ硬化域においてはひずみが増加するにつれてその硬化率は低下してくる。そして断面積 a の減少に真応力 σ の増加が追いつけなくなると、たとえ硬化型の応力-ひずみ関係であったとしても、式 (1) の左辺が減少を始める。それに伴って、つり合い状態を保つために式 (1) の右辺の作用荷重 P も減少する。

つまり真応力が増加し続けている状態において、金属引張試験片がくびれる前の均一変形状態でさえも、荷重極大点が発生し荷重が減少する可能性がある。この現象は断面積の変化を考慮に入れることによりはじめて説明できるものであり、決して材料的な軟化挙動ではない。このような荷重の減少を有限要素解析において再現するためには、断面積の変化を考慮するための有限変形の取り扱いが必要不可欠である。

2.2 n 乗硬化則材料の荷重極大点

Fig.2 は、体積一定を仮定した正方形断面の一軸部材に、引張荷重が作用して変形した様子を示している。Cauchy 応力 (真応力) テンソルを σ 、第1 Piola-Kirchhoff 応力 (公称応力) テンソルを Π 、変形勾配テンソルを F 、そして体積変化率を $J = \det F$ とすると、それらは次式のような関係となる。

$$\sigma = \frac{1}{J} F \cdot \Pi \quad (2)$$

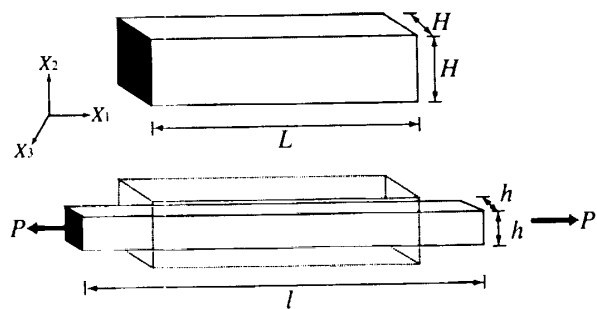


Fig. 2 Deformation of one-dimensional member in tension

体積一定を仮定しているため、式 (2) の J は 1 となる。また Fig.2 に示されているような、直交デカルト座標系における σ 、 Π 、 F の成分は、それぞれ以下のようになる。

$$\sigma = \begin{bmatrix} \frac{P}{h^2} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$$F = \begin{bmatrix} \frac{l}{L} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{h}{H} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{h}{H} \end{bmatrix}$$

$$\Pi = \begin{bmatrix} \frac{P}{H^2} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

上記の σ 、 Π 、 F の成分を式 (2) に代入して、変形前の部材の断面積を $A = H^2$ 、変形後のそれを $a = h^2$ とした場合には、以下のような最初に仮定した体積一定を示す式が導出される。

$$al = AL \quad (3)$$

ここで、一軸部材の公称ひずみ ϵ_n と真ひずみ ϵ_t は、

$$\epsilon_n = \frac{l - L}{L} \quad (4)$$

$$\epsilon_t = \ln(1 + \epsilon_n) \quad (5)$$

となり、式 (3)、(5) より以下の関係が導かれる。

$$a = Ae^{-\epsilon_t} \quad (6)$$

今、一軸部材が次のようにつり合っている状態だとする。

$$\sigma = \frac{P}{a} = \frac{P}{A} e^{\epsilon_t} \quad (7)$$

以下のような n 乗硬化則材料を考える。ただし k は定数である。

$$\sigma = k\epsilon_t^n \quad (8)$$

あるつり合い状態における、加工硬化率と相当応力変化率はそれぞれ式 (8), (7) の右辺の物質時間導関数¹⁾ によって求められる。

$$\dot{\sigma} = kn\epsilon_t^{n-1}\dot{\epsilon}_t = \frac{n\sigma}{\epsilon_t}\dot{\epsilon}_t \quad (9)$$

$$\left(\frac{P}{A}e^{\epsilon_t}\right) = \left(\frac{P}{A}e^{\epsilon_t}\right)\dot{\epsilon}_t = \sigma\dot{\epsilon}_t \quad (10)$$

金属引張試験片において、加工硬化率が相当応力増分率に追いつかなくなった時点 (加工硬化率 = 相当応力増加率) で作用する荷重は減少し始める⁶⁾。よってこの場合の不安定条件は、

$$n = \epsilon_t \quad (11)$$

であり、真ひずみ ϵ_t が n になった時点で均一変形のまま荷重極大点が発生する。

3. 古典的材料不安定理論

前節では、一軸部材を例に真応力が増加している状況でかつ部材がくびれる前の均一状態でも荷重が減少し得ることを示した。ここでは、より一般性のある古典的材料不安定理論によりそれを議論する。

