

高次オーダー速度ポテンシャルの解法

— 波漂流付加質量の理論計算 —

正員 吉 田 基 樹* 正員 一 色 浩**
正員 鮑 偉 光*** 正員 木 下 健***

Solutions of higher-order potentials necessary to evaluate wave-drift added mass

by Motoki Yoshida, *Member* Hiroshi Isshiki, *Member*
Weiguang Bao, *Member* Takeshi Kinoshita, *Member*

Summary

It is necessary for evaluation of wave-drift added mass to solve higher-order potentials. This problem is solved for a uniform circular cylinder of which draft is same as the water depth by means of the Green's theorem. Analytical solutions and calculated results of wave-drift added mass are presented. The far field conditions, radiation conditions for each order of potentials are obtained to ensure the existence of a unique solution.

1. 緒 言

著者らは、準定常法ではなく動的な手法にもとづいた理論と実験法を用いて波漂流付加質量に関する検討を行ってきたが、波漂流付加質量を理論的に評価するためには高次オーダーの速度ポテンシャルを解く必要があることを既報¹⁾において示した。

そこで、本報では高次オーダー速度ポテンシャルの解法について論じるが、計算は、海底に接した鉛直円柱の低周波数前後揺動揺でのディフラクション問題における前後揺方向流体力という最も簡単な例で行なう。なお、理論解析全般は既報¹⁾に従い、本報で用いる座標系或いは記号の定義は全て既報¹⁾の通りとする。

2. 速度ポテンシャルの境界値問題

円柱の半径を a 、喫水を d 及び静水時の水深を $h(=d)$ とする。また、ポテンシャル及び流体力のオーダーは、入射波振幅を ζ_a 、低周波数動揺振動数を σ として (ζ_a, σ) 次によって表すことにする。各オーダー・ポテンシャルの前後揺 ($j=1$)、ディフラクション問題の場合の境界値問題は、既報¹⁾ 第4節を整理して次の通りとなる。

1) (1,0) 次オーダー ϕ_1 ポテンシャル

$$\Delta(\phi_{10} + \phi_{17}) = 0 \quad \text{at } r > a, -h < z < 0 \quad (1)$$

$$\frac{\partial(\phi_{10} + \phi_{17})}{\partial z} - \nu(\phi_{10} + \phi_{17}) = 0 \quad \text{at } z = 0 \quad (2)$$

$$\frac{\partial\phi_{17}}{\partial n} = -\frac{\partial\phi_{10}}{\partial n} \quad \text{at } r = a \quad (3)$$

* 新構造開発株式会社 (研究当時 東京大学大学院)

** 数理解析研究所

*** 東京大学生産技術研究所

$$\frac{\partial(\phi_{10} + \phi_{17})}{\partial z} = 0 \quad \text{at } z = -h \quad (4)$$

$$\sqrt{k_0 r} \left(\frac{\partial \phi_{17}}{\partial r} - ik \phi_{17} \right) = 0 \quad \text{as } r \rightarrow \infty \quad (5)$$

2) (0,1) 次オーダー ϕ_{0j} ポテンシャル

$$\Delta \phi_{01} = 0 \quad \text{at } r > a, -h < z < 0 \quad (6)$$

$$\frac{\partial \phi_{01}}{\partial z} = 0 \quad \text{at } z = 0, z = -h \quad (7)$$

$$\frac{\partial \phi_{01}}{\partial r} = n_1 = \cos \theta \quad \text{at } r = a \quad (8)$$

$$\nabla \phi_{01} \rightarrow 0 \quad \text{as } r \rightarrow \infty \quad (9)$$

3) (1,1) 次オーダー $\hat{\psi}_{js}$ ポテンシャル

$$\Delta \hat{\psi}_{17} = 0 \quad \text{at } r > a, -h < z < 0 \quad (10)$$

$$\frac{\partial \hat{\psi}_{17}}{\partial z} - \nu \hat{\psi}_{17} = \hat{f}_{17} \quad \text{at } z = 0 \quad (11)$$

ここで、

$$\hat{f}_{17} = -2i \frac{\partial \phi_{17}}{\partial x_j} - 2k_0 \cos \beta \phi_{17}$$

$$+ 2i \nabla \phi_{01} \cdot \nabla (\phi_{10} + \phi_{17})$$

$$- i(\phi_{10} + \phi_{17}) \frac{\partial^2 \phi_{01}}{\partial z^2}$$

$$\frac{\partial \hat{\psi}_{17}}{\partial r} = 0 \quad \text{at } r = a \quad (12)$$

$$\frac{\partial \hat{\psi}_{17}}{\partial z} = 0 \quad \text{at } z = -h \quad (13)$$

$$\text{適当な無限遠条件} \quad \text{as } r \rightarrow \infty \quad (14)$$

4) (1,2) 次オーダー $\tilde{\psi}_{js}$ ポテンシャル

$$\Delta \tilde{\psi}_{17} = 0 \quad \text{at } r > a, -h < z < 0 \quad (15)$$

$$\frac{\partial \tilde{\psi}_{17}}{\partial z} - \nu \tilde{\psi}_{17} = \tilde{f}_{17} \quad \text{at } z = 0 \quad (16)$$

ここで、

$$\tilde{f}_{17} = 2\nu \hat{\psi}_{17} - i \frac{\partial \phi_{17}}{\partial x_j} - k_0 \cos \beta \phi_{17}$$

$$+ 2i \nabla \phi_{01} \cdot \nabla (\phi_{10} + \phi_{17})$$

$$- i \phi_{01} \left\{ \frac{\partial^2 (\phi_{10} + \phi_{17})}{\partial z^2} - \nu^2 (\phi_{10} + \phi_{17}) \right\}$$

$$\frac{\partial \tilde{\psi}_{17}}{\partial r} = 0 \quad \text{at } r = a \quad (17)$$

$$\frac{\partial \tilde{\psi}_{17}}{\partial z} = 0 \quad \text{at } z = -h \quad (18)$$

$$\text{適当な無限遠条件} \quad \text{as } r \rightarrow \infty \quad (19)$$

5) (2,1) 次オーダー $\phi_{2j}^{(0)}$ ポテンシャル

$$\Delta \phi_{21}^{(0)} = 0 \quad \text{at } r > a, -h < z < 0 \quad (20)$$

$$\frac{\partial \phi_{21}^{(0)}}{\partial z} = f_{21}^{(0)} \quad \text{at } z = 0 \quad (21)$$

