

数値重み関数法による構造解析手法の開発

— 2次元弾性および平板構造解析の定式化 —

正員 角 洋一* 学生員 A.T.M.M. Anowarul Bashar**
正員 川村 恭己*

Numerical Weight Function Method for Structural Analysis
- Formulation for two-dimensional elasticity and plate structures -

by Yoichi Sumi, *Member* A.T.M.M. Anowarul Bashar, *Student Member*
Yasumi Kawamura, *Member*

Summary

The weight function method was originally derived for two- and three-dimensional crack problems to calculate stress intensity factors for arbitrary loading conditions. In the present paper the weight function method has been generalized to the response analysis of structures basing upon the Maxwell-Betti's reciprocal theorem, where the weight function method is formulated and applied to two-dimensional elasticity and plate bending problems with illustrative examples. The method is very useful for the analysis of structures subjected to a variety of loading conditions, because once the weight function is calculated the responses such as displacements and stresses may simply be calculated by the integration of the inner product of the universal weight function and a load vector.

1. 緒 言

重み関数法は1970年代にき裂の応力拡大係数解析への適用を目的として研究された手法であり、そこでは、物体形状と幾何学的境界条件に対応して固有に定まるベクトル場（重み関数）を用いて任意の荷重条件に対するき裂の応力拡大係数が、重み関数と荷重ベクトルの内積として計算できることが示された^{1, 2)}。著者の一

人は最近、この重み関数法を任意の3次元き裂の応力拡大係数算定に適用する手法を開発したが³⁾、本研究では、この考え方が、さらに一般の構造応答、即ち注目点の変位や応力の計算にも適用可能なことを示す。一度、構造形状と幾何学的境界条件のみに依存する固有のベクトル場としての重み関数が決定されると、それと荷重ベクトルの内積の積分が、注目点における応答（変位あるいは応力）を与えることになるので、多数の荷重系を扱う必要がある場合、本手法の有効性が高い。船舶海洋構造の疲労強度の直接計算では、1,000以上の極めて多数の荷重ケースを扱わなければならない場合があるが、構造危険部位が明確で限定的な場合には本手法は有効な解析手段を提供すると考えられる。

* 横浜国立大学大学院工学研究院
** 横浜国立大学大学院工学研究科博士後期課程

本論文では、2次元弾性問題および板曲げ問題の重み関数法の定式化を行うとともに、一般の3次元板骨構造への拡張を論ずる。さらに本手法を汎用構造解析コードと組み合わせてシステム化し、数値計算による重み関数算定精度の検証を行い、本手法の有効性を示す。

2. 構造応答解析のための重み関数法の定式化

2.1 平板構造応答解析の重み関数法の定式化

平板の構造応答は、微小変位の場合面内応答と面外応答を分離して議論できるので、以下では、2次元弾性問題と板曲げ問題に分けて重み関数法の定式化を行う。座標系として Fig.1 あるいは Fig.2 に示すように、平板の中央面内に x_1, x_2 軸あるいは x, y 軸をとりこれらと右手系をなすように x_3 軸あるいは z 軸をとる。以下の議論では、簡明性のため2次元弾性問題の記述には $O-x_1x_2x_3$ 座標系と変位および応力のテンソル表示を、また板曲げ問題には $O-xyz$ 座標系と工学表示を併用するが、混乱は無いと思う。

2.1.1 2次元弾性問題の定式化

解析対象として Fig.1 に示す2次元領域 V を考えよう。解くべき境界値問題は通常のテンソル記号と総和規約を用いて

$$\begin{aligned}\sigma_{ij,j} + f_i &= 0 & \text{in } V \\ \sigma_{ij} n_j &= t_i & \text{on } S_t \\ u_i &= v_i & \text{on } S_u\end{aligned}\quad (1)$$

と表せる。ここに、物体力を f_i 、応力境界 S_t に作用する表面力を t_i 、変位境界上の強制変位を v_i とし、得られる変位および応力をそれぞれ、 u_i 、 σ_{ij} とする。また、応力および変位の評価点を P と表すことにする。