3.1 微小変形状態における材料不安定理論

材料の安定性に関する古典的理論⁷⁾ では、その材料が安定であるための条件は、微小ひずみテンソル ϵ と Cauchy 応力テンソル σ のそれぞれの速度の内積が正であるとされている。

$$\dot{\epsilon} : \dot{\sigma} > 0 \quad (12)$$

ここで、Cauchy 応力速度テンソル $\dot{\sigma}$ と微小ひずみ速度テンソル $\dot{\epsilon}$ を関連付ける 4 階の構成テンソル C を用いた場合の構成関係

$$\dot{\sigma} = C : \dot{\epsilon} \quad (13)$$

を不等式 (12) に代入すると、安定条件は以下のようになる。

$$\dot{\epsilon} : (C : \dot{\epsilon}) > 0 \quad (14)$$

古典的理論における安定条件式 (14) は、数学的には C の正定値性を意味し、それが不正定値になったときにその材料が不安定状態になると考えることができる。よって不安定条件は次のようになる。

$$\det C = 0 \quad (15)$$

3.2 有限変形状態における材料不安定理論

Fig.2 のような有限変形状態にも対応できるように、式 (12) の安定条件を拡張する。金属引張試験片の塑性不安定現象を取り扱うためには、有限変形状態での議論が必要不可欠であり、有限変形状態での安定条件の定式化はこれまでになされてきた¹²⁾⁹⁾。本研究における有限変形状態での安定条件の定式化は、既存理論と本質的に異なるものでなく、有限要素法への対応を明確にすることを目標とする。

有限要素法に対応させて有限変形状態の安定条件を考える際には、有限変形状態で用いられる仮想仕事の原理が、微小変形状態で用いられるそれと力学的に等価であるのと同様に、有限変形状態における安定条件も微小変形状態におけるものと力学的に等価でなくてはならない⁸⁾。そこで、有限変形状態のための構成方程式の取り扱いが楽になるように、安定条件 (12) と等価な他のひずみ速度テンソルと応力速度テンソルの組み合わせ (これを共役な関係という) を考える。

今、 $\mathbf{X}, \mathbf{x}$ を変形前後における物質点の位置ベクトル、 $\mathbf{u}$ を変位ベクトル、そして $\dot{\mathbf{u}}$ を速度ベクトルとする。有限変形問題の立場からすると、安定条件 (12) で用いられる微小ひずみテンソル ϵ は、Almansi ひずみテンソル $\mathbf{A}$ の線形部分 $\mathbf{A}_{(L)}$ と考えることができる。

$$\epsilon = \mathbf{A}_{(L)} = \frac{1}{2}\{\mathbf{u} \otimes \nabla_{\mathbf{x}} + (\mathbf{u} \otimes \nabla_{\mathbf{x}})^T\} \quad (16)$$

安定条件 (12) においては、Cauchy 応力テンソルと Almansi ひずみテンソルの線形部分 $\mathbf{A}_{(L)}$ は互いに共役な関係にある。ここで有限変形問題へ拡張するために共役な関係として、文献⁹⁾ と同様な第 1 Piola-Kirchhoff 応力テンソル $\mathbf{I}$ を用いると、安定条件 (12) と等価な条件は以下のようになる。

$$(\dot{\mathbf{u}} \otimes \nabla_{\mathbf{x}}) : \dot{\sigma} = \frac{1}{J}(\dot{\mathbf{u}} \otimes \nabla_{\mathbf{x}}) : \dot{\mathbf{I}}^T > 0 \quad (17)$$

次に、剛体回転に依存しない第 2 Piola-Kirchhoff 応力テンソル $\mathbf{S}$ を用いるために、安定条件 (17) を以下の

1 時間導関数には物質時間導関数と空間時間導関数があるが、本論文では物質時間導関数しか用いない。以後、物質時間導関数には上付きの $\cdot$ を付けて単に速度と呼ぶことにする。

ように書き換える.

$$\begin{aligned} & \frac{1}{J}(\dot{\mathbf{u}} \otimes \nabla_{\mathbf{x}}) : \dot{\mathbf{H}}^T \\ &= \frac{1}{J}(\dot{\mathbf{u}} \otimes \nabla_{\mathbf{x}}) : (\dot{\mathbf{S}} \cdot \mathbf{F}^T + \mathbf{S} \cdot \dot{\mathbf{F}}^T)^T \quad (18) \\ &= \frac{1}{J}(\dot{\mathbf{S}} : \dot{\mathbf{E}} + \mathbf{S} : (\dot{\mathbf{F}}^T \cdot \dot{\mathbf{F}})) > 0 \end{aligned}$$

ただし, 以下の関係を用いている.

$$\mathbf{\Pi} = \mathbf{S} \cdot \mathbf{F}^T \quad (19)$$

また $\mathbf{E}$ は Green Lagrange ひずみテンソルであり, その速度 $\dot{\mathbf{E}}$ は以下ようになる.

$$\begin{aligned} \dot{\mathbf{E}} = & \frac{1}{2}\{(\dot{\mathbf{u}} \otimes \nabla_{\mathbf{x}}) + (\dot{\mathbf{u}} \otimes \nabla_{\mathbf{x}})^T \\ & + (\dot{\mathbf{u}} \otimes \nabla_{\mathbf{x}})^T \cdot (\dot{\mathbf{u}} \otimes \nabla_{\mathbf{x}})\} \quad (20) \end{aligned}$$