ここで、

$$f_{21}^{(0)} = \frac{1}{2g} \text{Re} \left\{ i\nu \phi_1^* \left(\frac{\partial^2 \hat{\psi}_{17}}{\partial z^2} - \nu \frac{\partial \hat{\psi}_{17}}{\partial z} \right) - i\nu \hat{\psi}_{17} \left(\frac{\partial^2 \phi_1^*}{\partial z^2} - \nu^2 \phi_1^* \right) + 2\nabla \frac{\partial \phi_1}{\partial x_j} \cdot \nabla \phi_1^* - \frac{\partial \phi_1}{\partial x_j} \left(\frac{\partial^2 \phi_1^*}{\partial z^2} + \nu^2 \phi_1^* \right) - \frac{1}{2} \nabla \phi_{01} \cdot \nabla (\nabla \phi_1 \cdot \nabla \phi_1^*) - \nabla \phi_1^* \cdot \nabla (\nabla \phi_{01} \cdot \nabla \phi_1) + \left(\frac{1}{2} \nabla \phi_1 \cdot \nabla \phi_1^* + \nu^2 \phi_1 \phi_1^* \right) \frac{\partial^2 \phi_{01}}{\partial z^2} + \nabla \phi_{01} \cdot \nabla \phi_1 \left(\frac{\partial^2 \phi_1^*}{\partial z^2} + \nu^2 \phi_1^* \right) + ik_0 \cos \beta \phi_1 \frac{\partial^2 \phi_1^*}{\partial z^2} \right\}$$

$$\frac{\partial \phi_{21}^{(0)}}{\partial r} = 0 \quad \text{at } r = a \quad (22)$$

$$\frac{\partial \phi_{21}^{(0)}}{\partial z} = 0 \quad \text{at } z = -h \quad (23)$$

$$\text{適当な無限遠条件} \quad \text{as } r \rightarrow \infty \quad (24)$$

3. 波漂流付加質量の理論計算

既報¹⁾の(82)式で与えられる波漂流付加質量理論値は、本報の計算例の場合にあてはめると次式となる。即ち、

$$A_{211} = \text{Im} \rho_0 \left\{ \int_{S_0} \left[\frac{i\omega}{g} \phi_{21}^{(0)} - \frac{1}{2g} \nabla \phi_1^* \cdot \nabla \tilde{\psi}_1 \right] n_1 dS + \frac{1}{2g} \int_{C_0} \left[\nu \phi_1^* (\hat{\psi}_1 + \tilde{\psi}_1) - \frac{i}{2} \phi_{0j} (\nabla \phi_1 \cdot \nabla \phi_1^*) + i\nu^2 \phi_{01} \phi_1 \phi_1^* \right] n_1 dl \right\} \quad (25)$$

ここで、各ポテンシャルは $r = a$ での値であり、また、 $n_1 = -\cos \theta$ である。

4. 高次オーダー速度ポテンシャルの解法

さて、(1,1) 次オーダー $\hat{\psi}_{js}$ ポテンシャルは各種方法^{2)~5)}により解が求められているが、これらと同様の方法で(1,2)次オーダー $\tilde{\psi}_{js}$ 及び(2,1)次オーダー $\phi_{2j}^{(0)}$ ポテンシャルを解こうとすると自由表面上積分の発散問題⁶⁾が生じ、解くことはできない。そこで本報では、以下に示すように松井ら⁷⁾の方法を拡張してこの発散問題を解決し、高次オーダー・ポテンシャルの解を求めた。

4.1 (1,2) 次オーダー $\tilde{\psi}_{js}$ ポテンシャルの解

ポテンシャルの境界値問題は、Green の公式を利用することによって以下のような積分方程式の解に帰着される。一般に、物体表面 S_0 、自由表面 S_F 、海底面 S_B 及び遠方仮想円筒面 S_∞ で囲まれた流体域 V の速度ポテンシャル ϕ に対して、Green の公式は次の通りとなる。

$$\int_V (G\Delta\phi - \phi\Delta G) dV = \int_{\partial V} \left(G \frac{\partial\phi}{\partial n} - \phi \frac{\partial G}{\partial n} \right) dS \quad (26)$$

ここで、

$$\partial V = S = S_0 \cup S_F \cup S_B \cup S_\infty$$

及び、 n は S 上の流体からみて外向き法線である。 G は次の支配方程式と境界条件とを満足する Green 関数である。

$$\Delta G(P, Q) = -4\pi\delta(P, Q) \quad Q \in V \quad (27)$$

$$\frac{\partial G}{\partial \zeta} - \nu G = 0 \quad Q \in S_F \quad (28)$$

$$\frac{\partial G}{\partial \zeta} = 0 \quad Q \in S_B \quad (29)$$

$$\lim_{k\rho \rightarrow \infty} \left\{ \sqrt{k\rho} \left(\frac{\partial G}{\partial \rho} - ikG \right) \right\} = 0 \quad Q \in S_\infty \quad (30)$$

ここで、 $P(r, \theta, z)$ は任意の参照点を、 $Q(\rho, \vartheta, \zeta)$ は積分点を示す。 $\delta(P, Q)$ は Dirac のデルタ関数である。このとき、(26) 式は次の形になる。

$$\begin{aligned} & \begin{pmatrix} 4\pi\phi(P) \\ 0 \end{pmatrix} = \\ & - \int_{S_0} \left(N(Q)G(P, Q) - \phi(Q) \frac{\partial G(P, Q)}{\partial \rho} \right) dS \\ & + \int_{S_F} G(P, Q)f(Q) dS \\ & + \int_{S_R} G(P, Q) \left(\frac{\partial \phi(Q)}{\partial \rho} - ik_0\phi(Q) \right) dS, \\ & \begin{pmatrix} P \in V \\ P \notin V \end{pmatrix} \end{aligned} \quad (31)$$

ここで、 S_∞ の替りに半径 $R(\rightarrow \infty)$ を持った円柱形の control 界面 S_R を用いた。また、 N は物体表面上ポテンシャルの法線方向導関数を表し、

$$N = \frac{\partial \phi}{\partial r} = -\frac{\partial \phi}{\partial n} \quad \text{at } r = a \quad (32)$$

である。入射波周期のラディエーション問題も含んだ一般的な場合には N は 0 ではないが、本論文のようなディ

フラクシオン問題のみの場合には $N = 0$ である。参照点 P が物体表面上にあるとき、(31) 式は積分方程式となるので、これを解くと物体表面上のポテンシャル ϕ 値を求めることができ、流体力の計算が可能となる。もし、流体域中のポテンシャル ϕ の値を知りたい場合には物体表面及び自由表面上の積分を実行してそれを求めることができる。今、もし自由表面 S_F 上の積分が適当に収束するならば、ポテンシャル ϕ は無限遠での Sommerfeld 放射条件

$$\lim_{r \rightarrow \infty} \sqrt{k_0 r} \left(\frac{\partial \phi}{\partial r} - ik_0 \phi \right) = 0$$

