

操作変数を用いた同時転換自己回帰モデルの推定[†]

佐藤 整 尚*

Estimation of SSAR Model by Using Instrumental Variable Method

Seisho Sato*

The simultaneous switching autoregressive (SSAR) model proposed by Kunitomo and Sato (1996) is a Markovian nonlinear time series model. We investigate some properties of the maximum likelihood estimator (ML) and propose another estimating method which is not based on the likelihood function, but is used the instrumental variables. When the asymmetrical distribution on the disturbances is assumed, the ML method based on the Gaussian disturbances cannot give the correct estimates even asymptotically. However, the estimator proposed by this paper is valid for the cases of asymmetrical disturbances.

上昇・下降で非対称な動きをみせる時系列モデルとして、SSARモデルが提案されている。本稿ではSSARモデルのパラメータ推定について、最尤法による推定の性質と問題点を論じた。シュミレーションによる結果では、ある非対称な分布形をもつ誤差項によって発生したデータに対して、ガウス尤度に基づく最尤法を使ってSSARモデルを推定すると、誤った結果を導きやすいことがわかった。この点を補完する方法として、操作変数法を用いた推定法を提案し、その性質を調べた。最後に、貸出金利と河川の流量データにこの方法を適用してみた。

1. はじめに

Neftci [11] や Hamilton [4] らによって経済時系列における非対称性についての研究が本格的に始められ、注目されている。最近では Kunitomo and Sato [8], [10], 国友・佐藤 [9] において、上昇局面と下降局面で非対称な動きをする時系列モデルが提案され、証券市場の分析等に応用されている。この論文で扱われた同時転換自己回帰モデル (SSARモデル) は Fair and Jaffee [3] に始まる不均衡市場における計量モデルから導出されたもので、非対称的なマーケット・メカニズムに対するモデリングであると考えられる。また、統計モデルの観点からは非線型時系列モデルとして捉えられ、理論的考察がなされている。SSARモデルのパラメータ推定については Sato and Kunitomo [13] において最尤法による推定が扱われている。本稿では最尤法を用いたときに生ずる問題点を明らかにし、それを補う方法として、操作変数をもちいた補助的な推定法を考え、これらを併用する方法を提案する。

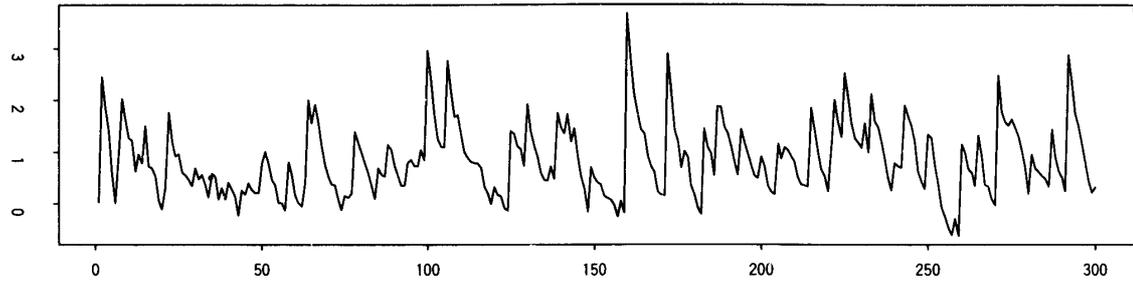
2. SSARモデル

本稿では以下のような定常非線形時系列モデルを扱う。

論文受付：1999年5月 受理：1999年8月

[†] 本論をまとめるにあたって、藤井光昭先生 (大学入試センター)、国友直人先生 (東京大学経済学部) ならびにレフェリーの方より貴重なコメントを頂きました。ここに感謝の意を表します。

* 統計数理研究所 予測制御研究系, 〒106-8569 港区南麻布 4-6-7

図1 SSAR $a=-0.2, b=0.8$

$$y_t = \begin{cases} \mu_a + ay_{t-1} + \sigma_a \varepsilon_t & (\Delta y_t \geq 0) \\ \mu_b + by_{t-1} + \sigma_b \varepsilon_t & (\Delta y_t < 0) \end{cases} \quad (2.1)$$

ただし、 $\Delta y = y_t - y_{t-1}$ で、 ε_t は独立に同一の分布に従い、 $E(\varepsilon_t) = 0, E(\varepsilon_t^2) = 1, E(\varepsilon_t^4) < \infty, \sigma_a > 0, \sigma_b > 0$ である。

上記はSSARモデル (Simultaneously Switching AutoRegressive model) のなかで一番簡単なケースである。SSARモデルは非対称性に関してAR(1)モデルを拡張したモデルと考えることができる。 y_{t-1} と ε_t が互いに独立であるという仮定をすると、このモデルが一意性をもつために以下のような整合条件が必要である。

$$\frac{\mu_a}{\sigma_a} = \frac{\mu_b}{\sigma_b} = r_\mu, \quad \frac{1-a}{\sigma_a} = \frac{1-b}{\sigma_b} = r \quad (2.2)$$

したがって、独立なパラメータ数は4になる。このとき(2.1)式のSSARモデルは

$$y_t = \begin{cases} \mu_a + ay_{t-1} + \sigma_a \varepsilon_t & (\varepsilon_t \geq ry_{t-1} - r_\mu) \\ \mu_b + by_{t-1} + \sigma_b \varepsilon_t & (\varepsilon_t < ry_{t-1} - r_\mu) \end{cases} \quad (2.3)$$

と書き直すことができ、マルコフ型の時系列モデルになる。

このSSARモデルの定常条件は以下の通りである。(証明に関してはKunitomo and Sato [8]を参照)。

(定常条件)

$$a < 1, \quad b < 1, \quad ab < 1 \quad (2.4)$$

以下では、この定常条件および整合条件が成り立っていると仮定する。

図1は正規乱数を用いて求めたSSARモデルに従う系列である。この図の場合は急激に上昇して、ゆっくり下降するサンプルパスであることがわかる。これはSSARモデルが持つ非対称性の一例である。また、Kunitomo and Sato [8]、国友・佐藤[9]ではより一般的な多次元SSARモデルも提案されているが、ここでは扱わない。

3. 最尤推定と操作変数法を使った推定

標本 $\{Y_1, Y_2, \dots, Y_{T-1}, Y_T\}$ が与えられた時のパラメータ推定について2つの方法を提案する。

3.1 最尤法 (ML) を用いた推定

(2.1)の ε_t が標準正規分布に従うと仮定し、標本 $\{Y_1, Y_2, \dots, Y_T\}$ が与えられた場合の最尤法による推定量を考える。

ΔY_t の正負についての情報を次のように表す.

