速度ポテンシャルと流れ関数について

（その5　翼型理論（続き）流体から受ける力）

1.　後縁からのの渦と翼型周り循環

前号までに、2次元円柱周り理想流体の非回転運動の式及び等角写像を用いて翼型周りの流れへの変換式と流体から受ける力の公式（Blasiusの式）を求め、更に、2次元翼型が受ける流体力（揚力(P)）を与えるKutta-Joukowskyの定理（$P=\rho V\Gamma$）を求めました。ここで、ρは流体の密度、Vは速度、Γは循環です。即ち、循環（Γ）が同じであれば揚力は円柱でも翼型でも同じですが、後縁が角となる翼型では物理的考察が必要です。即ち、等角写像の式では後縁では$d\zeta/dz=0$ですから、変換された速度は無限大になります。実際にはこんな事は起こらず、必ず有限の速度となります。以下がこの問題に関する物理的な理解です。まず、後縁では回転運動、言い換えれば後縁に沿って長い渦が発生するとします。ところで、渦は流体内に端を持つことは出来ませんから、どこかにこれと同じ強さを持つ渦があって、無限遠の点で両方の渦は繋がっていなければなりません。即ち後縁の循環を打ち消す循環がどこかに存在せねばなりませんが、これは翼型のまわりに発生すると考えます。後縁に発生する渦は後方に流れて行きますが、翼型の周りの渦は残ります。翼型周りに循環が出来ると岐点位置が移動しますが、この現象が次々に連続して起こり、岐点の位置は次第に後方に移動して、岐点と後縁が一致するようになります。この状態では流体は後縁を巡る事はなくなるので、速度は無限値となることはなく、後縁での渦の発生も止まり、定常状態となります。この状態での翼周り循環がKutta-Joukowskyの定理に現れる循環（Γ）で、翼型形状や迎角によって定まります。図-1参照。

翼型の写像である円上の$z=R$の位置が翼型の後縁に対応するならば、この点が岐点となるには、$\Gamma=4\pi Vk\sin(\alpha-\chi)$となります。$\alpha$は迎角、$\chi$は無揚力角、kはz面への写像による一様流速の変化を表します。

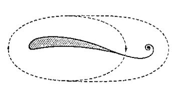

図-1

2.　Joukowsky翼型

数式が並びますが翼理論への入り口です。写像関数を$\zeta=1/2*(z+c^2/z)$と与えます。

この式は$\zeta 1=z=r*\exp(i\theta)$の円周上にzをとり、これと逆符号の偏角をもつ動径上に$\zeta 2=c^2/z=(c^2/r)\exp(-i*\theta)$をとるとき、この点とzを結ぶ直線の二等分点が翼型上の点であることを意味します(図-2)。

円$\zeta 1$の中心を表す式を

$m=l*\exp(i*\delta)$とすれば、$\zeta 1$は次式のような円に対応します。

$(x-1*\cos\delta)^2+(y-1*\sin\delta)^2=a^2$

一方、$\zeta 2$は、変換過程を省略しますが、中心（xo、yo）が$xo=c^2*l\cos\delta/(a^2-1^2)$, $yo=c^2*l\sin\delta/(a^2-1^2)$となる円の式、$(x-(c^2*l\cos\delta)/(a^2-1^2))^2+(y-(c^2*l\sin\delta)/(a^2-1^2))^2=c^2$に対応します。

z面の原点を円の中心に置換え（Z）、後縁と実軸が交わる点の条件から循環を求めます。まず、$z=\exp(-i*\beta)*Z+m$と変換します。

Z面にて、円の周りの速度関数は、

$dw/dZ=Vz\ \exp(-i*\alpha)-Vz\ \exp(i*\alpha)/Z^2+i*\Gamma/4\pi Z$ですから、

これが後縁Z=aにおいて0ですから、

$\Gamma=4\pi Vz\sin\alpha$となります。

翼型への変換は、$\zeta=1/2*(z+c^2/z)$
$=1/2\exp(-i*\beta)Z+1/2m+\cdots\cdots$

無限遠方での速度関数より

$(dw/d\zeta)=(dw/dZ)*(dZ/d\zeta)$
$=2Vz\exp(-i*(\alpha z-\beta))$が得られ、円柱周りの式に対し、$\zeta$面の速度と迎角が$V=2Vz$、$\alpha=\alpha z-\beta$となり、循環$\Gamma$は$4\pi aV/2\sin(\alpha+\beta)$、揚力Pは

$\rho V\Gamma=(\rho V^2)*2\pi a\sin(\alpha+\beta)$

として求められます。

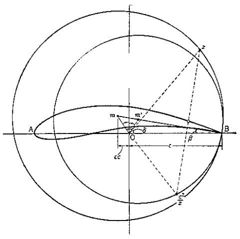

図-2

ここで、翼型の前、後縁、弦長、半径等が以下のように得られます。

後縁　$\zeta t=(\zeta)z=c=c$

前縁　$\zeta l=(\zeta)z=-c(1+2\varepsilon)$
$=-c(1+2\varepsilon+2\varepsilon^2)/(1+2\varepsilon)$
$\varepsilon c=-l\cos\delta$

弦長　$C=2c(1+\varepsilon)^2/(1+2\varepsilon)$

半径　$a=c(1+2\varepsilon)/\cos\beta$

揚力係数CLは以下の式となります。

$P=CL*/(1/2)\rho V^2*C$

$CL=2\pi((1+2\varepsilon)/(1+\varepsilon))*\sin(\alpha+\beta)/\cos\beta$

以上がKutta-Jouknowsky翼型の揚力係数です。簡単な翼形状に関する式を以下に示します。

$\varepsilon=0$の場合；

+C,-C,mを通る厚さゼロの翼型

$CL=2\pi\sin(\alpha+\beta)/\cos\beta$　（図-3）

$\beta=0$の場合；

肉厚を有する上下対称翼

$CL=2\pi(1+2\varepsilon)\sin\alpha/(1+\varepsilon)$　（図-4）

$\beta=0$、$\alpha=0$の場合；

平板

$CL=2\pi\sin\alpha$　（図-5）

一様流中の静止翼型には原点の周りにモーメントが発生します。これに関するBlasiusの式の詳細は他の教科書に譲ります。

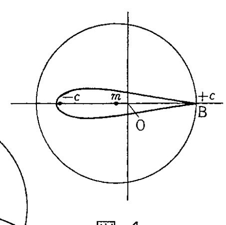

図-4

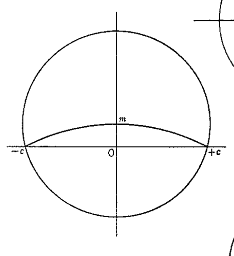

図-3

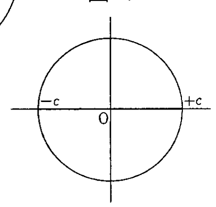

図-5