を満足し、control 界面 S_R 上の積分は $\rightarrow 0$ となるはずである。一方、もし自由表面 S_F 上の積分が収束しないならば、唯一解の存在を保証するためにポテンシャル ϕ に対して適当な無限遠条件を課さなければならない。

さて、海底に接した鉛直円柱の場合、(31) 式の被積分関数中の全ての関数は方位角の Fourier 級数に展開できる。即ち、

$$\phi(r, \theta, z) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} \phi_n(r, z) e^{in\theta} \quad (33)$$

$$G(r, \theta, z; \rho, \vartheta, \zeta) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} g_n(r, z; \rho, \zeta) e^{in(\theta - \vartheta)} \quad (34)$$

$$f(r, \theta) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} f_n(r) e^{in\theta} \quad (35)$$

$$N(\theta, z) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} N_n(z) e^{in\theta} \quad (36)$$

(33) ~ (36) 式を (31) 式に代入し、方位角 ϑ に関する積分を実行すると次式を得る。

$$\begin{aligned} & \begin{pmatrix} 2\phi_n(P) \\ 0 \end{pmatrix} = \\ & \int_{-h}^0 \phi_n(a, \zeta) \frac{\partial g_n(r, z; a, \zeta)}{\partial \rho} a d\zeta \\ & - \int_{-h}^0 N_n(\zeta) g_n(r, z; a, \zeta) a d\zeta \\ & + \int_a^R g_n(r, z; \rho, 0) f_n(\rho) \rho d\rho \\ & + \int_{-h}^0 g_n(r, z; R, \zeta) \left(\frac{\partial \phi_n(R, \zeta)}{\partial \rho} - ik_0 \phi_n(R, \zeta) \right) R d\zeta, \\ & \begin{pmatrix} P \in V \\ P \notin V \end{pmatrix} \end{aligned} \quad (37)$$

(27) ~ (30) 式を満足する Green 関数 g_n は、次式の

形⁸⁾としてよく知られている。

$$g_n(r, z; \rho, \zeta) = i2\pi C_0 \begin{pmatrix} H_n(k_0 r) J_n(k_0 \rho) \\ J_n(k_0 r) H_n(k_0 \rho) \end{pmatrix} Z_0(z) Z_0(\zeta) + 4 \sum_{m=1}^{\infty} C_m \begin{pmatrix} K_n(k_m r) I_n(k_m \rho) \\ I_n(k_m r) K_n(k_m \rho) \end{pmatrix} Z_m(z) Z_m(\zeta), \quad \begin{pmatrix} r > \rho \\ r < \rho \end{pmatrix} \quad (38)$$

ここで、 $m = 0$ のとき、

$$C_0 = \frac{k_0^2}{h(k_0^2 - \nu^2) + \nu}, \quad \nu = k_0 \tanh k_0 h, \quad Z_0(z) = \frac{\cosh k_0(z+h)}{\cosh k_0 h} \quad (39)$$

また、 $m \geq 1$ のとき、

$$C_m = \frac{k_m^2}{h(k_m^2 + \nu^2) - \nu}, \quad \nu = -k_m \tanh k_m h, \quad Z_m(z) = \frac{\cos k_m(z+h)}{\cos k_m h} \quad (40)$$

更に、 J_n は n 次第1種 Bessel 関数、 H_n は n 次第3種 Bessel 関数 (Hankel 関数)、 I_n は n 次第1種変形 Bessel 関数、 K_n は n 次第2種変形 Bessel 関数である。

control 界面 S_R 上で、 $R \rightarrow \infty$ のとき、 ϕ_n 、 g_n は次のような形に近づく。

$$\phi_n(R, \zeta) \sim \phi_n(R, 0) Z_0(\zeta) \quad (41)$$

$$g_n(r, z; R, \zeta) \sim i2\pi C_0 J_n(k_0 r) H_n(k_0 R) Z_0(z) Z_0(\zeta) \quad (42)$$

そのとき、control 界面 S_R 上の積分 I_R は次の通りに計算できる。

$$I_R = i\pi H_n(k_0 R) \left(\frac{\partial \phi_n(R, 0)}{\partial \rho} - ik_0 \phi_n(R, 0) \right) J_n(k_0 r) Z_0(z) R \quad (43)$$

一方、(38) 式で与えられた g_n の定義により、自由表面 S_F 上の積分 I_F は次の通り表現できる。

$$I_F = i2\pi C_0 \left[H_n(k_0 r) \int_a^r J_n(k_0 \rho) f_n(\rho) \rho d\rho + J_n(k_0 r) (F_n(R) - F_n(r)) \right] Z_0(z)$$

$$+ 4 \sum_{m=1}^{\infty} C_m \left[K_n(k_m r) \int_a^r I_n(k_m \rho) f_n(\rho) \rho d\rho + I_n(k_m r) \int_r^R K_n(k_m \rho) f_n(\rho) \rho d\rho \right] Z_m(z) \quad (44)$$

ここで、

$$F_n(\rho) = \int H_n(k_0 \rho) f_n(\rho) \rho d\rho \quad (45)$$

明らかに、もし $R \rightarrow \infty$ に従って $F_n(R) \rightarrow 0$ となるならば、(44) 式の自由表面上積分 I_F は収束し、(43) 式で表されている control 界面上積分は $I_R \rightarrow 0$ となる。一方、 $F_n(R) \rightarrow 0$ でなければ、control 界面 S_R からの寄与 I_R は、積分方程式の唯一解の存在を保証するために $F_n(R)$ の値を打消さなければならない。これは、 $R \rightarrow \infty$ の時のポテンシャルが次の無限遠条件を課されることを意味する。即ち、

$$H_n(k_0 R) \left(\frac{\partial \phi_n(R, 0)}{\partial r} - ik_0 \phi_n(R, 0) \right) + 2C_0 \frac{F_n(R)}{R} = 0 \quad (46)$$