有限変形解析に有効とみなされている updated Lagrangian 法では, 基準配置を現配置に一致させる. その場合には, 以下の関係が成り立つ.

$$J = 1 \quad (21)$$

$$\mathbf{F} = \mathbf{I} \quad (22)$$

$$\dot{\mathbf{E}} = \mathbf{F}^T \cdot \mathbf{D} \cdot \mathbf{F} = \mathbf{D} \quad (23)$$

$$\dot{\mathbf{F}} = \mathbf{L} \cdot \mathbf{F} = \mathbf{L} \quad (24)$$

$$\mathbf{S} = \boldsymbol{\sigma} \quad (25)$$

ここで $\mathbf{L}$ は以下のような速度勾配テンソルである.

$$\mathbf{L} = \dot{\mathbf{u}} \otimes \nabla_{\mathbf{x}} \quad (26)$$

また $\mathbf{D}$ はストレッチングテンソルで, $\mathbf{L}$ を加算分解した対称部分である.

$$\mathbf{D} = \frac{1}{2}(\mathbf{L} + \mathbf{L}^T) \quad (27)$$

式 (21)-(25) を考慮すると, 式 (18) は次のようになる.

$$\dot{\mathbf{S}} : \mathbf{D} + \boldsymbol{\sigma} : (\mathbf{L}^T \cdot \mathbf{L}) > 0 \quad (28)$$

また基準配置と現配置が一致した場合の $\dot{\mathbf{S}}$ は Truesdell の応力速度と呼ばれる.

有限変形問題における構成方程式について考える. 微小変形問題の構成方程式 (13) において, 微小ひずみテ

ンソル速度 $\dot{\mathbf{e}}$ は客観性のあるストレッチングテンソル $\mathbf{D}$ に, Cauchy 応力テンソル速度 $\dot{\boldsymbol{\sigma}}$ は客観応力速度に置き換えられるものとする. 客観応力速度については, その取り扱いが容易である Jaumann 速度 $\dot{\boldsymbol{\sigma}}^J$ を用いることにする. その場合の有限変形状態での構成方程式は以下のようになる.

$$\dot{\boldsymbol{\sigma}}^J = \mathbf{C} : \mathbf{D} \quad (29)$$

ストレッチングテンソル $\mathbf{D}$ は物質点の座標の関数であり, 物質点と共に移動する観測者から見たひずみテンソル速度の定義に一致する. Cauchy 応力の Jaumann 速度 $\dot{\boldsymbol{\sigma}}^J$ に関しても移動する観測者から見た応力速度という意味合いを持つ. つまり有限変形問題においては, 応力速度, ひずみ速度を両方とも客観性のあるものに置き換え, どれだけ物質がゆがんだとしても微小変形状態での弾塑性理論が成立すると考える. よって構成テンソル $\mathbf{C}$ は微小変形理論におけるものと同一である.

式 (28) 内の Truesdell の応力速度 $\dot{\mathbf{S}}$ に構成関係を代入することを考える. Truesdell の応力速度 $\dot{\mathbf{S}}$ と Cauchy 応力の Jaumann 速度 $\dot{\boldsymbol{\sigma}}^J$ の関係は以下のようである.

$$\dot{\mathbf{S}} = \dot{\boldsymbol{\sigma}}^J - \mathbf{D} \cdot \boldsymbol{\sigma} - \boldsymbol{\sigma} \cdot \mathbf{D} + (\text{tr} \mathbf{D}) \boldsymbol{\sigma} \quad (30)$$

式 (29),(30) より, 例え $\mathbf{C}$ が 4 階のテンソルとして対称であったとしても, Truesdell の応力速度 $\dot{\mathbf{S}}$ とストレッチングテンソル $\mathbf{D}$ を関連づける 4 階の構成テンソルは非対称になる. 非対称の構成テンソルは, その正定値性を議論する際に非常に扱いにくい. そこで, Cauchy 応力の代わりに相対 Kirchhoff 応力 $\hat{\boldsymbol{\sigma}}$ の Jaumann 速度 $\dot{\hat{\boldsymbol{\sigma}}}^J$ を用いて以下のように有限変形状態の構成方程式を定義し直す.

$$\dot{\hat{\boldsymbol{\sigma}}}^J = \mathbf{C} : \mathbf{D} \quad (31)$$

ここで Cauchy 応力の Jaumann 速度 $\dot{\boldsymbol{\sigma}}^J$ と相対 Kirchhoff 応力の Jaumann 速度 $\dot{\hat{\boldsymbol{\sigma}}}^J$ は以下の関係がある.

$$\dot{\hat{\boldsymbol{\sigma}}}^J = \dot{\boldsymbol{\sigma}}^J + (\text{tr} \mathbf{D}) \boldsymbol{\sigma} \quad (32)$$

$\dot{\boldsymbol{\sigma}}^J$ と $\dot{\hat{\boldsymbol{\sigma}}}^J$ の差異は $(\text{tr} \mathbf{D}) \boldsymbol{\sigma}$ であり, 塑性変形における非圧縮性と弾性微小ひずみの仮定から無視できるものと考えられる.

