

タイプIのトービット・モデルから得られる標本に タイプIIのトービット・モデルを 用いた場合の最尤推定量の挙動について

縄田和満*

An Analysis of the Type II Tobit Maximum Likelihood Estimator When the Sample is obtained from the Type I Tobit Model

Kazumitsu Nawata*

従属変数がある条件を満足する場合にのみ観測されるトービット・モデル(制限従属変数モデル)において, タイプIのトービット・モデルを使うか, タイプIIのトービット・モデルを使うかは, 実証研究を行う上でも重要な問題である。前者は後者の特別なケースであり, 後者のモデルのパラメータに適当な制約を加えることによって, 前者を得ることができる。しかしながら, タイプIのトービット・モデルでは, 誤差項の次元が減少して分布が退化してしまうため, タイプIのトービット・モデルから得られた標本にタイプIIのトービット・モデルを用いた場合, その最尤推定量に対しては通常の漸近理論は成り立たない。本論文では, 標本がタイプIのトービット・モデルから得られた場合のタイプIIのトービット・モデルの尤度関数・最尤推定量の挙動を分析した。モンテカルロ実験の結果からは, 誤差項の相関係数を表すパラメータ ρ は, 多くの試行(90-95%)において計算上の最大値である0.999999(計算精度の問題から, 1.0ではなく, 0.999999を計算上の最大値としたが, 実用上は1.0とみなせる値である)となった。さらに, 説明変数のパラメータ間の制約条件から得られる統計量も $1/n$ のオーダーで収束することが示唆された。

The Type I and Type II Tobit models are widely used in various fields of economics. It is an important problem to determine which of the two to be chosen in empirical studies. The Type I Tobit model is a special case of the Type II Tobit model. The former model is obtained from the later model with some restrictions of the parameters. However, the dimensions of the error terms decrease from two (Type II Tobit model) to one (Type I Tobit model), and the distributions of the error terms degenerate for the Type I Tobit Model. Therefore, we cannot use the standard asymptotic theorems and testing procedures for the Type II Tobit Maximum Likelihood Estimator (MLE) when the sample is obtained from the Type I Tobit model. Results of the Monte Carlo experiments show that the values of ρ , a parameter of the correlation coefficient of error terms, quickly converges to 0.999999, the maximum value used in the iterations. (Although the maximum value of ρ is set to be 0.999999 due to the accuracy of the calculation, we can regard this value as 1.0 in practice.) Moreover, the statistics obtained by constraints of coefficients of explanatory variables are considered to be the order of $1/n$.

この論文に対して横浜国立大学小林正人教授および本誌レフリーから貴重なコメントを頂いた。ここに記して感謝の意を表したい。

* 東京大学大学院工学系研究科地球システム工学専攻

〒113-8656 東京都文京区本郷7-3-1 e-mail: nawata@geosys.t.u.-tokyo.ac.jp

1. はじめに

従属変数がある条件を満足する場合にのみ観測されるトービット・モデル (Tobit model, 制限従属変数モデル (limited dependent variable model) と呼ばれる) において, タイプ I のトービット・モデルを使うか, タイプ II のトービット・モデルを使うかは, 実証研究を行う上でも重要な問題である。(詳細・実証研究例については, Cragg (1971), Fin and Schmidt (1984), Melenberg and van Scott (1996) などを参照せよ。) タイプ I のトービット・モデルとタイプ II のトービット・モデルの関係においては, 前者は後者の特別なケースであり, 後者のモデルのパラメータに制約条件を加えることによって, 前者のモデルを得ることができる。しかしながら, タイプ I のトービット・モデルでは, 誤差項の次元が減少して分布が退化してしまうといった問題が生じる。このため, タイプ I のトービット・モデルから得られる標本にタイプ II のトービット・モデルを用いた場合, 通常最尤法の漸近理論を用いることができない。

本論文では, 標本がタイプ I のトービット・モデルから得られた場合のタイプ II のトービット・モデルの尤度関数・最尤推定量の挙動を分析する。まず, モンテカルロ法によって, タイプ II のトービット・モデルにおける (標本がタイプ I から得られた場合の) 最尤推定量の挙動を分析する。次に, 尤度関数の形状をグラフによって分析する。さらに, 極説明変数の係数の制約条件から得られる統計量のオーダーについて考察を加える。本論文は, 2つのモデルの関係において, 誤差項の分布が退化し, 次元が減少するときに起こる問題を分析する最初の論文である。

2. タイプ I のトービット・モデルとタイプ II のトービット・モデル

トービット・モデルは, 一般の回帰モデルと異なり, 分析対象とする従属変数がある条件を満足した場合にのみ観測することができるモデルである。本章では, タイプ I のトービット・モデルとタイプ II のトービット・モデルについて説明する。(詳細は, Maddala (1971), Amemiya (1985), 縄田 (1997), Greene (2000) などを参照せよ。)