さらに、物体表面 S_0 上で、ポテンシャル ϕ_n は次の直交固有関数列展開形に表示できる。

$$\phi_n(a, z) = A_{n0} Z_0(z) + \sum_{m=1}^{\infty} A_{nm} Z_m(z) \quad (47)$$

今、円柱浮体に内接する面 $r = a^-$ 上にある参照点 P を考えることにする。Green 公式 (31) 式の左辺は、点 P が流体域 V の外側にある ($P \notin V$) ので、0 となる。(46) 式の無限遠条件が成立するとして、 $r = a^- < \rho = a$ であること、また、固有関数 $Z_0(z)$ 、 $Z_m(z)$ の直交性を利用して、次式を得る。

$$A_{n0} = \frac{2C_0}{k_0 a H_n'(k_0 a)} \left(F_n(a) + a H_n(k_0 a) \int_{-h}^0 N_n(\zeta) Z_0(\zeta) d\zeta \right) \quad (48)$$

$$A_{nm} = \frac{2C_m}{k_m a K_n'(k_m a)} \left(- \int_a^\infty K_n(k_m \rho) f_n(\rho) \rho d\rho + a K_n(k_m a) \int_{-h}^0 N_n(\zeta) Z_m(\zeta) d\zeta \right) \quad (49)$$

ここで、superscript の ' (prime) は、関数の引き数に関する導関数であることを示す。さらに、固有関数に関する公式を用いると、流体内の任意参照点 P ($P \in V$)

におけるポテンシャルとして次式を得る。

$$\begin{aligned} \phi_n(r, z) = & i\pi C_0 Z_0(z) \left[\mathcal{P}[f_n(r)] \right. \\ & \left. - \frac{2iH_n(k_0 r)}{\pi k_0 H'_n(k_0 a)} \int_{-h}^0 N_n(\zeta) Z_0(\zeta) d\zeta \right] \\ & + 2 \sum_{m=1}^{\infty} C_m Z_m(z) \left[\mathcal{E}[f_n(r)] \right. \\ & \left. + \frac{K_n(k_m r)}{k_m K'_n(k_m a)} \int_{-h}^0 N_n(\zeta) Z_m(\zeta) d\zeta \right] \end{aligned} \quad (50)$$

ここで、

$$\begin{aligned} \mathcal{P}[f_n(r)] = & H_n(k_0 r) \int_a^r J_n(k_0 \rho) f_n(\rho) \rho d\rho - J_n(k_0 r) F_n(r) \\ & + H_n(k_0 r) \frac{J'_n(k_0 a) F_n(a)}{H'_n(k_0 a)} \\ \mathcal{E}[f_n(r)] = & K_n(k_m r) \int_a^r I_n(k_m \rho) f_n(\rho) \rho d\rho \\ & + I_n(k_m r) \int_r^R K_n(k_m \rho) f_n(\rho) \rho d\rho \\ & - K_n(k_m r) \frac{I'_n(k_m a)}{K'_n(k_m a)} \int_a^R K_n(k_m \rho) f_n(\rho) \rho d\rho \end{aligned}$$

ディフラクション問題では $N_n(z) = 0$ となる。

4.2 (2,1) 次オーダー $\phi_{2j}^{(0)}$ ポテンシャルの解

基本的に $\tilde{\psi}_{js}$ ポテンシャルの場合と同様の方法を用いるが、以下に示す支配方程式と境界条件とを満足するような Green 関数を必要とする点が異なる。

$$\Delta G(P, Q) = -4\pi\delta(P, Q) \quad Q \in V \quad (51)$$

$$\frac{\partial G}{\partial \zeta} = 0 \quad Q \in S_F \quad (52)$$

$$\frac{\partial G}{\partial \zeta} = 0 \quad Q \in S_B \quad (53)$$

$$\frac{\partial G}{\partial \rho} \rightarrow 0 \quad Q \in S_\infty \quad (54)$$

ここで、

$$G(r, \theta, z; \rho, \vartheta, \zeta) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} g_n(r, z; \rho, \zeta) e^{in(\theta-\vartheta)}$$

とすると、(51) ~ (54) 式の境界値問題を解くことにより、著者の一人 (一色) は次式の通り $g_n(r, z; \rho, \zeta)$ の

固有関数展開表示を導出した。

$$\begin{aligned} g_n(r, z; \rho, \zeta) = & \begin{cases} -\frac{2}{h} \begin{pmatrix} \ln r \\ \ln \rho \end{pmatrix} \\ + \frac{4}{h} \sum_{m=1}^{\infty} \begin{pmatrix} I_n(\frac{m\pi}{h}\rho) K_n(\frac{m\pi}{h}r) \\ I_n(\frac{m\pi}{h}r) K_n(\frac{m\pi}{h}\rho) \end{pmatrix} \\ \cos \frac{m\pi}{h}(z+h) \cos \frac{m\pi}{h}(\zeta+h) \quad , (n=0) \\ \frac{1}{h|n|} \begin{pmatrix} (\frac{\rho}{r})^{|n|} \\ (\frac{r}{\rho})^{|n|} \end{pmatrix} \\ + \frac{4}{h} \sum_{m=1}^{\infty} \begin{pmatrix} I_n(\frac{m\pi}{h}\rho) K_n(\frac{m\pi}{h}r) \\ I_n(\frac{m\pi}{h}r) K_n(\frac{m\pi}{h}\rho) \end{pmatrix} \\ \cos \frac{m\pi}{h}(z+h) \cos \frac{m\pi}{h}(\zeta+h) \quad , (n \neq 0) \end{cases} \\ , \quad \begin{pmatrix} r > \rho \\ r < \rho \end{pmatrix} \end{aligned} \quad (55)$$

$\phi_{21}^{(0)}$ ポテンシャルの支配方程式と境界条件 (20) ~ (24) 式及び Green 関数の支配方程式と境界条件 (51) ~ (54) 式とを (26) 式に代入すると、ディフラクション問題の場合次式を得る。

$$\begin{aligned} \begin{pmatrix} 2\phi_{21n}^{(0)}(P) \\ 0 \end{pmatrix} = & \int_{-h}^0 \phi_{21n}^{(0)}(a, \zeta) \frac{\partial g_n(r, z; a, \zeta)}{\partial \rho} a d\zeta \\ & + \int_a^r g_n(r, z; \rho, 0)_{r \geq \rho} f_{21n}^{(0)}(\rho) \rho d\rho \\ & + \int_r^R g_n(r, z; \rho, 0)_{r < \rho} f_{21n}^{(0)}(\rho) \rho d\rho \\ & + \int_{-h}^0 \left(g_n(r, z; R, \zeta) \frac{\partial \phi_{21n}^{(0)}(R, \zeta)}{\partial \rho} \right. \\ & \left. - \phi_{21n}^{(0)}(R, \zeta) \frac{\partial g_n(r, z; R, \zeta)}{\partial \rho} \right) R d\zeta , \\ & \begin{pmatrix} P \in V \\ P \notin V \end{pmatrix} \end{aligned} \quad (56)$$