$$S_t = \{I_t, I_{t-1}, I_{t-2}, \dots\} \quad (3.1)$$

ただし,

$$I_t = \begin{cases} 1 & \Delta Y_t \geq 0 \\ 0 & \Delta Y_t < 0 \end{cases}$$

この情報に基づいた, 条件付尤度を考える.

$$A_T = \{t | I_t = 1, t \leq T\}, \quad B_T = \{t | I_t = 0, t \leq T\} \quad (3.2)$$

とする時,

$$\begin{aligned} L(Y_T, Y_{T-1}, \dots | S_T) &= \prod_{t \in A_T} \frac{1}{\sigma_a} \phi\left(\frac{Y_t - \mu_a - aY_{t-1}}{\sigma_a}\right) \\ &\quad \times \prod_{t \in B_T} \frac{1}{\sigma_b} \phi\left(\frac{Y_t - \mu_b - bY_{t-1}}{\sigma_b}\right) \end{aligned} \quad (3.3)$$

ただし, $\phi(\cdot)$ は $N(0, 1)$ の密度関数である.

したがって,

$$\frac{\mu_a}{\sigma_a} = \frac{\mu_b}{\sigma_b}, \quad \frac{1-a}{\sigma_a} = \frac{1-b}{\sigma_b} \quad (3.4)$$

という制約条件の下で尤度関数 (3.3) を最大にするような $\mu_a, \mu_b, a, b, \sigma_a, \sigma_b$ を求めれば良い. この最尤推定量の性質については Sato and Kunitomo [13] が詳しく調べている. 例えば, 漸近正規性が成り立つ事も証明されている.

次に SSAR モデルについて,

$$H_0: a = b \quad (3.5)$$

$$H_1: a \neq b \quad (3.6)$$

という検定を考える. つまり, SSAR モデルで $a=b$ (このとき整合条件 (2.2) により, $\sigma_a = \sigma_b$) とすると AR(1) になる. そこで, AR(1) モデルとの比較をすることで非対称性が存在しているかを調べることができる. ここでも, ガウス尤度に基づいた尤度比検定で行なう方法が考えられる. 具体的には

$$-2 \log \frac{\max L(a, b | a=b)}{\max L(a, b)} \quad (3.7)$$

が漸近的に $\chi^2(1)$ に従うことを用いる.

上記で示した方法はいずれも尤度に基づく方法であった. したがって, 誤差項 ε_t の分布形に依存することが予想される.

3.2 操作変数法 (IV) を用いた推定

次に考える推定量は最尤法の弱点を補うために提案する方法で, 誤差項の分布に依存しないように工夫されている. 使っている性質は y_{t-1} と ε_t とが独立であるという点と, 真のパラメータのもとでは u_t の分散が 1 となることである. 具体的には標本 $\{Y_t\}, t=1, \dots, T$ に対して以下のような目的関数を考える.

$$Q_T(\theta) = F_T(\theta)' \Phi_T^{-1} F_T(\theta) \quad (3.8)$$

ただし, $\theta = (r, r\mu\sigma_a, \sigma_b)'$ とし,

$$F_T(\theta) = \frac{1}{T} \sum_{t=2}^T \begin{pmatrix} u_t \\ u_t^2 - 1 \end{pmatrix} \otimes \begin{pmatrix} 1 \\ Y_{t-1} \end{pmatrix} \quad (3.9)$$

$$\Phi_T = \Omega \otimes \frac{1}{T} \sum_{t=2}^T \begin{pmatrix} 1 \\ Y_{t-1} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ Y_{t-1} \end{pmatrix}' \quad (3.10)$$

$$u_t = \begin{cases} \frac{1}{\sigma_a} (Y_t - \mu_a - aY_{t-1}) & (\Delta Y_t \geq 0) \\ \frac{1}{\sigma_b} (Y_t - \mu_b - bY_{t-1}) & (\Delta Y_t < 0) \end{cases} \quad (3.11)$$

$$= \begin{cases} \frac{1}{\sigma_a} \Delta Y_t - r\mu - rY_{t-1} & (\Delta Y_t \geq 0) \\ \frac{1}{\sigma_b} \Delta Y_t - r\mu - rY_{t-1} & (\Delta Y_t < 0) \end{cases} \quad (3.12)$$

$$(3.13)$$

$$\Omega = E \left[\begin{pmatrix} \varepsilon_t \\ \varepsilon_t^2 - 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \varepsilon_t & \varepsilon_t^2 - 1 \end{pmatrix} \right] \quad (3.14)$$

ただし, \otimes は Kronecker 積を表す.

真のパラメータのもとでは $f_t = (u_t, u_t^2 - 1)'$ と操作変数 $w_t = (1, Y_{t-1})'$ が直交関係にある. 実際の推定では Ω が未知であるので, 以下の行列で代用することにする.

$$\hat{\Omega} = \frac{1}{T} \sum_{t=2}^T \begin{pmatrix} \hat{v}_t^2 & \hat{v}_t(\hat{v}_t^2 - 1) \\ \hat{v}_t(\hat{v}_t^2 - 1) & (\hat{v}_t^2 - 1)^2 \end{pmatrix} \quad (3.15)$$

とする. ただし, \hat{v}_t は仮定 H_0 のもとで $\{Y_t\}$ に AR(1) モデルを当てはめたときの残差をその標準偏差で割ったものである. この $\hat{\Omega}$ については Hansen [5] のような GMM 推定も考えられるが, 以下の取り扱いにおいて, (3.15) をあまり改善することにはならなかったので, (3.15) の形で用いることにする.

この目的関数 $Q_T(\theta)$ を最小にする θ を推定値 $\hat{\theta}_{IV}$ とする. この推定量の一致性と漸近正規性について以下の定理が成り立つ. (付録に略証を示した.)

定理 1 (2.1) 式の SSAR モデルが整合条件 (2.2) と定常条件 (2.4) を満たしているとする. パラメータ空間 Θ を真のパラメータ値 θ_0 の近傍とすると, (3.8) を最小にする $\theta = \hat{\theta}_{IV}$ は

$$\hat{\theta}_{IV} \xrightarrow{P} \theta_0 \quad (T \rightarrow \infty), \quad (3.16)$$

$$\sqrt{T}(\hat{\theta}_{IV} - \theta_0) \xrightarrow{\mathcal{L}} N(0, V) \quad (T \rightarrow \infty), \quad (3.17)$$

となる.

ただし,

$$V = \frac{1}{2} \left(\text{plim} \left(\frac{\partial^2 Q(\theta)}{\partial \theta \partial \theta'} \right) \Big|_{\theta = \theta_0} \right)^{-1} \quad (3.18)$$

である.