式 (30),(32) より, Truesdell の応力速度 $\dot{\mathbf{S}}$ と相対 Kirchhoff 応力の Jaumann 速度 $\dot{\hat{\boldsymbol{\sigma}}}^J$ の関係は次のようになる.

$$\dot{\mathbf{S}} = \dot{\hat{\boldsymbol{\sigma}}}^J - \mathbf{D} \cdot \boldsymbol{\sigma} - \boldsymbol{\sigma} \cdot \mathbf{D} \quad (33)$$

式 (33) に有限変形状態の構成方程式 (31) を代入して整理すると、

$$\dot{\mathbf{S}} = \tilde{\mathbf{C}} : \mathbf{D} \quad (34)$$

ここで $\tilde{\mathbf{C}}$ は Truesdell の応力速度 $\dot{\mathbf{S}}$ とストレッチングテンソル $\mathbf{D}$ を関連付ける 4 階の構成テンソルであり、次のようにインデックス表示される。

$$\begin{aligned} \tilde{C}_{ijkl} = & C_{ijkl} - \frac{1}{2}(\delta_{il}\sigma_{kj} + \delta_{ik}\sigma_{lj}) \\ & - \frac{1}{2}(\sigma_{ik}\delta_{jl} + \sigma_{il}\delta_{jk}) \quad (35) \end{aligned}$$

δ_{ij} はクロネッカーのデルタ記号である。 $\tilde{C}_{ijkl}$ は $i \leftrightarrow j$, $k \leftrightarrow l$ または、 $i, j \leftrightarrow k, l$ の可変性があるので、4 階のテンソルとして対称となる。

式 (34) を安定条件式 (28) に代入すると、次のようになる。

$$\begin{aligned} \text{式 (28) の左辺} &= \mathbf{D} : (\tilde{\mathbf{C}} : \mathbf{D}) + \boldsymbol{\sigma} : (\mathbf{L}^T : \mathbf{L}) \\ &= \{\dot{u}\}^T [k] \{\dot{u}\} > 0 \quad (36) \end{aligned}$$

ただし

$$[k] = [k^m] + [k^g] \quad (37)$$

$$[k^m] = [b^m]^T [\tilde{\mathbf{C}}] [b^m] \quad (38)$$

$$[k^g] = [b^g]^T [\boldsymbol{\sigma}] [b^g] \quad (39)$$

ここで、 b^m , b^g は、

$$\mathbf{D} = b^m \cdot \dot{\mathbf{u}} \quad (40)$$

$$\mathbf{L} = b^g \cdot \dot{\mathbf{u}} \quad (41)$$

を満たす 3 階のテンソルであり、 $[b^m]$, $[b^g]$ はそれらの適当なマトリクス表示である。また、 $[\tilde{\mathbf{C}}]$, $[\boldsymbol{\sigma}]$ は、 $\tilde{\mathbf{C}}$, $\boldsymbol{\sigma}$ の適当なマトリクス表示である。

式 (36) 中の $[k]$ は updated Lagrangian 法による有限要素法の物質点レベルでの接線剛性に対応する。式 (36) の安定条件は $[k]$ の正定値性を示しており、 $[k]$ の行列式がゼロとなることがこの場合の不安定条件である。つまり、この不安定条件は局所的なものであり、有限要素解析においてはアセンブルする前の要素レベルでの接線剛性マトリクスの行列式がゼロになる点として金属引張試験片の荷重極大点を見つけることが可能である。

4. 構造不安定条件

これまで論じてきた Swift の塑性不安定理論、古典的材料不安定理論は共に局所的な材料不安定性に対するものである。よって引張力下での金属材料の荷重極大点の発生の情報は反映されても、その直後に発生するくびれの発生を説明することはできない。くびれ発生の理論的な解釈を得るためには、大域的な構造不安定の扱いが必要不可欠である。

そこで、くびれを構造不安定の一種である分岐挙動として捉えた上で、その不安定現象を解明する研究が行われるようになった²⁾¹⁰⁾。つまり荷重極大点後のつり合い経路においても、主経路においては材料は均一変形のまま伸び続け、荷重極大点直後に発生する分岐点から分岐経路に移行することによってくびれが始まると解釈するものである。材料不安定問題から構造不安定問題の橋渡し役を担うのが、Hill の分岐条件¹¹⁾である。これは材料レベルでの不安定性の議論を、対象とする構造全体の体積で積分したものである。そして有限変形状態へと対応できるように Hill の分岐条件の拡張もなされている¹²⁾¹⁶⁾¹⁷⁾。

ここでは、弾塑性分岐条件としてすでに確立されている Hill の分岐条件と有限要素法における通常分岐条件との等価性について確認する。

4.1 Hill の分岐条件

Hill による分岐条件は以下のように示される¹¹⁾。

$$\int_v \dot{\boldsymbol{\epsilon}}^* : \dot{\boldsymbol{\sigma}}^* dv = 0 \quad (42)$$