control 界面 S_R 上において、 $R \rightarrow \infty$ のとき、 $\phi_{21n}^{(0)}(R, \zeta)$ 、 $g_n(r, z; R, \zeta)$ は次の形に近づく。

$$\phi_{21n}^{(0)}(R, \zeta) \sim \phi_{21n}^{(0)}(R, 0) \cos \frac{m\pi}{h}(\zeta+h) \quad (57)$$

$$\begin{aligned} g_n(r, z; R, \zeta) \sim & \begin{pmatrix} -\frac{2}{h} \ln R \\ \frac{1}{h|n|} \left(\frac{r}{R} \right)^{|n|} \end{pmatrix} , \\ & \begin{pmatrix} n=0 \\ n \neq 0 \end{pmatrix} \end{aligned} \quad (58)$$

このとき、control 界面 S_R 上の積分 I_R は、

$$\bar{Z}_m(z) = \cos \frac{m\pi}{h}(z+h), \quad (m=0, 1, 2, \dots) \quad (59)$$

として、次式となる。

$$I_R = \begin{cases} \left[-2R \ln R \frac{\partial \phi_{21n}^{(0)}(R, 0)}{\partial \rho} + 2\phi_{21n}^{(0)}(R, 0) \right] \bar{Z}_0(z), & (n=0) \\ \left[\frac{r^{|n|}}{|n|R^{|n|-1}} \frac{\partial \phi_{21n}^{(0)}(R, 0)}{\partial \rho} + \frac{r^{|n|}}{R^{|n|}} \phi_{21n}^{(0)}(R, 0) \right] \bar{Z}_0(z), & (n \neq 0) \end{cases} \quad (60)$$

一方、(56) 式における自由表面 S_F 上積分の第2項のうち無限遠でポテンシャルに寄与する項 I_{FR}^2 は、

$$I_{FR}^2 = F_n(R) \bar{Z}_0(z) \quad (61)$$

となる。ここで、

$$F_n(\rho) = \int \left(\frac{-\frac{2}{h} \ln \rho}{\frac{1}{h|n|} \frac{r^{|n|}}{\rho^{|n|}}} \right) f_{21n}^{(0)}(\rho) \rho d\rho, \quad \begin{pmatrix} n=0 \\ n \neq 0 \end{pmatrix} \quad (62)$$

とする。 $F_n(R) \rightarrow 0$ でなければ、control 界面 S_R からの寄与 I_R は、積分方程式の唯一解の存在を保証するために $F_n(R)$ の値を打消さなければならない。これは、 $R \rightarrow \infty$ の時のポテンシャルが次の無限遠条件を課されることを意味する。即ち、

$$\begin{aligned} & \left(\frac{-2R \ln R}{\frac{r^{|n|}}{|n|R^{|n|-1}}} \right) \frac{\partial \phi_{21n}^{(0)}(R, 0)}{\partial \rho} \\ & + \left(\frac{2}{\frac{r^{|n|}}{R^{|n|}}} \right) \phi_{21n}^{(0)}(R, 0) = -F_n(R), \quad \begin{pmatrix} n=0 \\ n \neq 0 \end{pmatrix} \end{aligned} \quad (63)$$

今、参照点 P を円柱浮体に内接する面 $r = a^-$ 上にとる。更に、円柱面上の $\phi_{21n}^{(0)}$ を直交固有関数列

$$\phi_{21n}^{(0)}(a, \zeta) = \sum_{m=0}^{\infty} A_{nm} \bar{Z}_m(z) \quad (64)$$

に展開し、(63) 式の無限遠条件が成立つとすれば、次式を得る。即ち、

$(n=0, m=0)$ のとき、

$$A_{00} = \frac{1}{h} \int \ln \rho f_{21n}^{(0)}(\rho) \rho d\rho \Big|_{\rho=a} \quad (65)$$

$(n \neq 0, m=0)$ のとき、

$$A_{n0} = \frac{-a^{|n|}}{h|n|} \int \rho^{-|n|+1} f_{21n}^{(0)}(\rho) d\rho \Big|_{\rho=a} \quad (66)$$

$(m=1, 2, \dots)$ のとき、

$$A_{nm} = \frac{-2(-1)^m}{am\pi K_n(\frac{m\pi}{h}a)} \int_a^\infty K_n(\frac{m\pi}{h}\rho) f_{21n}^{(0)}(\rho) \rho d\rho \quad (67)$$

従って、流体内の任意参照点 P ($P \in V$) におけるポテンシャルとして次式を得る。即ち、

$$\begin{aligned} \phi_{21n}^{(0)}(r, z) = & \begin{pmatrix} 0 \\ -\frac{a^{2|n|}}{2h|n|r^{|n|}} \int \rho^{-|n|+1} f_{21n}^{(0)}(\rho) d\rho \Big|_{\rho=a} \end{pmatrix} \\ & + \frac{1}{h} \begin{pmatrix} -\ln r \int_a^r f_{21n}^{(0)}(\rho) \rho d\rho \\ \frac{1}{2|n|r^{|n|}} \int_a^r \rho^{|n|+1} f_{21n}^{(0)}(\rho) d\rho \end{pmatrix} \\ & + \frac{1}{h} \begin{pmatrix} \int_a^r \ln \rho f_{21n}^{(0)}(\rho) \rho d\rho \Big|_{\rho=r} \\ \frac{-r^{|n|}}{2|n|} \int \rho^{-|n|+1} f_{21n}^{(0)}(\rho) d\rho \Big|_{\rho=r} \end{pmatrix} \\ & - \frac{2}{h} \sum_{m=1}^{\infty} (-1)^m \frac{I'_n(\frac{m\pi}{h}a)}{K'_n(\frac{m\pi}{h}a)} K_n(\frac{m\pi}{h}r) \\ & \quad \int_a^R K_n(\frac{m\pi}{h}\rho) f_{21n}^{(0)}(\rho) \rho d\rho \bar{Z}_m(z) \\ & + \frac{2}{h} \sum_{m=1}^{\infty} (-1)^m K_n(\frac{m\pi}{h}r) \\ & \quad \int_a^r I_n(\frac{m\pi}{h}\rho) f_{21n}^{(0)}(\rho) \rho d\rho \bar{Z}_m(z) \\ & + \frac{2}{h} \sum_{m=1}^{\infty} (-1)^m I_n(\frac{m\pi}{h}r) \\ & \quad \int_r^R K_n(\frac{m\pi}{h}\rho) f_{21n}^{(0)}(\rho) \rho d\rho \bar{Z}_m(z), \quad \begin{pmatrix} n=0 \\ n \neq 0 \end{pmatrix} \end{aligned} \quad (68)$$