つぎに、この推定量に基づく検定を考える。いま、検定すべきパラメータの制約を $h(\theta)$ で表し、

$$H_0: h(\theta)=0 \quad (3.19)$$

とする。この制約について、Wald タイプの検定統計量を考える。

$$\lambda(\hat{\theta}_{IV})=T h(\hat{\theta}_{IV})' \left[\frac{\partial h(\hat{\theta}_{IV})}{\partial \theta'} V \frac{\partial h(\hat{\theta}_{IV})}{\partial \theta} \right]^{-1} h(\hat{\theta}_{IV}) \quad (3.20)$$

とすると、 H_0 のもとでこの統計量は χ^2 分布（自由度は制約数になる。）に法則収束する。ただし、今回は $h(\cdot)$ 、 V に対して、以下のものを使った。

$$h(\theta)=(0, 0, 1, -1)\theta=\sigma_a-\sigma_b, \quad (3.21)$$

$$V=\hat{V}=[\hat{D}'\Phi_T^{-1}\hat{D}]^{-1} \quad (3.22)$$

ただし、

$$\hat{D}=\frac{1}{T}\sum_{t=2}^T \frac{\partial f_t(\hat{\theta}_{IV})}{\partial \theta'} \otimes w_t \quad (3.23)$$

$$=\frac{1}{T}\sum_{t=2}^T \begin{pmatrix} -1 & Y_{t-1} & -\frac{\Delta Y_t I_t}{\hat{\sigma}_a^2} & -\frac{\Delta Y_t I_t^c}{\hat{\sigma}_b^2} \\ -2\hat{u}_t & 2Y_{t-1}\hat{u}_t & -2\frac{\Delta Y_t I_t}{\hat{\sigma}_a^2}\hat{u}_t & -2\frac{\Delta Y_t I_t^c}{\hat{\sigma}_b^2}\hat{u}_t \end{pmatrix} \otimes \begin{pmatrix} 1 \\ Y_{t-1} \end{pmatrix} \quad (3.24)$$

である。ただし、 $I_t^c=1-I_t$ で、 $\hat{\sigma}_a$ 、 $\hat{\sigma}_b$ 、 \hat{u}_t は $\hat{\theta}_{IV}$ に基づいた推定値である。

以上の検定法を操作変数法 (IV) に基づく検定方式とする。これは 3.1 の尤度比検定 (LR) に対応するものといえる。

4. シミュレーションによる比較

いくつかのモデルでデータを発生させ、2つの方法の性質を数値的に比較してみる。ここで用いたシミュレーションデータは次の3つである。

1. SSAR モデル

(2.1) 式で定義されたモデルで、 ε_t には標準正規分布を仮定し、 $r=1$ 、 $r_\mu=0$ とした。すなわち、双方について理論的な仮定を満たすケースで、正しく推定できるかどうかを調べるためのデータである。なお、 $a=b$ のケースは正規分布に従う AR(1) を発生していることになる。

2. Log-normal を誤差項に持つ AR(1) モデル

$$y_t=\mu+\phi y_{t-1}+e_t \quad (4.1)$$

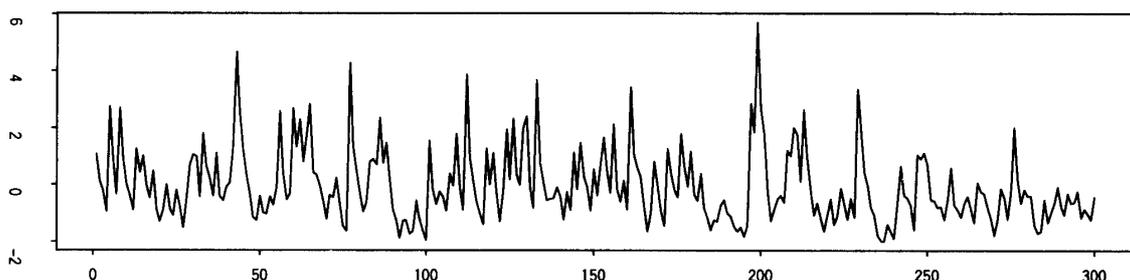
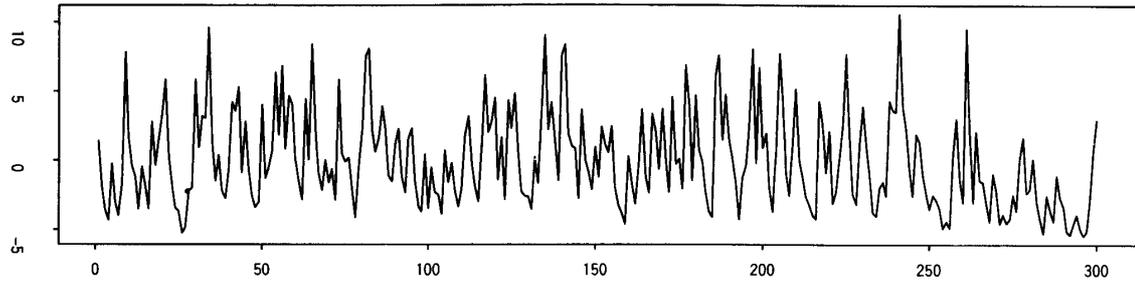


図2 AR with log-normal $\phi=0.5$, $\sigma=0.8$

図3 AR with two-piece Normal $\phi=0.5, \sigma=5$

$$\log(e_t) \sim i.i.d.N(0, \sigma^2) \quad (4.2)$$

ただし、 μ は $E(y_t)=0$ となるように定めた。このモデルは非対称な分布に従う誤差項から生成される AR(1) モデルである。そのため、 $\{y_t\}$ も非対称な系列となる。非対称の度合いは σ が大きいほど大きい。図2はそのサンプルパスの1つである。SSAR モデルがダイナミクスに非対称性が入っているのに対して、このモデルは構造が線形ながら、誤差項の部分が非対称になっているのである。しかしながら、データを眺める程度ではどちらも似たような系列にみえてしまう。したがってこの2つのモデルが区別できるかを調べてみる。