ここで、 v は物体の体積である。また、右肩の $*$ は、分岐点における分岐方向と主経路方向の解の差を示す。ここで前節と全く同様な手法で、共役なひずみ速度テンソルと応力速度テンソルを用いてこの Hill の分岐条件を等価な形で有限変形問題へと拡張すると、基準配置を現配置に一致させる updated Lagrangian 法を考えた場合、式 (42) は以下ようになる。

$$\int_v (\dot{\mathbf{S}}^* : \mathbf{D}^* + \boldsymbol{\sigma} : (\mathbf{L}^{*T} \cdot \mathbf{L}^*)) dv = 0 \quad (43)$$

ここで Truesdell の応力速度 $\dot{\mathbf{S}}$ とストレッチングテンソル $\mathbf{D}$ を関連付ける構成方程式は式 (34) で表されるが、ここに Hill¹¹⁾ によって考案された線形比較体 (Comparison Solid) を導入する。これは、現配置で降伏している物質点においては、分岐経路方向にも主経路方向にも降伏が引き続き続行すると仮定し、除荷の可能性を一切排除した架空の材料である。

$$\dot{\mathbf{S}}^I = \tilde{\mathbf{C}}^c : \mathbf{D}^I \quad (44)$$

$$\dot{S}^{II} = \tilde{C}^c : D^{II} \quad (45)$$

右肩の I は主経路方向の解, II は分岐経路方向の解を意味する. $\tilde{C}^c$ は線形比較体を用いた場合の構成テンソルであり, 現配置で降伏している物質点に関しては, 次の段階の挙動によらず常に負荷となる. また現配置において弾性状態の場合には, 線形比較体を用いる必要はなく, 弾性構成式テンソルが用いられる.

式 (44), (45) より,

$$\dot{S}^* = \tilde{C}^c : D^* \quad (46)$$

式 (46) を式 (43) に代入して, 有限要素法と同様な手法で離散化すると, 次のようになる.

$$\{\dot{U}\}^T [K^c] \{\dot{U}\} = 0 \quad (47)$$

ただし,

$$[K^c] = [K^{mc}] + [K^g] \quad (48)$$

$$[K^{mc}] = \int_v [B^m]^T [\tilde{C}^c] [B^m] dv \quad (49)$$

$$[K^g] = \int_v [B^g]^T [\sigma] [B^g] dv \quad (50)$$

ここで, $\{\dot{U}\}$ は節点速度ベクトルである. また, $[B^m]$, $[B^g]$ はそれぞれ D , L と節点速度を要素ごとに関係づけるマトリクスである.

式 (47) において, $[K^c]$ を線形比較体を用いた架空の接線剛性マトリクスとした場合, Hill の分岐条件はこの $[K^c]$ が特異マトリクスであるという条件となる.

$$\det[K^c] = 0 \quad (51)$$

4.2 通常分岐条件との等価性

update Lagrangian 法を考えた場合の速度形の仮想仕事の原理は以下のように表される.

$$\int_v \dot{S} : \delta D dv + \int_v \sigma : \frac{1}{2} (L^T \cdot \delta L + \delta L^T \cdot L) dv = \delta \dot{R} \quad (52)$$

ここで δ は仮想仕事に起因する変分, δR は外力のなす仮想仕事である. ここでもやはり微小ひずみテンソルと Cauchy 応力テンソルによる微小変形問題のための速度形の仮想仕事の原理において, 共役なひずみテンソルと応力テンソルの組み合わせに置き換えることによって式

(52) を得ることができる. 式 (52) に式 (34) の構成関係を与えて, 左辺を有限要素法により離散化すると接線剛性マトリクス $[K]$ が得られる.

$$\text{式 (52) の左辺} = \{\delta \dot{U}\}^T [K] \{\dot{U}\} \quad (53)$$

ただし,

$$[K] = [K^m] + [K^g] \quad (54)$$

式 (54) 内の $[K^g]$ に関しては, 式 (50) と同一のものとなる. $[K^m]$ に関しては, 式 (49) の $[K^{mc}]$ との違いは構成マトリクスの部分だけの違いである.

$$[K^m] = \int_v [B^m]^T [\tilde{C}] [B^m] dv \quad (55)$$

有限要素法により離散化されたいわゆる真の接線剛性マトリクス $[K]$ の弾性分岐条件は以下ようになる.

$$\det[K] = 0 \quad (56)$$

線形比較体による架空の接線剛性マトリクス $[K^c]$ と有限要素法による真の接線剛性マトリクス $[K]$ の違いは, 4 階の構成テンソルの部分だけである. そして真の接線剛性マトリクス $[K]$ において, 降伏している積分点において除荷の可能性を排除すれば, $[K]$ と $[K^c]$ は全く同一のものとなる.

ゆえに, 通常の有限要素法の定式化を行い, それから得られる真の接線剛性マトリクス $[K]$ から除荷の可能性をすべて排除してその特異性を評価することによって, Hill の線形比較体を用いた場合と全く同様にして弾塑性分岐点の評価が可能である. またこのような通常分岐条件は, 暗黙のうちに Hill の分岐条件を包括している.