5. 速度ポテンシャルの固有関数解と無限遠条件

まず、(1,0) 次オーダー ϕ_1 ポテンシャル及び (0,1) 次オーダー ϕ_{0j} ポテンシャルは、本計算例の場合、それぞれ以下の通り良く知られた形をとる。

$$\phi_1 = \phi_{10} + \phi_{17} =$$

$$AZ_0(z) \sum_{n=-\infty}^{\infty} \tilde{B}_n \left(J_n(k_0 r) + B_n H_n(k_0 r) \right) e^{in\theta} \left\{ -\frac{k_0 H'_n(k_0 a)}{k_m K'_n(k_m a)} K_n(k_m r) \right\} \quad (69)$$

ここで、

$$A = \frac{\zeta_a g}{i\omega}, \tilde{B}_n = e^{in(\frac{\pi}{2}-\beta)}, B_n = -\frac{J'_n(k_0 a)}{H'_n(k_0 a)},$$

$$Z_0(z) = \frac{\cosh k_0(z+h)}{\cosh k_0 h}$$

及び

$$\phi_{0j} = \phi_{01} = -\frac{a^2}{r} \cos \theta \quad (70)$$

また、(1,1) 次オーダー $\hat{\psi}_{js}$ ポテンシャルの固有関数解は松井ら⁷⁾によって得られている。自由表面条件の非同次項を2つの部分に分解して考える。

$$\hat{f}_{17n} = \hat{f}_{17n}^U + \hat{f}_{17n}^S \quad (71)$$

$$\hat{f}_{17}^U = -2i \frac{\partial \phi_{17}}{\partial x_j} - 2k_0 \cos \beta \phi_{17} \quad (72)$$

$$\hat{f}_{17}^S = 2i \nabla \phi_{01} \cdot \nabla (\phi_{10} + \phi_{17}) - i(\phi_{10} + \phi_{17}) \frac{\partial^2 \phi_{01}}{\partial z^2} \quad (73)$$

つまり、

$$\hat{f}_{17n}^U = Ak_0 D_n H_n(k_0 r) \quad (74)$$

ここで、

$$D_n = i\tilde{B}_{n-1}B_{n-1} - i\tilde{B}_{n+1}B_{n+1} - 2\cos \beta \tilde{B}_n B_n$$

$$\hat{f}_{17n}^S = iAk_0 \frac{a^2}{r^2} \left\{ \tilde{B}_{n-1} (J_{n-2}(k_0 r) + B_{n-1} H_{n-2}(k_0 r)) - \tilde{B}_{n+1} (J_{n+2}(k_0 r) + B_{n+1} H_{n+2}(k_0 r)) \right\} \quad (75)$$

従って、 $\hat{\psi}_{17}$ の解も2つの部分からなる。

$$\hat{\psi}_{17} = \hat{\psi}_{17}^U + \hat{\psi}_{17}^S$$

即ち、

$$\hat{\psi}_{17n}^U(r, z) = AD_n \left\{ C_0 Z_0(z) \left[r H'_n(k_0 r) + C_U H_n(k_0 r) \right] + 2k_0 \sum_{m=1}^{\infty} \frac{C_m Z_m(z)}{k_0^2 + k_m^2} \left[H_n(k_0 r) \right. \right.$$

ここで、

$$C_U = a \left(1 - \frac{n^2}{k_0^2 a^2} \right) \frac{H_n(k_0 a)}{H'_n(k_0 a)}$$

及び

$$\begin{aligned} \hat{\psi}_{17n}^S(r, z) = & AC_0 Z_0(z) \left\{ \frac{ia^2}{r} \left[\tilde{B}_{n-1} (J_{n-1}(k_0 r) + B_{n-1} H_{n-1}(k_0 r)) + \tilde{B}_{n+1} (J_{n+1}(k_0 r) + B_{n+1} H_{n+1}(k_0 r)) \right] + C_S H_n(k_0 r) \right\} \\ & + 2 \sum_{m=1}^{\infty} C_m Z_m(z) \mathcal{E}[\hat{f}_{17n}^S(r)] \end{aligned} \quad (77)$$

ここで、

$$C_S = -\frac{2}{\pi k_0^2 a H'_n(k_0 a)} \left(\frac{\tilde{B}_{n-1}}{H'_{n-1}(k_0 a)} + \frac{\tilde{B}_{n+1}}{H'_{n+1}(k_0 a)} \right)$$

次に、問題の高次オーダー・ポテンシャルを解くが、たとえば、(1,2) 次オーダー $\hat{\psi}_{js}$ ポテンシャルもまたその自由表面条件 (16) 式の非同次項 $\hat{f}_{17}$ を3つの部分に分割して考える。

$$\tilde{f}_{17n} = \tilde{f}_{17n}^T + \tilde{f}_{17n}^U + \tilde{f}_{17n}^S \quad (78)$$

$$\begin{aligned} \tilde{f}_{17}^T = & -i \frac{\partial \phi_{17}}{\partial x_j} - k_0 \cos \beta \phi_{17} + 2i \nabla \phi_{01} \cdot \nabla (\phi_{10} + \phi_{17}) \\ = & \frac{1}{2} \hat{f}_{17}^U + \hat{f}_{17}^S \end{aligned} \quad (79)$$

$$\tilde{f}_{17}^U = 2\nu \hat{\psi}_{17}^U \quad (80)$$

$$\begin{aligned} \tilde{f}_{17}^S = & 2\nu \hat{\psi}_{17}^S - i\phi_{01} \left\{ \frac{\partial^2 (\phi_{10} + \phi_{17})}{\partial z^2} - \nu^2 (\phi_{10} + \phi_{17}) \right\} \end{aligned} \quad (81)$$