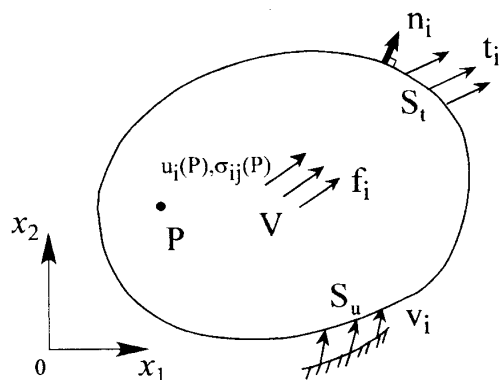


Fig.1 Original boundary value problem

次に、補助問題として、点 P に x_k 方向の単位集中心力が

作用する問題を定義しよう (Fig.2)。

$$\begin{aligned}\sigma_{ij,j} + \delta_i^{(k)}(P) &= 0 & \text{in } V \\ \sigma_{ij} n_j &= 0 & \text{on } S_t \\ u_i &= v_i & \text{on } S_u\end{aligned}\quad (2)$$

ここに、 $\delta_i^{(k)}(P)$ は点 P に作用する x_k 軸方向の単位集中心力を表す。この問題の変位解を $u_i^{(k)}(Q;P)$ と表す。

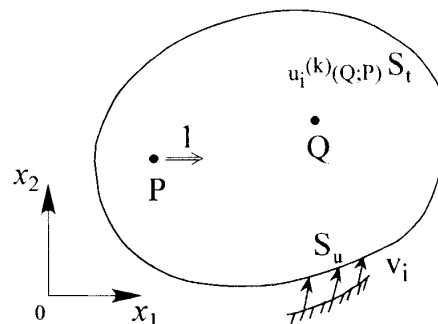


Fig.2 Auxiliary boundary value problem for $k=1$

このとき、問題(1)と(2)に Maxwell-Betti の相反定理を適用すると、

$$\begin{aligned}u_i(P) &= \int_V u_{l,i}^{(1)}(Q;P) f_l(Q) dV(Q) \\ &+ \int_{S_t} u_{l,i}^{(1)}(Q;P) t_l(Q) dS(Q)\end{aligned}\quad (3)$$

を得る。明らかに、 $u_{l,i}^{(1)}(Q;P)$ は点 P の変位 $u_i(P)$ の重み関数となることがわかる。

応力は、式(3)で与えられる変位に対して、変位・ひずみ関係と応力・ひずみ関係を適用して

$$\sigma_{ij}(P) = \frac{1}{2} E_{ijmn} (u_{m,n} + u_{n,m}) \quad (4)$$

と定められる。ここに、 E_{ijmn} は弾性係数テンソルである。式(4)右辺の変位の偏微分は

$$\begin{aligned}u_{m,n}(P) &= \int_V u_{l,n}^{(m)}(Q;P) f_l(Q) dV(Q) \\ &+ \int_{S_t} u_{l,n}^{(m)}(Q;P) t_l(Q) dS(Q)\end{aligned}\quad (5)$$

と表せるので、これを式(4)に代入すると

$$\begin{aligned}\sigma_{ij}(P) &= \int_V h_{ijl}(Q;P) f_l(Q) dV(Q) \\ &+ \int_{S_t} h_{ijl}(Q;P) t_l(Q) dS(Q)\end{aligned}\quad (6)$$

を得る。ここに、 h_{ijl} は応力応答の重み関数であり、

$$h_{ijl}(Q;P) \equiv \frac{1}{2} E_{ijmn} \{u_{l,n}^{(m)}(Q;P) + u_{l,m}^{(n)}(Q;P)\} \quad (7)$$

と定義される。式(7)右辺の $\{ \}$ 内に現れる変位の偏微分は点 P に作用する x_m 座標軸方向の単位集中力による変位の x_n 座標軸方向の偏微分であるから $m=1$ の場合、物理的には Fig.3 に示す力対系の誘起する変位場を表す。例えば、 $m=n=1$ のとき、

$$u_{l,1}^{(1)}(Q;P) = \lim_{\Delta x_1 \rightarrow 0} \{u_l^{(1)}(Q;P(x_1 + \Delta x_1, x_2)) - u_l^{(1)}(Q;P(x_1, x_2))\} / \Delta x_1 \quad (8)$$