3. 2区分正規分布に従う誤差項を持つ AR(1) モデル

$$y_t = \mu + \phi y_{t-1} + e_t \quad (4.3)$$

$$e_t = \begin{cases} \sigma n_t & (n_t \geq 0) \\ n_t & (n_t < 0) \end{cases} \quad (4.4)$$

$$n_t \sim i.i.d.N(0, 1) \quad (4.5)$$

ただし、 μ は $E(y_t)=0$ となるように定めた。ここで定義した2区分正規分布は John (1982) による、“Two-Piece Normal Distribution” を少し修正したものである。このモデルも非対称な誤差項をもつ線形時系列モデルで、 σ が1から離れるにつれて、非対称になっていく。図3はそのサンプルパスの1つである。2つのモデルと比べるとこちらの方が SSAR モデルに近い形をしている。

これら3つのモデルに従うデータをそれぞれの係数につき500回発生させて、MLタイプ、IVタイプの推定、検定を行った。推定量については表1.1-3に a, b の推定値の平均をまとめた。括弧の中は標準偏差である。検定については、表4-6に各検定統計量の平均を掲載した。括弧の中は有意水準5%で検定を行ったときの棄却率である。サンプルサイズはすべて1500である。なお、紙面の関係上 a, b 両方の表を掲載していないケースがある。

4.3 推定量の比較

真のモデルが SSAR のケース(表1)をみると、どちらの方法もほぼ正しい推定をしていることが分かる。真の a と b の差が大きいときに、小さい方の推定値が多少バイアスをもつことがあるが、これもデータ数が増えれば真の値に近づく。ただし、標準偏差をみると ML の方が総じて小さい。ここでは表を示していないが、 $T=500$ で同じようなシミュレーションをした結果ではバイアスと標準偏差の面で ML に比べて操作変数法は劣っていた。これらの結果から操作変数法を用いる方法は最尤法に比べて効率が落ちることをがわかった。 a の推定結果はここでは省略しているが、 b の時と傾向が同じであった。

次に真のモデルが非対称分布に従う誤差項をもつ AR(1) のケース(表2, 3)をみしてみる。

表1 (推定値の比較) 真のモデル: SSAR モデル ($T=1500$)

ML 法: b の推定値の平均							
	$b=-0.9$	$b=-0.5$	$b=-0.1$	$b=0$	$b=0.3$	$b=0.6$	$b=0.9$
$a=-0.9$	-0.899 (0.02)	-0.501 (0.02)	-0.100 (0.02)	-0.001 (0.02)	0.300 (0.02)	0.599 (0.01)	0.900 (0.00)
$a=0$	-0.898 (0.06)	-0.504 (0.05)	-0.099 (0.04)	0.001 (0.03)	0.298 (0.02)	0.600 (0.02)	0.900 (0.00)
$a=0.6$	-0.903 (0.09)	-0.507 (0.07)	-0.102 (0.05)	-0.003 (0.04)	0.295 (0.04)	0.598 (0.02)	0.899 (0.01)
$a=0.9$	-0.894 (0.17)	-0.498 (0.13)	0.102 (0.09)	-0.007 (0.07)	0.299 (0.05)	0.595 (0.03)	0.898 (0.01)

IV 法: b の推定値の平均							
	$b=-0.9$	$b=-0.5$	$b=-0.1$	$b=0$	$b=0.3$	$b=0.6$	$b=0.9$
$a=-0.9$	-0.898 (0.04)	-0.502 (0.04)	-0.099 (0.03)	-0.001 (0.03)	0.301 (0.02)	0.599 (0.01)	0.900 (0.00)
$a=0$	-0.904 (0.09)	-0.509 (0.06)	-0.099 (0.04)	0.001 (0.04)	0.298 (0.03)	0.600 (0.02)	0.900 (0.01)
$a=0.6$	-0.910 (0.16)	-0.515 (0.11)	-0.111 (0.08)	-0.001 (0.07)	0.293 (0.05)	0.598 (0.03)	0.899 (0.01)
$a=0.9$	-0.959 (0.35)	-0.529 (0.26)	-0.126 (0.16)	-0.042 (0.15)	0.284 (0.10)	0.587 (0.06)	0.898 (0.02)

* 括弧の中は標準偏差を示す。

この場合、真のモデルは AR(1)なので、SSAR モデルをあてはめても、 $a=b=\phi$ となることが期待される。しかしながら、ML の推定値はそれからかなり外れてしまう。 $a=b$ なのに $a \neq b$ という推定をしてしまう。例えば、表 2 で $\phi=-0.5$, $\sigma \geq 0.7$ のケースでは、 a と b の両方が真の ϕ の値から外れてしまっている。この傾向は誤差項の非対称性が増すにつれて顕著に表れる。この結果はガウス尤度を使った最尤法には誤差項の非対称性に対する頑健性がないということを示している。これは、線形時系列モデルとの大きな違いである。なお、2 区分正規分布に従うケースについては、 b の結果を割愛しているが、 a の結果の表を左右逆にしたような結果が出た。これは、 σ の値によって、誤差項の非対称性が逆転しているからだと思われる。

それに対して、操作変数法 (IV 法) を使った推定ではほぼ、 $a=b=\phi$ という結果が得られ、ML の時と好対照な結果が得られた。これより、IV 法は効率の面で ML 法に劣るものの誤差項の分布に関する頑健性でははるかに優れているといえる。実際の解析では、誤差項がどのような分布にしたがっているかは未知のケースが多く、今回提案した方法を試すことにより、最尤法の欠点を補完できると考えられる。

4.4 検定の比較

真のモデルが SSAR モデルのとき (表 4) は、2 つの検定方式、尤度比検定 (LR)、操作変数法に基づくワルド検定 (WIV)、のどちらも、期待通り結果となっている。つまり、棄却率が $a=b$ では有意水準の 0.05 程度になっているがそれ以外は 1 に近い。しかしながら $a=0.9$, $b=-0.9$ のケースで WIV での検出力が落ちている。これは、サンプルサイズに依存するようで、データ数が十分大きければ ($T=5000$) そのような問題が起こらないことが別のシミュレーションで分かっている。つまり、WIV についてはサンプルサイズが小さいときに検出力が劣ってしまう欠点がある。

表2 (推定値の比較) 真のモデル: Log-normal を誤差項に持つ AR(1) モデル ($T=1500$)