5. 有限要素解析結果

式 (53) の接線剛性マトリクス $[K]$ を用いて, 有限要素法による塑性不安定解析を行う. 構成方程式としては, von Mises の降伏関数による関連流れ則いわゆる J_2 流れ則を用いる. J_2 流れ則を用いることによって, 微小変形理論で用いられる 4 階の構成テンソル C は対称となる. さらに式 (35) で表される Truesdell の応力速度 $\dot{S}$ とストレッチングテンソル D を関連付ける構成テンソル $\tilde{C}$ も対称となる. その結果, 接線剛性マトリクス $[K]$ も対称となり, 有限要素解析での連立方程式の解法のみならず安定性の議論においても効率的となる.

ヤング係数 $E = 200(\text{GPa})$, ポアソン比 $\nu = 0.3$ とし, 塑性域においては, Cauchy 応力の相当応力 $\bar{\sigma}$ と

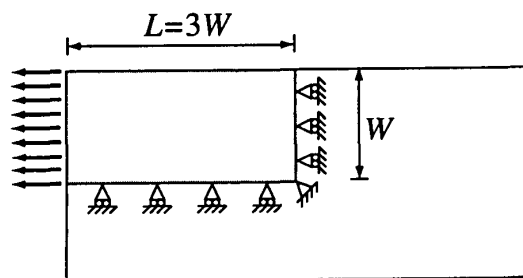


Fig. 3 Two-dimensional analysis model

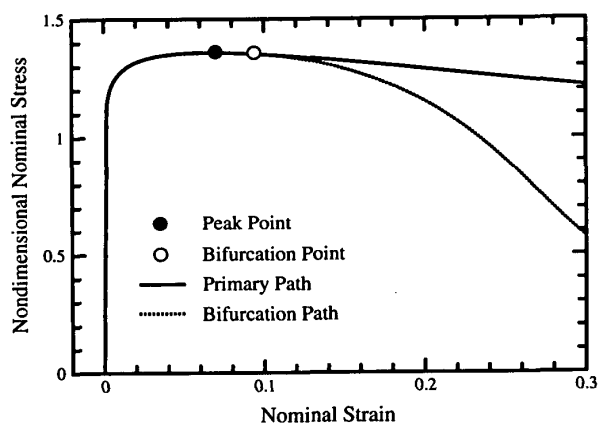


Fig. 4 Equilibrium path in plane strain condition

相当塑性ひずみ $\bar{\epsilon}^p$ で次式のようなべき乗硬化則を仮定する。

$$\bar{\sigma} = \sigma_y \left(1 + \frac{\bar{\epsilon}^p}{\epsilon_y} \right)^{0.0625} \quad (57)$$

ここで σ_y , ϵ_y はそれぞれ降伏応力, 降伏ひずみであり, 以下のように設定する。

$$\epsilon_y = \frac{\sigma_y}{E} = \frac{1}{500} \quad (58)$$

5.1 平面ひずみ解析

まずは平面ひずみ状態における 2 次元解析を行う。対称性により 1/4 部分のみを計算領域として, 引張荷重を与えても均一変形となる Fig.3 のような境界条件を用いる。有限要素は 4 節点のアイソパラメトリック要素で, volumetric ロッキングを避けるために選択型低減積分を用いた。

Fig.4 は, 有限要素解析によって得られたつり合い経路である。まず ● で示される荷重極大点が発生する。この荷重極大点においては, すべての要素接線剛性マトリクスの行列式がゼロとなる。つまり有限変形状態での古典的材料不安定条件を満たしていることになり, 局所的な材料不安定挙動として捉えることが可能である。また

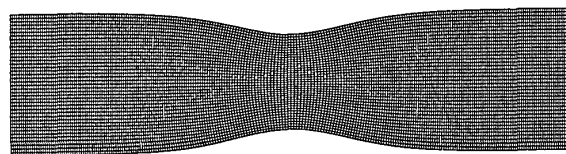


Fig. 5 Deformed configuration on bifurcation path in plane strain condition

当然の結果として全体接線剛性マトリクスの行列式もゼロとなる。荷重極大点以降のつり合い経路上では材料はすべて均一変形のまま伸び続け, それ以降の要素接線剛性マトリクスの行列式もゼロとはならない。しかし荷重極大点直後において, 全体接線剛性マトリクスの行列式がゼロになる点 ○ が発生する。つまり構造不安定現象としての分岐点が発生したことになる。そこでこの分岐点 ○ から分岐経路へ乗り移り, 分岐経路上の変形を追跡した。塑性不安定問題における分岐解析法の詳細を述べることは, 本論文の主旨ではないので割愛する。詳細は文献¹³⁾を参照されたい。

Fig.5 は, 分岐経路上での変形図である。分岐することによって鋼材の端部から除荷が始まり, その除荷領域は中央部へと広がる。そして除荷領域での変形の進行はほとんど停止し, 残った塑性部分のみに変形が局所化していく。結果として材料全体に渡る滑らかな拡散くびれが再現される。しかし, その後の破断に直接的に結びつくような不安定挙動は発生しない。