であり、上式から式(8)の算定には力対による差分近似が可能となることがわかる。

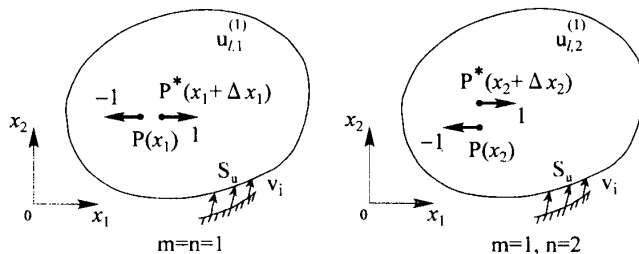


Fig.3 System of force couples for stress weight function

2.1.2 板曲げ問題の定式化

次に、解析対象として、周辺を適宜支持あるいは固定された弾性平板に対して前節と同様の考察を加える。この平板が、Fig.4 に示されるように、任意の領域 $S(Q)$ に作用する分布荷重 $p(Q)$ を受ける場合、点 P の変位 $w(P)$ を求める問題が与えられたとしよう。一方、補助問題として点 P に単位集中力をかけた時の領域 $S(Q)$ における変位を $w(Q;P)$ と表し、これらの問題に Maxwell-Betti の相反定理を適用すると、

$$w(P) = \int_{S(Q)} p(Q) W_{Qx}(Q;P) dS(Q) \quad (9)$$

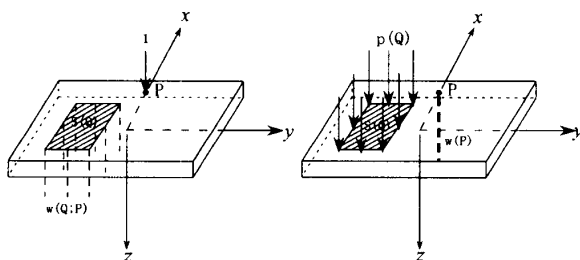


Fig.4 Original problem and auxiliary problem

を得る。(9)式は、分布荷重 $p(Q)$ を受ける平板において

$w(Q;P)$ が点 P の変位応答の重み関数となることを意味している。

次に、曲げモーメント、捩りモーメント、せん断力などの内力の重み関数について考察する。領域 $S(Q)$ に作用する分布荷重 $p(Q)$ による点 P の曲げモーメント M_x は式(9)の関係をを用いて

$$\begin{aligned} M_x(P) &= -D \left(\frac{\partial^2 w(P)}{\partial x^2} + \nu \frac{\partial^2 w(P)}{\partial y^2} \right) \\ &= \int_{S(Q)} p(Q) \left[-D \left(\frac{\partial^2 w(Q;P)}{\partial x^2} + \nu \frac{\partial^2 w(Q;P)}{\partial y^2} \right) \right] dS(Q) \end{aligned} \quad (10)$$

と表すことができる。この時、右辺 $[]$ 内を、点 P における曲げモーメント M_x の重み関数と考えることができるので、これを W_{Mx} と表わすと、任意の荷重系 $p(Q)$ による点 P の曲げモーメント $M_x(P)$ は、

$$M_x(P) = \int_{S(Q)} p(Q) \cdot W_{Mx}(Q;P) dS(Q) \quad (11)$$

$$W_{Mx} = -D \left(\frac{\partial^2 w(Q;P)}{\partial x^2} + \nu \frac{\partial^2 w(Q;P)}{\partial y^2} \right) \quad (12)$$

となる。重み関数を定義する変位 $w(Q;P)$ の偏微分は、点 P に作用する単位集中力の作用点位置が x または y 方向へ変化する時の変位変化率であるから、

$$\begin{aligned} W_{Mx} &= -D \lim_{\Delta x, \Delta y \rightarrow 0} \left\{ \frac{w(x + \Delta x, y) - 2w(x, y) + w(x - \Delta x, y))}{(\Delta x)^2} \right. \\ &\quad \left. + \nu \frac{w(x, y + \Delta y) - 2w(x, y) + w(x, y - \Delta y))}{(\Delta y)^2} \right\} \end{aligned} \quad (13)$$

と表すことができる。上記偏微分を数値計算上 2 階差分で近似すると、右辺第 1 項は Fig.5、第 2 項は Fig.6 に示すような P 点近傍における単位力対系の負荷に対する応答と等価である。

同様の定式化により、曲げモーメント M_y およびねじりモーメント M_{xy} も容易に定めることができるので、その詳細の導出は省略する。

せん断力 Q_x, Q_y については、3 階微分量となるので、3 階差分に対応する類似の力対系を導くことができる。せん断力 Q_x の重み関数による表現を導くと

$$Q_x(P) = \int_{S(Q)} p(Q) W_{Qx}(Q;P) dS(Q) \quad (14)$$

$$W_{Q_x} = -D \frac{\partial}{\partial x} \left\{ \frac{\partial^2 w(Q;P)}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 w(Q;P)}{\partial y^2} \right\} \quad (15)$$