ML 法: a の推定値の平均								
	$\sigma=0.1$	$\sigma=0.3$	$\sigma=0.5$	$\sigma=0.7$	$\sigma=0.9$	$\sigma=1$	$\sigma=1.1$	$\sigma=1.2$
$\phi=-0.5$	-0.541 (0.04)	-0.637 (0.04)	-0.751 (0.06)	-0.885 (0.07)	-1.005 (0.08)	-1.061 (0.08)	1.122 (0.09)	-1.165 (0.08)
$\phi=0.3$	0.249 (0.03)	0.102 (0.05)	-0.114 (0.07)	-0.462 (0.12)	-0.948 (0.27)	-1.277 (0.36)	-1.617 (0.44)	-2.095 (0.64)
$\phi=0.9$	0.887 (0.01)	0.860 (0.02)	0.814 (0.02)	0.745 (0.03)	0.647 (0.08)	0.565 (0.08)	0.466 (0.12)	0.369 (0.16)
ML 法: b の推定値の平均								
	$\sigma=0.1$	$\sigma=0.3$	$\sigma=0.5$	$\sigma=0.7$	$\sigma=0.9$	$\sigma=1$	$\sigma=1.1$	$\sigma=1.2$
$\phi=-0.5$	-0.467 (0.03)	-0.413 (0.03)	-0.378 (0.02)	-0.359 (0.02)	-0.350 (0.02)	-0.349 (0.02)	-0.350 (0.02)	-0.351 (0.02)
$\phi=0.3$	0.337 (0.03)	0.384 (0.02)	0.402 (0.02)	0.399 (0.02)	0.389 (0.02)	0.380 (0.02)	0.373 (0.02)	0.364 (0.02)
$\phi=0.9$	0.905 (0.01)	0.916 (0.01)	0.920 (0.01)	0.922 (0.01)	0.924 (0.01)	0.921 (0.01)	0.920 (0.00)	0.919 (0.00)
IV 法: a の推定値の平均								
	$\sigma=0.1$	$\sigma=0.3$	$\sigma=0.5$	$\sigma=0.7$	$\sigma=0.9$	$\sigma=1$	$\sigma=1.1$	$\sigma=1.2$
$\phi=-0.5$	-0.505 (0.05)	-0.502 (0.07)	-0.504 (0.11)	-0.513 (0.16)	-0.496 (0.20)	-0.499 (0.18)	-0.487 (0.18)	-0.483 (0.14)
$\phi=0.3$	0.300 (0.04)	0.295 (0.06)	0.300 (0.109)	0.286 (0.12)	0.285 (0.15)	0.285 (0.14)	0.303 (0.14)	0.293 (0.14)
$\phi=0.9$	0.896 (0.02)	0.897 (0.02)	0.893 (0.03)	0.890 (0.03)	0.890 (0.03)	0.892 (0.03)	0.891 (0.03)	0.892 (0.03)
IV 法: b の推定値の平均								
	$\sigma=0.1$	$\sigma=0.3$	$\sigma=0.5$	$\sigma=0.7$	$\sigma=0.9$	$\sigma=1$	$\sigma=1.1$	$\sigma=1.2$
$\phi=-0.5$	-0.499 (0.04)	-0.502 (0.04)	-0.503 (0.05)	-0.505 (0.07)	-0.520 (0.14)	-0.510 (0.07)	-0.519 (0.11)	-0.523 (0.23)
$\phi=0.3$	0.298 (0.03)	0.300 (0.03)	0.297 (0.03)	0.295 (0.03)	0.295 (0.05)	0.294 (0.03)	0.290 (0.11)	0.294 (0.03)
$\phi=0.9$	0.897 (0.01)	0.897 (0.01)	0.899 (0.01)	0.899 (0.01)	0.898 (0.01)	0.899 (0.01)	0.899 (0.01)	0.899 (0.01)

*括弧の中は標準偏差を示す。

次に非対称分布に従う誤差項をもつ AR(1) のケース (表 5, 6) をみってみる。LR の場合、誤差項の非対称性が少ないケース以外は、すべて、棄却してしまっている。つまり、LR を使うと、このような AR(1) にしたがっているにもかかわらず、誤って SSAR であると検定してしまう。これに対して、WIV では、どちらの分布でも、有意水準程度の棄却率しかない。また、注目すべき点は χ^2 値の平均が 1 より小さくなることが多いということであろう。この原因については、まだ、よくわかっていないが、 Ω のとり方の問題であるかもしれない。いずれにせよ、この結果を見る限り、検定においても操作変数法に基づいた方法が頑健であるといえる。

しかしながら、これをもって、操作変数法が最尤法にとって代わる方法と結論付けるのは性急であろう。やはり、最尤法や尤度比検定が持っている高い検出力は捨てがたく、操作変数法

表3 (推定値の比較) 真のモデル: 2区分正規分布に従う誤差項を持つAR(1)モデル ($T=1500$)

ML法: a の推定値の平均								
	$\sigma=0.1$	$\sigma=0.3$	$\sigma=0.7$	$\sigma=0.9$	$\sigma=1.2$	$\sigma=2$	$\sigma=5$	$\sigma=10$
$\phi=-0.5$	-0.372 (0.02)	-0.394 (0.02)	-0.455 (0.03)	-0.483 (0.03)	-0.527 (0.04)	-0.619 (0.04)	-0.744 (0.06)	-0.791 (0.06)
$\phi=0.3$	0.415 (0.02)	0.405 (0.02)	0.353 (0.02)	0.318 (0.03)	0.261 (0.03)	0.104 (0.04)	-0.218 (0.08)	-0.415 (0.09)
$\phi=0.9$	0.923 (0.01)	0.921 (0.01)	0.910 (0.01)	0.902 (0.01)	0.888 (0.01)	0.852 (0.02)	0.778 (0.02)	0.741 (0.03)

IV法: a の推定値の平均								
	$\sigma=0.1$	$\sigma=0.3$	$\sigma=0.7$	$\sigma=0.9$	$\sigma=1.2$	$\sigma=2$	$\sigma=5$	$\sigma=10$
$\phi=-0.5$	-0.500 (0.03)	-0.500 (0.03)	-0.503 (0.04)	-0.499 (0.04)	-0.501 (0.05)	-0.501 (0.06)	-0.505 (0.08)	-0.504 (0.09)
$\phi=0.3$	0.299 (0.02)	0.299 (0.02)	0.298 (0.03)	0.296 (0.03)	0.300 (0.04)	0.294 (0.05)	0.297 (0.06)	0.292 (0.07)
$\phi=0.9$	0.899 (0.01)	0.898 (0.01)	0.898 (0.01)	0.898 (0.01)	0.896 (0.02)	0.897 (0.02)	0.895 (0.02)	0.893 (0.03)

* 括弧の中は標準偏差を示す。

表4 (検定の比較) 真のモデル: SSARモデル ($T=1500$)