5.2 3次元解析

選択型低減積分を施した 8 節点のアイソパラメトリック要素を用いて 3 次元解析を行う。2 次元解析と同様に, 引張力を作用させても均一変形となるような境界条件を用いて, 端部の軸方向変位が一樣となるように拘束して荷重を作用させた。ただし 3 次元解析においては対称性から 1/8 部分のみを取り出して計算を行う。

ここでは幅と厚さの比 (以後, 幅厚比) が 20 の薄板試験片と 4 の厚板試験片を扱う。Fig.6 がつり合い経路であるが, いずれの 3 次元解析においても 2 次元解析と同様に, すべての要素接線剛性マトリクスの行列式がゼロとなる局所レベルでの材料不安定点である荷重極大点 ● が発生する。そしてその直後の全体接線剛性マトリクスの行列式しかゼロとまらない構造不安定点としての分岐点 ○ が発生する。荷重極大点後も主経路においては部材は均一変形のまま伸びつづける。分岐点における分岐モードはいずれも拡散くびれモードであり分岐経路へ乗り移ることによってまずは拡散くびれが始まる。そして, さらにその分岐経路を追跡し続けることによって変形状態は拡散くびれから終局的な変形パターンへと移行する。

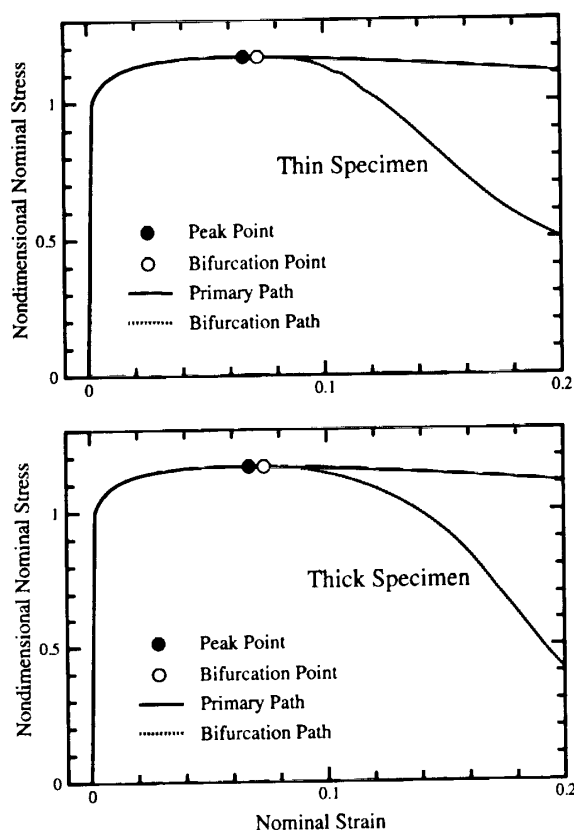


Fig. 6 Equilibrium paths obtained by three-dimensional analyses

Fig. 7 が分岐経路上での終局的な変形パターンである。幅厚比 20 の薄板試験片の場合には、×状のせん断型の局部くびれが発生している。ここでは分岐することによって除荷が端部から始まって中心部に進展した後に、今度は中心部から再び除荷が発生して塑性部分が挟まれる格好となる。そして残された×状の塑性部分のみに変形が集中して×状の局部くびれを形成する。×状の局部くびれ領域ではせん断変形が卓越しており、この局部くびれの発生がそのまません断的分離による破断と見なすことができる。一方、幅厚比 4 の厚板試験片においては、×状のせん断型の局部くびれの代わりに、試験片の長手方向とは垂直に板厚方向の狭い領域がくびれる局部くびれが発生する。分岐による端部からの除荷領域が試験片中央の塑性域を楕円上に包み込む。そして残された塑性域に変形が集中することによって集中的な局部くびれが発生する。なお、これらの 3 次元分岐解析による終局的な変形パターンと、引張実験における塑性不安定現象での破断直前の変形パターンとが極めてよく一致していることを確認している⁴⁾。

J_2 流れ則による 3 次元分岐解析を行うことによって、

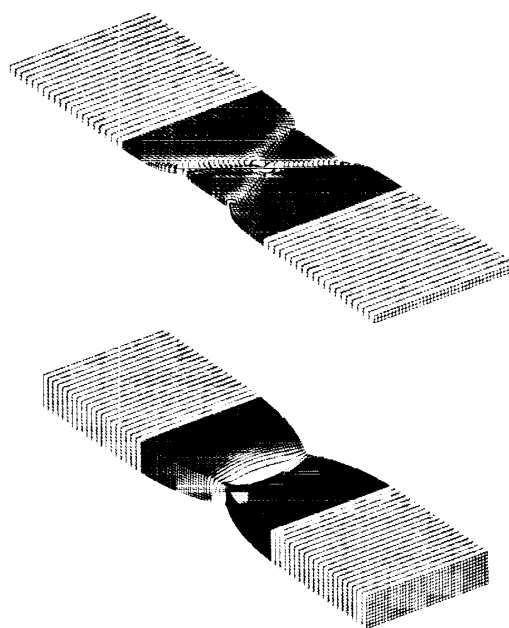


Fig. 7 Deformed configurations on bifurcation path obtained by three-dimensional analyses