となる。ここに、 W_{Q_x} はせん断力 Q_x の重み関数である。

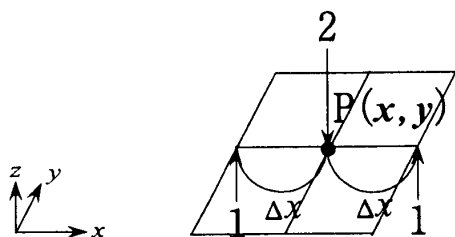


Fig. 5. First force couple for M_x

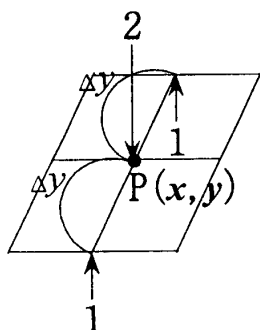


Fig. 6. Second force couple for M_x

2.2 一般の3次元構造体への拡張

重み関数による定式化を一般の3次元弾性体やシェルへ拡張可能なことは容易に推察されよう。ここでは、一般の3次元空間内の弾性構造体において構造応答の評価点近傍が、前述の面内および面外特性をもつ場合に限定して議論を進める。このとき、この構造体に作用する外力ベクトル f_i によって評価点 P に生じる変位 $u_i(P)$ と、応答評価点に作用する前述の単位集中力による変位場 $u_i^{(0)}(Q;P)$ に Maxwell-Betti の相反定理を適用すると、

$$u_i(P) = \int_V u_i^{(0)}(Q;P) f_i(Q) dV(Q) + \int_{S_1} u_i^{(0)}(Q;P) t_i(Q) dS(Q) \quad (16)$$

を得る。したがって、注目点が一般の3次元構造体内にある場合にも前節における変位や応力に対する重み関数の定式化の議論がそのまま適用できることは明らかである。

3. 数値計算と考察

3.1 重み関数の数値計算

有限要素法による重み関数の算定と任意の荷重系に対する評価点の変位および応力の計算手順は以下の通りである。

- 変位あるいは応力の応答評価点に、対応する前述の単位集中力あるいは力対系を作用させ、汎用有限要素解析プログラムなどで変位場を求める。これが、対応する応答の重み関数ベクトルとなる。このとき、力対系を作用させる応答評価点近傍の節点配置を座標軸方向に一致させるとともに要素寸法を適当なものに選択する必要がある。
- 構造体に作用する任意の荷重系に対する節点荷重ベクトルを算出する。このとき、分布荷重に対する節点荷重の積分にはガウス積分を用いる。
- 上記 (a)、(b) で得られる重み関数ベクトルと荷重ベクトルの内積をとると評価点における応答が直ちに計算できる。

上記 (a) は汎用構造解析プログラムで実行可能であり、本研究では ANSYS を利用した。(b) は複雑な外力系の場合計算が面倒ではあるが、何れにしても避けて通ることのできないプロセスである。(c) は単純な内積計算である。したがって、本計算法が有効なのは、応答評価点が限定される一方、解くべき荷重系の数が極めて大きい場合となることが理解されよう。

3.2 解析精度の検証

3.2.1 2次元弾性問題

本手法の解析精度を検証するため、Fig. 7 に示す円孔を有する平板の1様引張りの問題を扱う。ここで、変位および応力応答の注目点は図中の点 $P_i (i=1, 2, 3)$ である。計算に用いた要素分割を Fig. 8 に示す。2.1.1 節で述べたように単位集中力を節点力として点 P_i に作用させることによって、変位の重み関数が得られる。また、点 P_i とこれに隣接する節点に作用する力対系による変位場を重ね合わせることによって応力成分の重み関数が得られる。

有限要素法により直接計算した変位および応力と重み関数法により得られた結果の比較を Table 1 に示す。両者の差は極めて小さく計算精度は十分である。ひとつ注意すべき点は、応力の重み関数を計算するに際して用いる力対系を作用させる一対の節点の座標は、高精度で座標軸方向に一致している必要があることである。本計算では、倍精度レベルで座標値を一致させるようにした。これによって、重み関数への誤差の混入を避けることができた。