LR: χ^2 値の平均							
	$b=0.9$	$b=0.6$	$b=0.3$	$b=0$	$b=-0.1$	$b=-0.5$	$b=-0.9$
$a=0.9$	1.066 (0.07)	951.751 (1.00)	1807.613 (1.00)	2463.424 (1.00)	2637.458 (1.00)	3269.512 (1.00)	3791.961 (1.00)
$a=0.6$	957.254 (1.00)	1.085 (0.07)	175.050 (1.00)	474.350 (1.00)	574.830 (1.00)	979.560 (1.00)	1360.615 (1.00)
$a=0$	2469.529 (1.00)	469.666 (1.00)	77.625 (1.00)	1.041 (0.05)	7.051 (0.68)	118.138 (1.00)	309.105 (1.00)
$a=-0.9$	3799.118 (1.00)	1360.457 (1.00)	644.604 (1.00)	309.001 (1.00)	238.227 (1.00)	67.340 (1.00)	0.973 (0.04)

WIV: χ^2 値の平均							
	$b=0.9$	$b=0.6$	$b=0.3$	$b=0$	$b=-0.1$	$b=-0.5$	$b=-0.9$
$a=0.9$	0.680 (0.02)	12.770 (1.00)	9.633 (0.99)	7.401 (0.94)	6.416 (0.86)	4.636 (0.61)	3.493 (0.34)
$a=0.6$	12.944 (1.00)	0.833 (0.04)	26.040 (1.00)	45.185 (1.00)	47.7904 (1.00)	7.900 (1.00)	41.126 (1.00)
$a=0$	7.257 (0.93)	44.953 (1.00)	21.612 (0.99)	0.879 (0.04)	3.157 (0.33)	38.008 (1.00)	75.692 (1.00)
$a=-0.9$	3.476 (0.36)	41.245 (1.00)	76.514 (1.00)	75.527 (1.00)	66.932 (1.00)	21.397 (0.99)	0.717 (0.04)

* 括弧の中は有意水準5%で検定したときの棄却率を示す。

は補助的な役割を担うことが期待されるのではないかと。現実の分析においては二つの方法を行い、その結果が異なるときについてはさらに詳しい分析を行うのが望ましいやり方であると考えられる。LRとWIVを併用することでモデルの特定化に関してだけでなく誤差項の分布に対

表5 (検定の比較) 真のモデル: Log-normal を誤差項に持つ AR(1) モデル ($T=1500$)

LR: χ^2 値の平均								
	$\sigma=1.2$	$\sigma=1$	$\sigma=0.8$	$\sigma=0.6$	$\sigma=0.4$	$\sigma=0.3$	$\sigma=0.2$	$\sigma=0.1$
$\phi=0.9$	2049.226 (1.00)	1441.708 (1.00)	935.475 (1.00)	530.910 (1.00)	235.283 (1.00)	134.263 (1.00)	59.953 (1.00)	16.008 (0.98)
$\phi=0.3$	1331.838 (1.00)	936.099 (1.00)	587.698 (0.00)	332.938 (1.00)	145.622 (1.00)	83.021 (1.00)	37.190 (1.00)	9.675 (0.83)
$\phi=-0.5$	255.066 (1.00)	202.755 (1.00)	136.396 (1.00)	80.642 (1.00)	37.783 (1.00)	21.248 (1.00)	9.982 (8.86)	3.070 (0.31)

WIV: χ^2 値の平均								
	$\sigma=1.2$	$\sigma=1$	$\sigma=0.8$	$\sigma=0.6$	$\sigma=0.4$	$\sigma=0.3$	$\sigma=0.2$	$\sigma=0.1$
$\phi=0.9$	0.182 (0.02)	0.229 (0.02)	0.320 (0.02)	0.492 (0.03)	0.504 (0.01)	0.588 (0.02)	0.572 (0.00)	0.593 (0.01)
$\phi=0.3$	0.105 (1.00)	0.140 (0.00)	0.406 (1.00)	0.652 (1.03)	0.762 (1.03)	0.783 (1.03)	0.796 (0.03)	0.871 (0.05)
$\phi=-0.5$	0.125 (0.00)	0.175 (0.00)	0.349 (0.01)	0.640 (0.02)	0.787 (0.04)	0.811 (0.04)	0.886 (0.05)	0.912 (0.04)

* 括弧の中には有意水準 5% で検定したときの棄却率を示す。

表6 (検定の比較) 真のモデル: 2 区分正規分布に従う誤差項に持つ AR(1) モデル ($T=1500$)

LR: χ^2 値の平均								
	$\sigma=10$	$\sigma=5$	$\sigma=2$	$\sigma=1.2$	$\sigma=0.9$	$\sigma=0.7$	$\sigma=0.3$	$\sigma=0.1$
$\phi=0.9$	677.607 (1.00)	513.931 (1.00)	161.042 (1.00)	14.253 (0.94)	5.080 (0.52)	48.958 (1.00)	370.443 (1.00)	678.149 (1.00)
$\phi=0.3$	433.919 (1.00)	299.747 (1.00)	79.974 (1.00)	7.270 (0.72)	3.176 (0.32)	24.473 (1.00)	200.072 (1.00)	432.436 (1.00)
$\phi=-0.5$	65.578 (1.00)	49.637 (1.00)	16.557 (0.98)	2.213 (0.21)	1.308 (0.08)	5.353 (0.55)	36.395 (1.00)	65.058 (1.00)

WIV: χ^2 値の平均								
	$\sigma=10$	$\sigma=5$	$\sigma=2$	$\sigma=1.2$	$\sigma=0.9$	$\sigma=0.7$	$\sigma=0.3$	$\sigma=0.1$
$\phi=0.9$	0.776 (0.06)	0.670 (0.03)	0.688 (0.02)	0.660 (0.02)	0.650 (0.02)	0.660 (0.02)	0.736 (0.04)	0.707 (0.04)
$\phi=0.3$	0.773 (0.04)	0.908 (0.04)	0.784 (0.05)	0.919 (0.05)	0.890 (0.04)	0.862 (0.05)	0.801 (0.03)	0.817 (0.03)
$\phi=-0.5$	0.832 (0.04)	0.875 (0.05)	0.842 (0.04)	1.043 (0.06)	0.907 (0.06)	0.712 (0.03)	0.842 (0.04)	0.867 (0.04)