つまり、

$$\begin{aligned} \tilde{f}_{17n}^U = & 2\nu AD_n \left\{ C_0 \left[r H'_n(k_0 r) + C_U H_n(k_0 r) \right] + 2k_0 \sum_{m=1}^{\infty} \frac{C_m}{k_0^2 + k_m^2} \left[H_n(k_0 r) - \frac{k_0 H'_n(k_0 a)}{k_m K'_n(k_m a)} K_n(k_m r) \right] \right\} \end{aligned} \quad (82)$$

$$\begin{aligned} \tilde{f}_{17n}^S = & A \left\{ \left(2\nu C_0 + \frac{k_0^2 - \nu^2}{2} \right) \frac{ia^2}{r} \left[\tilde{B}_{n-1}(J_{n-1}(k_0 r)) \right. \right. \\ & + B_{n-1}H_{n-1}(k_0 r)) \\ & + \tilde{B}_{n+1}(J_{n+1}(k_0 r) + B_{n+1}H_{n+1}(k_0 r)) \left. \right] \\ & + 2\nu C_0 C_S H_n(k_0 r) \left. \right\} \\ & + 4\nu \sum_{m=1}^{\infty} C_m \mathcal{E}[\tilde{f}_{17n}^S(r)] \end{aligned} \quad (83)$$

従って、 $\tilde{\psi}_{17}$ の解も3つの部分からなる。即ち、

$$\tilde{\psi}_{17} = \tilde{\psi}_{17}^T + \tilde{\psi}_{17}^U + \tilde{\psi}_{17}^S$$

固有関数の漸近展開式を代入すると、 $\tilde{\psi}_{17}^U$ ポテンシャルの無限遠条件は次式となる。

$$\begin{aligned} & \frac{\partial \tilde{\psi}_{17n}^U(R, 0)}{\partial r} - ik_0 \tilde{\psi}_{17n}^U(R, 0) \\ & \sim -\frac{2C_0^2 \nu AD_n}{k_0^2} \sqrt{\frac{2}{\pi}} e^{i[-\frac{(2n+1)\pi}{4}]} \sqrt{k_0 R} e^{ik_0 R} \\ & + 2iC_0 \nu AD_n \left(\frac{C_0 C_U}{k_0} + 2 \sum_{m=1}^{\infty} \frac{C_m}{k_0^2 + k_m^2} \right) \\ & \sqrt{\frac{2}{\pi}} e^{i[-\frac{(2n+1)\pi}{4}]} \frac{1}{\sqrt{k_0 R}} e^{ik_0 R} \\ & \text{as } R \rightarrow \infty \end{aligned} \quad (84)$$

このとき、 $\tilde{\psi}_{17n}^U(r, z)$ は次式の通り表現できる。

$$\begin{aligned} \tilde{\psi}_{17n}^U(r, z) = & \nu AD_n C_0 Z_0(z) \left\{ -\frac{C_0}{k_0^2} \left[k_0 r^2 H_n(k_0 r) \right. \right. \\ & + 2r H'_n(k_0 r) - \left(k_0 a^2 + \frac{2n^2 H_n(k_0 a)}{k_0^2 a H'_n(k_0 r)} H_n(k_0 r) \right) \left. \right] \\ & + 2 \left(2 \sum_{m=1}^{\infty} \frac{C_m}{k_0^2 + k_m^2} \right) (r H'_n(k_0 r) + C_U H_n(k_0 r)) \\ & + 2(C_0 C_U) \frac{1}{k_0} (r H'_n(k_0 r) + C_U H_n(k_0 r)) \\ & + 8k_0 \sum_{m=1}^{\infty} \frac{C_m}{k_0^2 + k_m^2} \frac{1}{k_0^2 + k_m^2} \\ & \left(\frac{k_0 H'_n(k_0 a)}{k_m K'_n(k_m a)} K_n(k_m r) - H_n(k_0 r) \right) \left. \right\} \\ & + 2 \sum_{m=1}^{\infty} C_m Z_m(z) \mathcal{E}[\tilde{f}_{17n}^U(r)] \end{aligned} \quad (85)$$

また、 $\tilde{\psi}_{17}^S$ ポテンシャルの無限遠条件は次式となる。

$$\begin{aligned} & \frac{\partial \tilde{\psi}_{17n}^S(R, 0)}{\partial r} - ik_0 \tilde{\psi}_{17n}^S(R, 0) \\ & \sim -Aa^2 C_0 \left(2\nu C_0 + \frac{k_0^2 - \nu^2}{2} \right) \\ & (\tilde{B}_{n-1} + \tilde{B}_{n+1}) \sqrt{\frac{2}{\pi}} e^{i[\frac{(2n+1)\pi}{4}]} \\ & \frac{\ln R + \frac{i\pi}{2}}{\sqrt{k_0 R}} \frac{1}{e^{ik_0 R}} \\ & + i \frac{2A\nu C_0^2 C_S}{k_0} \sqrt{\frac{2}{\pi}} e^{i[-\frac{(2n+1)\pi}{4}]} \frac{1}{\sqrt{k_0 R}} e^{ik_0 R} \\ & \text{as } R \rightarrow \infty \end{aligned} \quad (86)$$