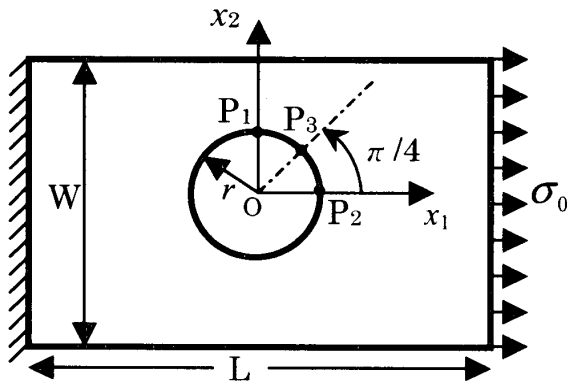
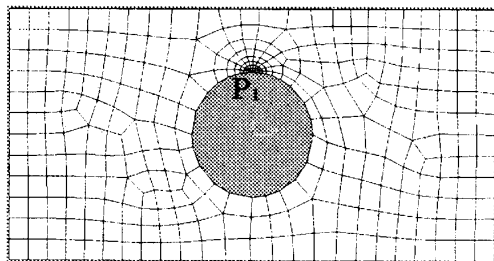
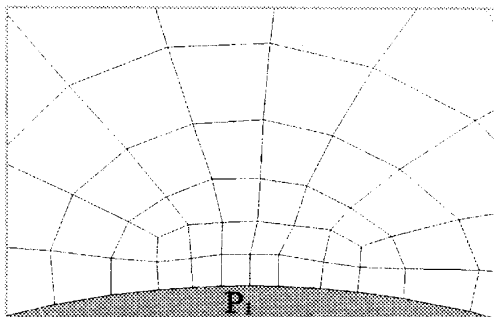


Fig.7 Rectangular plate with a circular hole subjected to uniform tension where points P_1 , P_2 and P_3 are the points of evaluation. ($L/W=2$; $r/W=0.25$)



(a)



(b)

Fig.8 Mesh subdivision: (a) global mesh, (b) local mesh near the point P_1

Table1 Comparison of response at the evaluation point

Stress	Weight function	Direct FEM	Error (%)
Point P_1 (σ_{11}/σ_0)	4.4510	4.4510	2.5576E-04
Point P_2 (σ_{22}/σ_0)	-1.7137	-1.7137	-2.0881E-03
Point P_3 (σ_{12}/σ_0)	-0.9017	-0.8982	0.3918

3.2.2 板曲げ問題

Fig.9 に示す板厚 t の長方形板 ($a/b=2$, $t/b=0.01$) の 4 辺を完全固定とし、中央集中荷重および一様分布荷重に対する応答について、重み関数法と通常の有限要素解析の結果との比較を行った。なお、ポアソン比 $\nu = 0.3$ とした。図中点 B、点 C、点 D においてそれぞれ曲げモーメント M_x (B 点)、 M_y (C 点)、ねじりモーメント M_{xy} (D 点) を比較する。

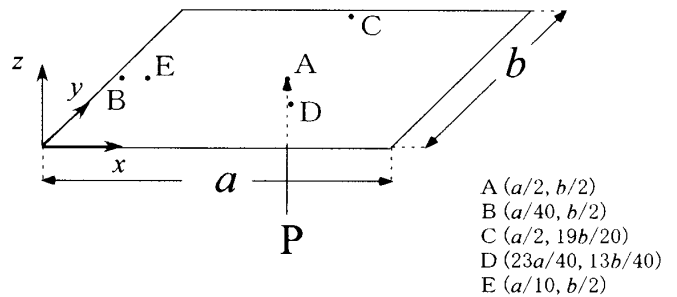


Fig.9 Rectangular plate subjected to lateral loading

Fig.9 に示すように荷重条件として、平板中央の A 点に大きさ P の集中荷重を負荷した場合の重み関数法および有限要素法による直接算定の結果を比較し Table 2 に示す。わずかな誤差はあるものの、十分な精度があることが確認できる。

Table 2 Comparisons of weight function method and direct FEM for a concentrated force

Moment	Weight function	Direct FEM	Error (%)
M_x/P at B	-0.01298	-0.01295	0.234
M_y/P at C	-0.1258	-0.1256	0.136
M_{xy}/P at D	0.02846	0.02795	1.85