2.1 タイプ I のトービット・モデル

タイプ I のトービット・モデルは最も基本的なモデルであり, 従属変数 Y_i が負の値をとることの出来ないモデルであり, Y_i が

$$Y_i^* = x_i' \beta + u_i, \quad i=1,2,\dots,n, \quad (2.1)$$

$$Y_i = \begin{cases} Y_i^* & Y_i^* > 0 \\ 0 & Y_i^* \leq 0 \end{cases}$$

で与えられるものである。 x_i, β は, 説明変数および対応する未知パラメータのベクトルである。 Y_i^* が負の場合はその値を直接観測することが出来ず, その符号のみが観測されるものである。このモデルは途中打ち切り回帰モデル (censored regression model) とも呼ばれているが, 経済学の分野では, Tobin (1958) によって負の値をとることの出来ない耐久消費財への支出の分析に始めて用いられた。(このため, 経済学の分野ではこのタイプのモデルを Tobit model と呼んでいる。)

u_i が各々独立で平均 0, 分散 σ_2 の正規分布 $N(0, \sigma_2)$ に従うとし, ϕ, Φ を標準正規分布の密度関数, 分布関数とする。この場合の尤度関数は,

$$L(\beta, \sigma^2) = \prod_{Y_i=0} \{1 - \Phi(x_i' \beta / \sigma)\} \cdot \prod_{Y_i > 0} \sigma^{-1} \phi\{(Y_i - x_i' \beta) / \sigma\} \quad (2.2)$$

である。

2.2 タイプIIのトービット・モデル

タイプIIのトービット・モデルは、標本選択による偏りを伴うモデル (sample selection biases model) とも呼ばれており、労働経済学や消費者の行動の分析など経済学の諸分野で広く使われているモデルで、

$$\begin{aligned} Y_{1i}^* &= x_{1i}' \beta_1 + u_{1i}, \\ Y_{2i}^* &= x_{2i}' \beta_2 + u_{2i}, \quad i=1, 2, \dots, n, \\ Y_{2i} &= \begin{cases} Y_{2i}^* & Y_{1i}^* > 0 \\ 0 & Y_{1i}^* \leq 0 \end{cases} \end{aligned} \quad (2.3)$$

で与えられる。この場合、経済主体 i の行動は、2段階の判断で決定される。まず、 i はある行動を行うかどうか (女性が労働するかどうか、消費者が製品を購入するかどうかなど) を判断し、行動を行うと判断した場合、具体的な量 (労働時間、購入する製品の金額など) を決定する。行動を行うかどうかの判断は第1式で、具体的な量の決定は第2式で与えられる。第3式は、行動を行うと判断した場合のみ具体的な量が観測されることを示している。

x_{1i} , x_{2i} は、それぞれ説明変数のベクトルであるが同一である必要はない。 Y_{1i}^* は、その符号以外直接観測される必要はなく、 Y_{2i}^* は、 Y_{1i}^* が負の場合は観測されることのないモデルである。 x_{2i} は Y_{1i}^* が負の場合、観測される必要はなく、モデルの推定を行う場合の大きな利点となっている。 u_{1i} と u_{2i} は未知の誤差項で、平均0、分散1、 σ_2^2 、共分散 σ_{12} の2変量正規分布に従うとする。(2.3)式の第1式を正の定数倍してもモデルは同一であるから、一般性を失うことなく、 u_{1i} の分散を1とすることができる。

ここで、

$$d_i = \begin{cases} 1 & Y_{1i}^* > 0 \\ 0 & Y_{1i}^* \leq 0 \end{cases} \quad (2.4)$$

とする。 $f(y_1, y_2)$ を Y_{1i}^* , Y_{2i}^* の同時密度関数とすると、尤度関数は、

$$L = \prod_{d_i=0} \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} f(y_1, y_2) dy_2 dy_1 \cdot \prod_{d_i=1} \int_0^{\infty} f(y_1, y_2) dy_1 \quad (2.5)$$

である。

u_{1i} と u_{2i} は2変量正規分布に従うので、 $\rho = \sigma_{12} / \sigma_2$ とおくと、尤度関数は、

$$\begin{aligned} L(\beta_1, \beta_2, \sigma_2^2, \rho) &= \prod_{d_i=0} \{1 - \Phi(x_{1i}' \beta_1)\} \\ &\quad \cdot \prod_{d_i=1} \Phi\left[\frac{x_{1i}' \beta_1 + \rho(Y_{2i} - x_{2i}' \beta_2) / \sigma_2}{\sqrt{1 - \rho^2}}\right] \cdot \sigma_2^{-1} \phi\left\{\frac{Y_{2i} - x_{2i}' \beta_2}{\sigma_2}\right\} \end{aligned} \quad (2.6)$$

となる。 ρ は u_{1i} と u_{2i} の相関係数であり、対数尤度 $\log L$ を最大化することによって、 β_1 , β_2 , σ_2^2 , ρ の最尤推定量を求めることが可能となる。

2.3 タイプIとタイプIIのトービット・モデルの関係

(2.3)式において、第1式と第2式の説明変数のベクトルが同一であるとする。この場合、どちらのモデルを使うかが実証研究を行う上でも大きな問題となる。(2.3)式において、 $x_{1i} =$