* 括弧の中には有意水準 5% で検定したときの棄却率を示す。

する仮定のチェックも行える。また、他の非線型モデルの可能性なども考慮する余地が残る。

5. 適用例

それでは、実際のデータに SSAR モデルをあてはめ、この 2 つのやり方を比較してみる。

5.1 貸出金利と長期プライムレートとのスプレッド

不均衡市場の例として銀行の貸出市場が分析されてきた。計量経済的アプローチの研究とし

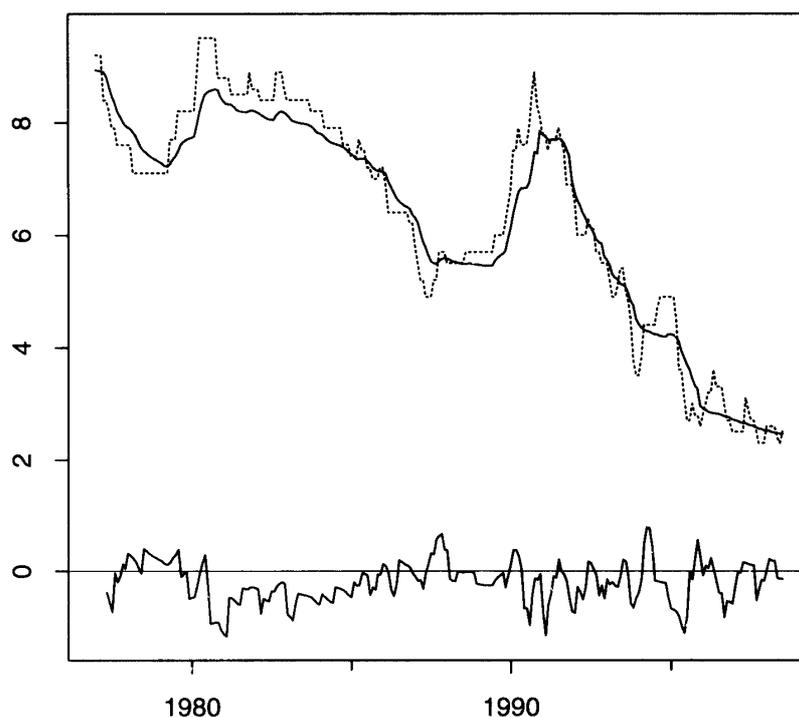


図4 長期貸出約定金利（実線・上）と長期プライムレート（点線）及び、それらのスプレッド（実線・下）

ては伊藤 [6], 浅子・内野 [2] などがある。この不均衡計量モデルを時系列的なアプローチから考えると SSAR モデルが導出される (Kunitomo and Sato [8])。

図4で示したデータは、都銀長期貸出金利と長期プライムレート、および、その間のスプレッドである。(1977年1月-1998年月の月次データで、出展は日本銀行「経済統計月報」である。)ここでいうスプレッドは次のように4カ月遅れの長期プライムレートを引いている。

$$\begin{aligned} (\text{t 期のスプレッド}) = & (\text{t 期の都銀長期貸出約定金利}) \\ & - (\text{t-4 期の長期プライムレート}) \end{aligned} \quad (5.1)$$

このように4期遅らせた理由はスプレッドをより定常にさせるためである。ここでは、このスプレッドに注目し、SSARモデルをあてはめてみる。その結果を以下の表にまとめた。

金利スプレッドに対する SSAR モデルの適用

	\hat{a}	\hat{b}	$\hat{\sigma}_a$	$\hat{\sigma}_b$	$\hat{\mu}$	χ^2 値
MLによる推定	0.779	0.840	0.256	0.186	-0.272	10.19
IVによる推定	0.784	0.836	0.249	0.189	-0.257	1.037

これによると、どちらの方法の推定値もあまり変わっていない。なおかつ、尤度比検定の χ^2 値が高い値となっているので、SSAR(1)があてはまっていると考えられる。この結果は貸出市場が不均衡市場であるということを示唆している。なお、IVに基づく検定統計量はあまり高くないが、これはサンプルサイズが小さいときに検出力がないことを考慮するとやむをえないと考えられる。

5.2 神流川の水量データ

図5に示したデータはある地点の水量の日次データである。このデータは尾崎 [12] の14章で取り上げられたデータと同じである。この図を見ると明らかに上昇・下降で違う動きをしている。このデータに対して同じように2つの方法でSSARモデルを推定した。その結果は以下

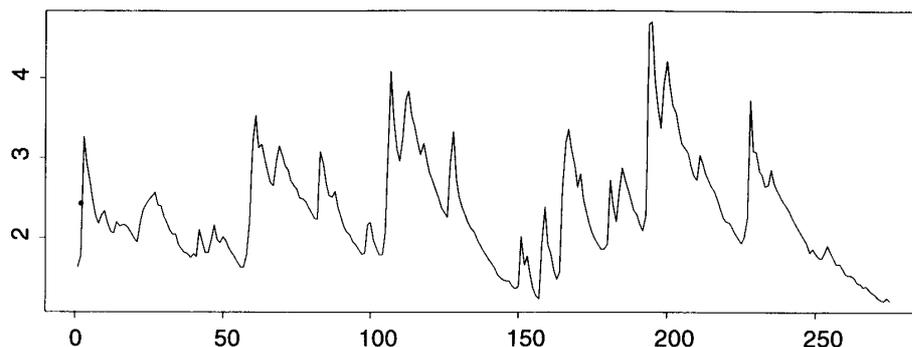


図5 神流川の水量データ (対数を取ったもの)

の通りである。

神流川水量データに対する SSAR モデルの適用

	\hat{a}	\hat{b}	$\hat{\sigma}_a$	$\hat{\sigma}_b$	$\hat{\mu}$	χ^2 値
ML による推定	0.509	0.907	0.610	0.115	1.261	269.7
IV による推定	0.897	0.892	0.292	0.307	0.819	0.0019

これによると、ML を使うのと IV を使うので結果が大きく異なる。IV の χ^2 が極端に小さいことを考えると、このケースは IV を使った結果のほうが信頼できると考えられる。つまり、このデータに対しては一見すると SSAR モデルが当てはまるように思われるが、IV 法を使うことによってそのような誤りが防げる例だといえる。この水量のデータに対しては尾崎 [12] で示されているような別の非線型モデルを考えるべきであろう。

6. ま と め

本稿では操作変数法を用いた推定、検定を提案し、尤度に基づく方法と比較した。その結果、最尤法や尤度比検定と比べると、効率は落ちるものの、頑健性の面では優れており、尤度に基づく方法を補完できることがわかった。現実のデータに SSAR モデルを適用する際は、誤差項の分布形が不明であるのが通常である。したがって、最尤法での推定のみでは誤った結果を導く可能性があり、ここで提案した推定法も同時に試してみる必要がある。そして二つの結果を総合的に判断し、SSAR モデルの妥当性を検討することを提案した。ただし、前章の適用例にもある通り、少ない標本数では判断が難しいケースもあり、今後の課題だと思われる。

今回扱った問題を多少大げさな表現でいうならば、時系列の非線型性と分布(特に誤差項の)の非対称性の検出だといえる。現実の現象において、この二つの性質は互いに絡み合っていると考えられる。そのような対象に対しては、ここで示したように、多面的なアプローチによって、総合的に判断を下していくのが適切であると考えられる。