重み関数法と直接有限要素計算の差の要因としては、(a)有限要素法によって力対による応答変位を計算し数値的に重み関数を求める際のメッシュサイズの影響、(b)力対を構成する単位力の作用点間距離の影響、が考えられる。まず、要因(a)について検討するため、力対を構成する単位力間の距離 Δx , Δy を一定 ($\Delta x/a = \Delta y/a = 1/20$) とし、メッシュサイズを変化させて図中 E 点の曲げモーメント M_x を重み関数法により計算した。なお、本計算ではすべての要素は正方形である。メッシュサイズに対する有限要素法による直接計算結果との差を Table 3 に示す。 $h/a = 1/20$ (h : 要素サイズ) まで要素を大きくすると誤差は 5% 程度まで拡大する。一方、

メッシュを細かくするにつれて差は小さくなるものの、 $h/a = 1/60$ 以下では2%程度の差で一定となる。

Table 3 Comparisons of M_x/P at point E with h/a by the weight function method and direct FEM

h/a	Weight function	Direct FEM	Difference (%)
1/20	-0.01149	-0.01099	4.53
1/40	-0.01146	-0.01116	2.65
1/60	-0.01145	-0.01119	2.30
1/80	-0.01145	-0.01121	2.18
1/100	-0.01145	-0.01121	2.13
1/120	-0.01145	-0.01121	2.10

誤差要因(b)については、要素サイズを $h/a = 1/80$ と一定にして力対を構成する2節点間の距離 Δx 、 Δy を変化させ、その比較結果を Table 4 に示した。 $\Delta x/a$ 、 $\Delta y/a$ を小さくすれば誤差も小さくなり、 $\Delta x/a = \Delta y/a = 1/80$ では、誤差が約0.3%に減少し数値的重み関数が工学的に十分な精度を有することが確認できた。

Table 4 Comparisons of M_x/P at point E with $\Delta x/a$ ($=\Delta y/a$) by the weight function method and direct FEM

$\Delta x/a$ $=\Delta y/a$	Weight function	Direct FEM	Error (%)
4/80	-0.01145	-0.01121	2.18
3/80	-0.01135	-0.01121	1.29
2/80	-0.01128	-0.01121	0.65
1/80	-0.01124	-0.01121	0.28

荷重条件が分布荷重の場合には式(11)、(14)のような面積分が必要である。本計算では、要素毎に荷重と重み関数の積をガウス積分して評価点の応答を求めた。数値結果の一例として面上に z 軸方向に q なる一様分布荷重が作用する場合の点B、点C、点Dにおける曲げモーメント M_x (B点)、 M_y (C点)、ねじりモーメント M_{xy} (D点)の重み関数法と有限要素直接計算による結果の比較を Table 5 に示す。ねじりモーメントの誤差が一見大きく見えるが、これは絶対値そのものが極めて小さいためであり、実用上問題が無いことが確認できる。

Table 5 Comparisons of weight function method and direct FEM for a uniform pressure

Moment	Weight function	Direct FEM	Error (%)
M_x/qb^2 at B	-0.03660	-0.03660	0.003
M_y/qb^2 at C	-0.05856	-0.05861	0.086
M_{xy}/qb^2 at D	0.00117	0.00112	4.016

4. 結論

本研究では、数値重み関数法による構造解析手法の定式化を2次元弾性問題および平板構造解析に対して行い、汎用有限要素解析プログラムを用いた数値重み関数算定システムを開発した。本手法を2次元弾性応力集中問題、板曲げ問題に適用し、重み関数算定のための力対の作用点位置と間隔、要素分割の解析精度に及ぼす影響を検討した。これらの検討結果から、通常の有限要素解析プログラムによって得られる数値重み関数を用いることにより、任意の荷重系に対して工学的に十分な計算精度で解が得られることを確認した。

船舶海洋構造物の疲労解析で問題となる極めて多数の荷重系に対する効率的解法の開発と構造危険部位に高応力を誘起する荷重系の抽出に役立つシステムの開発が今後の課題である。

謝 辞

本研究は、運輸施設整備事業団基礎的研究推進制度「船舶の構造健全性向上のための設計・検査評価手法の高度化に関する研究」(課題番号:2001-03、総括研究代表者:角 洋一)によるものである。本研究の数値計算の一部は矢口真理、有本武樹両君の助力によるものであり、ここに謝意を表します。

参 考 文 献

- 1) Bueckner, H.F., A novel principle for the computation of stress intensity factors. ZAMM 50, (1970), pp.529-545.
- 2) Rice, J.R., Some remarks on elastic crack-tip stress fields. International Journal of Solids and Structures, 8, (1972), pp.751-758.
- 3) 角、樫内、伊藤、大倉、数値重み関数による3次元き裂解析の定式化、日本造船学会論文集 188, 2000, pp. 655-660.