均一変形から拡散くびれを経て破断直前までの局所化変形パターンを再現できる。局所化変形パターン以降のせん断分離による破断そのものを示すせん断帯を再現するためには、変形理論¹⁴⁾やコーナー理論¹⁵⁾などを用いる必要がある。

実際の金属引張試験片には幾何学的及び材料的な初期不整が存在するために分岐点が消滅して、荷重極大点と分岐点の明確な不安定点の区別は困難である。しかし本研究で扱ったような完全系での不安定メカニズムを明らかにしてはじめて初期不整を有する実際の不完全系の不安定挙動についての議論が可能になる。さらに荷重極大点以降の不安定現象は、金属引張試験片の重要な機械的性質の 1 つである延性を評価する際の重要な因子である。よって金属引張試験片で発生する荷重極大点と分岐点における 2 つの不安定挙動の差異を明らかにすることは工学的に重要であると考えられる。

6. 結言

金属引張試験片の塑性不安定メカニズムについて、以下のような成果を得た。

1. 古典的材料不安定理論をそれと等価な形で有限変形問題においても適用できるように拡張し、物質点レベルでの接線剛性の正定値性が喪失するという有限要素法における局所的な不安定条件としての材料不安定条件を定式化した。

2. 構造不安定条件として確立されている Hill の条件と、有限要素法において導出される接線剛性行列による通常の分岐条件とが等価であることを確認し、弾塑性分岐点を弾性分岐点と同様の手法で Hill の条件を意識することなく評価可能であることを論じた。
3. 荷重極大点の発生は局所的な材料不安定現象であり、試験片は均一変形のままであるのに対して、その後のくびれの発生は大域的な構造不安定現象であり、均一変形から不均一変形への分岐であることを有限要素法の枠組みにおいて明確に分離した。
4. J_2 流れ則に基づく 3 次元分岐解析によって、拡散くびれ以降の破断直前までの局所化変形パターンを再現できることを明らかにした。

今後は溶接部などの構造的応力集中部についてもこれらの検討を行い、材料不安定及び構造不安定さらには破断に至る際の挙動などの確固たる場合分けと、強度及び延性に対する材料及び幾何学的因子の明確化を行うことが課題となる。

参 考 文 献

- 1) 岡澤重信, 寺澤大樹, 池田清宏, 寺田賢二郎: 引張鋼材のくびれ挙動に関する形状効果, 土木学会論文集, 675, pp.351-354, 2001.
- 2) Tvergaard, V., Needleman, A. and Lo, K.K.: Flow Localization in the Plane Strain Tensile Test, J. Mech. Phys. Solids, 29, pp.115-142, 1981.
- 3) Zbib, H.M. and Jubran, J.S.: Dynamic Shear Banding: A Three-Dimensional Analysis, Int. J. of Plasticity, 8, pp.619-641, 1992.
- 4) Okazawa, S, Usami, T, Noguchi, H. and Fujii, F.: Three-Dimensional Necking Bifurcation in Tensile Steel Specimens, J. Eng. Mech., ASCE, 128, pp.479-486, 2002.
- 5) Swift, H. W.: Plastic Instability Under Plane Stress, J. Mech. Phys. Solids, 1, pp.1-18, 1952.
- 6) 林 豊: 塑性不安定を考えてみる, 塑性と加工, 22, pp.425-432, 1981.
- 7) Borst, R. and Giessen, E.: Material Instabilities in Solids, John Wiley & Sons, 1998.
- 8) Belytschko, T., Liu, W.K. and Moran, B.: Nonlinear Finite Elements for Continua and Structures, John Wiley & Sons, 2000.
- 9) Rice, J.: The Localization of Plastic Deformation, in Theoretical and Applied Mechanics, North-Holland, pp.207-220, 1977.
- 10) Hill, R. and Hutchinson, J.W.: Bifurcation Phenomena in the Plane Tension Test, J. Mech. Phys. Solids, 23, pp.239-264, 1975.
- 11) Hill, R.: A General Theory of Uniqueness and Stability in Elastic-Plastic Solids, J. Mech. Phys. Solids, 6, pp.236-249, 1958.
- 12) 北川 浩: 弾・塑性力学 - 非線形解析のための基礎理論 -, 裳華房, 1987.
- 13) Noguchi, H, Okazawa, S. and Fujii, F.: Scaled Corrector and Branch-Switching in Necking Problems, Comp. Mech., 26, pp.236-242, 2000.
- 14) Budiansky, B.: A Reassessment of Deformation Theories of Plasticity, J. Appl. Mech., 26, pp.259-264, 1959.
- 15) Christoffersen, J. and Hutchinson, J.W.: A Class of Phenomenological Corner Theories of Plasticity, J. Mech. Phys. Solids, 25, pp.465-487, 1979.
- 16) 富田佳宏: 数値弾塑性力学, 養賢堂, 1994.
- 17) Wriggers, P.: Continuum Mechanics, Nonlinear Finite Element Techniques and Computational Stability, Progress in Computational Analysis of Inelastic Structure, edited by Stein, E., pp.245-287, 1993.