7. 付 録

(定理 1 の略証)

$\{\varepsilon_t\}$ が 4 次のモーメントを持つことより、 y_t は 4 次のモーメントまでを持つ。(Kunitomo and Sato [8]) したがって、

$$Q_T(\theta) = F_T(\theta)' \Phi_T^{-1} F_T(\theta) \quad (7.1)$$

$$\xrightarrow{P} Q^*(\theta) = F^*(\theta)' \Phi^{*-1} F^*(\theta) \quad (7.2)$$

と、 $T \rightarrow \infty$ のとき確率収束する。ただし、

$$F^*(\theta) = E[f_t \otimes w_t] \quad (7.3)$$

$$\Phi^* = \Omega \otimes E[w_t w_t'] \quad (7.4)$$

ここで、 Φ^* が正定値対称行列になるので、 $Q^*(\theta)$ は $F^*(\theta) = 0$ のとき最小値 0 をとる。また、

$$F^*(\theta_0) = E\left[\left(\begin{array}{c} \varepsilon_t \\ \varepsilon_t^2 - 1 \end{array}\right) \otimes w_t\right] = 0 \quad (7.5)$$

となり、 θ_0 は $Q^*(\theta)$ の最小値を与える。よって、Amemiya [1] の定理 4.1.2 より一致性が示される。

次に漸近正規性を示す。 $\hat{\theta}_{IV}$ が $Q_T(\theta)$ の最小値を与えていることより

$$\left. \frac{\partial Q_T(\theta)}{\partial \theta} \right|_{\theta = \hat{\theta}_{IV}} = 0 \quad (7.6)$$

これを、 $\theta = \theta_0$ のまわりでテーラー展開し、 $\hat{\theta}$ は θ_0 に確率収束するから、 $|\hat{\theta} - \theta_0|$ の十分小さいところで考えると、

$$\left. \frac{\partial Q_T}{\partial \theta} \right|_{\theta = \theta_0} + \left. \frac{\partial^2 Q_T(\theta)}{\partial \theta \partial \theta'} \right|_{\theta = \theta_0} (\hat{\theta}_{IV} - \theta_0) \cong 0 \quad (7.7)$$

したがって、

$$\sqrt{T}(\hat{\theta}_{IV} - \theta_0) \cong \sqrt{T} \left[- \left. \frac{\partial^2 Q_T(\theta)}{\partial \theta \partial \theta'} \right|_{\theta = \theta_0} \right]^{-1} \left[\left. \frac{\partial Q_T(\theta)}{\partial \theta} \right|_{\theta = \theta_0} \right] \quad (7.8)$$

が得られる。ここで、

$$\frac{\partial Q_T}{\partial \theta} = 2 \left[\frac{1}{T} \sum_t \frac{\partial f_t}{\partial \theta'} \otimes w_t \right]' \left[\Omega \otimes \frac{1}{T} \sum_t w_t w_t' \right]^{-1} \left[\frac{1}{T} \sum_t f_t \otimes w_t \right] \quad (7.9)$$

$$= 2D_T' \Phi_T^{-1} F_T \quad (7.10)$$

$$E \left[\left. \frac{\partial Q_T}{\partial \theta} \right] \left[\left. \frac{\partial Q_T}{\partial \theta'} \right]_{\theta = \theta_0} \right] = 4E[D_T' \Phi_T F_T F_T' \Phi_T^{-1} D_T]_{\theta = \theta_0} \xrightarrow{P} 4D^* \Phi^{*-1} \Phi^* \Phi^{*-1} D^* \quad (7.11)$$

また、

$$\left. \frac{\partial^2 Q_T(\theta)}{\partial \theta \partial \theta'} \right|_{\theta = \theta_0} \xrightarrow{P} 2D^* \Phi^{*-1} D^* \quad (7.12)$$

となるので、

$$\sqrt{T}(\hat{\theta}_{IV} - \theta_0) \xrightarrow{L} N(0, V) \quad (7.13)$$

となる。ただし、

$$V = (2D^* \Phi^{*-1} D^*)^{-1} (4D^* \Phi^{*-1} D^*) (2D^* \Phi^{*-1} D^*)^{-1} \quad (7.14)$$

$$= (D^* \Phi^{*-1} D^*)^{-1} \quad (7.15)$$

である。

参 考 文 献

- [1] Amemiya, T. (1985), *Advanced Econometrics*, Oxford.
- [2] 浅子和美・内野裕子(1988), 「日本の銀行貸出市場—不均衡分析の新しい視点」, 『金融研究』, 第6巻1号, 61-98.
- [3] Fair, R. C. and Jaffee, D. M. (1972), “Methods of Estimation for Markets in Disequilibrium”, *Econometrica*, **40**, 497-514.
- [4] Hamilton, J. D. (1989), “A New Approach to the Economic Analysis of Nonstationary Time Series and the Bussiness Cycle”, *Econometrica*, **57**, 357-384.
- [5] Hansen, L. P. (1982), “Large sample Properties of Generalized Method of Moments Estimators”, *Econometrica*, **50**, 1029-1054.
- [6] 伊藤隆敏 (1985), 「不均衡の経済分析—理論と実証」, 東洋経済新報社.
- [7] John, S. (1982), “The Three-Parameter Two-Piece Normal Family of Distributions and Its Fitting”, *Communications in Statistics—Theory and Methods*, **11**, 879-885.
- [8] Kunitomo, N. and Sato, S. (1996), “Asymmetry in Economic Time Series and Simultaneous Switching Autoregressive Model”, *Structural Change and Economic Dynamics*, **7**, 1-34.
- [9] 国友・佐藤 (1994), 経済時系列における非線形性と不均衡計量経済モデル, 「数理統計学の理論と応用」(竹内・竹村編), 東大出版会.
- [10] Kunitomo, N. and Sato, S. (1999), “A Stationary and Non-stationary Simultaneous Switching Autoregressive Model with an Application to Financial Time Series”, *The Japanese Economic Review*, **50**, 161-190.
- [11] Neftci, S. (1984), “Are Economic Time Series Asymmetric Over the Business Cycle?”, *Journal of Political Economy*, **92**, 307-328.
- [12] 尾崎 統 (1988), 「時系列論」, 放送大学教材.
- [13] Sato, S. and Kunitomo, N. (1996), “Some Properties of the Maximum Likelihood Estimator in Simultaneous Switching Autoregressive Model” *Journal of Time Series Analysis*, **17**, 287-307.