このとき、 $\tilde{\psi}_{17n}^S(r, z)$ は次式の通り表現できる。

$$\begin{aligned} \tilde{\psi}_{17n}^S(r, z) = & AC_0 Z_0(z) \left\{ \left(2\nu C_0 + \frac{k_0^2 - \nu^2}{2} \right) \frac{1}{k_0} \left[-ia^2 \right. \right. \\ & \left\{ \tilde{B}_{n-1} \left(\frac{\partial J_n(k_0 r)}{\partial n} + B_{n-1} \frac{\partial H_n(k_0 r)}{\partial n} \right) \right. \right. \\ & + \tilde{B}_{n+1} \left(\frac{\partial J_n(k_0 r)}{\partial n} + B_{n+1} \frac{\partial H_n(k_0 r)}{\partial n} \right) \left. \right\} \\ & - ia^2 \ln r \left\{ \tilde{B}_{n-1}(J_{n-1}(k_0 r) \right. \\ & + B_{n-1}H_{n-1}(k_0 r)) \\ & - \tilde{B}_{n+1}(J_{n+1}(k_0 r) + B_{n+1}H_{n+1}(k_0 r)) \left. \right\} \\ & + \frac{ia^2}{H'_n(k_0 a)} \left\{ \tilde{B}_{n-1} \left(\frac{\partial J_n(k_0 r)}{\partial n} \right. \right. \\ & + B_{n-1} \frac{\partial H_n(k_0 r)}{\partial n} \left. \right) \\ & - \tilde{B}_{n+1} \left(\frac{\partial J_n(k_0 r)}{\partial n} + B_{n+1} \frac{\partial H_n(k_0 r)}{\partial n} \right) \\ & - \frac{n}{k_0 a} \left[\tilde{B}_{n-1} \left(\frac{\partial J_n(k_0 r)}{\partial n} + B_{n-1} \frac{\partial H_n(k_0 r)}{\partial n} \right) \right. \\ & - \tilde{B}_{n+1} \left(\frac{\partial J_n(k_0 r)}{\partial n} + B_{n+1} \frac{\partial H_n(k_0 r)}{\partial n} \right) \left. \right] \\ & + \tilde{B}_{n-1} (J'_n(k_0 a) \ln a + B_{n-1} H'_n(k_0 a) \ln a) \\ & - \tilde{B}_{n+1} (J'_n(k_0 a) \ln a + B_{n+1} H'_n(k_0 a) \ln a) \left. \right\} \\ & \left. H_n(k_0 r) \right] \\ & + \left(2\nu C_0 C_S \right) \frac{1}{k_0} \left[r H'_n(k_0 r) + C_U H_n(k_0 r) \right] \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& +4\nu \sum_{m=1}^{\infty} \frac{C_m}{k_0^2 + k_m^2} \left[\frac{ia^2}{r} \left\{ \ddot{B}_{n-1}(J_{n-1}(k_0 r)) \right. \right. \\
& \quad \left. \left. + B_{n-1}H_{n-1}(k_0 r) \right\} \right. \\
& \quad \left. + \ddot{B}_{n+1}(J_{n+1}(k_0 r) + B_{n+1}H_{n+1}(k_0 r)) \right\} \\
& \quad - \frac{2}{A} \mathcal{E}[\hat{f}_{17n}^S(r)] \\
& \quad - \frac{2}{\pi k_0^2 a H'_n(k_0 a)} \left(\frac{\ddot{B}_{n-1}}{H'_{n-1}(k_0 a)} \right. \\
& \quad \left. + \frac{\ddot{B}_{n+1}}{H'_{n+1}(k_0 a)} \right) H_n(k_0 r) \left. \right] \left. \right\} \\
& + 2 \sum_{m=1}^{\infty} C_m Z_m(z) \mathcal{E}[\hat{f}_{17n}^S(r)] \quad (87)
\end{aligned}$$

6. 波漂流付加質量の計算結果

(25) 式より、波漂流付加質量 A_{211} を計算することができ、その計算結果を Fig.1 に示す。図の曲線は、波数に対する波漂流付加質量の変化を表している。曲線 A は (1,0) 次オーダー ϕ_1 線形ポテンシャル、(0,1) 次オーダー ϕ_{0j} 攪乱ポテンシャル及び (1,1) 次オーダー $\hat{\psi}_j$ ポテンシャルを A_{211} の計算に考慮したもの、曲線 B はそれらに加えて (1,2) 次オーダー $\tilde{\psi}_j$ ポテンシャルを考慮したもの、曲線 C は更に (2,1) 次オーダー $\phi_{2j}^{(0)}$ ポテンシャルを考慮したものである。Fig.1 より、波漂流付

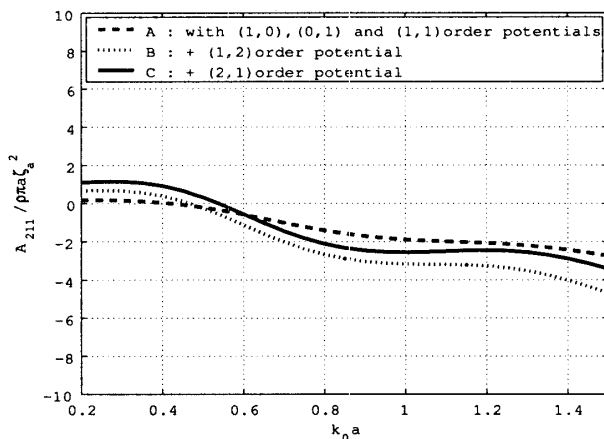


Fig. 1 Analytical solutions of wave-drift added mass (uniform cylinder)

加質量 A_{211} は、 ϕ_1 、 ϕ_{0j} 及び $\hat{\psi}_j$ ポテンシャルに加えて、高次オーダーの $\tilde{\psi}_j$ 並びに $\phi_{2j}^{(0)}$ ポテンシャルを計算に組入れるごとに少しずつ変化することが分る。

7. 結 言

本報において、波漂流付加質量の理論計算を行うために必要な高次オーダーの $(\zeta_a, \sigma) = (1, 2)$ 次 $\tilde{\psi}_j$ 及び

(2,1) 次 $\phi_{2j}^{(0)}$ ポテンシャルを解く方法を示した。これにより、従来は不可能であった長周期運動の加速度比例成分である波漂流付加質量の数学的定式化が可能となり、その結果、波漂流付加質量の具体的計算結果も得られた。

本報のような簡単な例における計算を、実機又は別報⁹⁾の実験条件に適合したディフラクション及びラディエーション問題或いは他の水平低周波数運動も含めた浮遊円柱又は円柱列浮体問題に一般化することは、計算は複雑にはなるが原理上の困難さはないと考えられる。

参 考 文 献

- 1) 吉田基樹、鮑偉光、木下健 2004 波漂流付加質量のポテンシャル理論. 日本造船学会論文集、第 194 号.
- 2) Nossen, J., Grue, J. and Palm, E. 1991 Wave forces on three-dimensional floating bodies with small forward speed. *J. Fluid Mech.* **227**, 135-160.
- 3) Emmerhoff, O. J. and Sclavounos, P. D. 1992 The slow-drift motion of arrays of vertical cylinders. *J. Fluid Mech.* **242**, 31-50.
- 4) Kinoshita, T. and Bao, W. 1996 Hydrodynamic forces acting on a circular cylinder oscillating in waves and slow current. *J. Mar. Sci. Technol.* **1**, 155-173.
- 5) Kinoshita, T., Bao, W. and Sunahara, S. 1997 Hydrodynamic forces acting on a cylinder array oscillating in waves and a small current. *J. Mar. Sci. Technol.* **2**, 135-147.
- 6) 吉田基樹 2003 波浪中加速度運動浮体に働く非線形相互作用流体力について. 東京大学大学院工学系研究科博士学位論文.
- 7) 松井徹哉、李相曄、佐野公俊 1991 波と流れの共存場に置かれた鉛直円柱に加わる流体力. 日本造船学会論文集、第 170 号、277-287.
- 8) Fenton, J. D. 1978 Wave forces on vertical bodies of revolution. *J. Fluid Mech.* **85**, part2, 241-255.
- 9) 吉田基樹、石橋和子、鮑偉光、木下健 2004 波漂流付加質量の実験と計算. 日本造船学会論文集、第 194 号.