$x_{2i} = x_i$ であり,

$$\begin{aligned}\beta_1 &= \beta_2 / \sigma_2, \\ u_{1i} &= u_{2i} / \sigma_2, \quad i=1,2,\dots,n\end{aligned}\tag{2.7}$$

であるとする。 (2.3) 式の第1式と第2式は同一となり、タイプIIのトービット・モデルは、タイプIのトービット・モデルとなる。 (2.7) 式の第2の条件である $u_{1i} = u_{2i} / \sigma_2, i=1,2,\dots,n$ は、2つの誤差項の相関係数が1.0である、すなわち、

$$\rho = 1.0\tag{2.8}$$

という条件を与える。したがって、 $x_{1i} = x_{2i} = x_i$ の場合、タイプIのトービット・モデルは、タイプIIのトービット・モデルにおいて、

$$\beta_1 = \beta_2 / \sigma_2, \rho = 1.0\tag{2.9}$$

を満足するモデルであることになる。

タイプIのトービット・モデルでは、誤差項は (u_{1i}, u_{2i}) の2次元から u_i のみの1次元へと次元が減少している。 (2.6) 式で与えられるタイプIIのトービット・モデルの尤度関数やパラメータ $\theta' = (\beta_1', \beta_2', \sigma_2^2, \rho)$ に関する1次および2次の微分、 $\partial \log L(\theta) / \partial \theta$ 、 $\partial^2 \log L(\theta) / \partial \theta \partial \theta'$ は、 $1/(1-\rho^2)$ の関数であり、 $\rho=1.0$ の場合を直接考えることはできない。このため、タイプIのトービット・モデルから得られた標本に対してタイプIIのトービット・モデルを用いた場合、その最尤推定量の挙動は通常最尤法の漸近理論で扱うことができない。

3 モンテカルロ実験

3.1 モデル

本章では、標本がタイプIのトービット・モデルから得られた場合のタイプIIのトービット・モデルの尤度関数・最尤推定量の挙動を分析する。タイプIIのトービット・モデルの尤度関数は $1/(1-\rho^2)$ の関数であるため、 $\rho=1.0$ の近傍で尤度関数・推定量を解析的に取り扱うことは非常に困難である。ここでは、

$$\begin{aligned}x_i' &= x_{1i}' = x_{2i}' = (1, X_i), \\ \beta_1' &= (\beta_{11}, \beta_{12}), \\ \beta_2' &= (\beta_{21}, \beta_{22})\end{aligned}\tag{3.1}$$

として、モンテカルロ実験によって最尤推定量の挙動を分析する。

真のモデルをタイプIのトービット・モデルとし、データは、

$$\begin{aligned}Y_{1i}^* &= \beta_{11} + \beta_{12}x_i + u_i, \\ Y_{2i}^* &= \beta_{21} + \beta_{22}x_i + u_i, \quad i=1,2,\dots,n \\ \beta_{11} &= \beta_{21}, \beta_{12} = \beta_{22}\end{aligned}\tag{3.2}$$

から発生させる。 x_i は $(0, 2)$ の一様分布、 u_i は標準正規分布に従うとする。 β_{ij} の値は $\beta_{11} = \beta_{21} = -1.0$ 、 $\beta_{12} = \beta_{22} = 1.0$ および $\beta_{11} = \beta_{21} = 0.0$ 、 $\beta_{12} = \beta_{22} = 0.0$ の2つケースを考え、標本の大きさは $n=50, 100, 200, 400, 800$ とする。繰り返し回数は、1,000回である。

3.2 推定方法のためのアルゴリズム

ここで扱うデータはタイプIIのトービット・モデルにおいて、特殊なケースとなっており、タイプIIのトービット・モデルの尤度関数の形状の問題から、LIMDEP、STATA等に使われ

ている通常のアルゴリズムでは、ほとんどの場合計算が収束しない。このため、ここでは、縄田 (1993), Nawata (1994, 1995), Nawata and Nagase (1996) で提案されさせた次のような推定方法を用いる。

- i) $(-1, 1)$ の間から, $[-0.9999, 0.9999]$ の区間をとり, 間隔 $\delta=0.0001$ の区間に分ける。
- ii) $\rho=0$ として, 条件付の尤度関数の最大値を求める。この場合, β_1 はプロビット法の推定結果から, β_2, σ_2^2 は $d_i=1$ のデータのみを使った最小二乗法の推定結果から求めることができる。
- iii) ρ の値を δ 増加させ, 条件付尤度関数の最大値を求める。この場合, 初期値は前段階の推定結果とする。
- iv) (i) で定めた $\rho=0.9999$ の最大値までこれを繰り返す。同じく, 0 から ρ の最小値まで, これを繰り返し, 尤度関数を最大にする値を求める。
- v) $\delta=0.000001$ として (vi) で選ばれた ρ の値の周りで, 同様の方法を繰り返し, 最終の推定結果を求める。なお, (vi) で, $\rho=0.9999$ 以外の値が得られた場合は, $\rho=0.999901$ から $\rho=0.999999$ までの値についても同様の計算を行い, これらも考慮して, 最終の推定結果を求めた。

尤度関数の形状の問題のため, (i) の δ の値を 0.0001 より大きく (例えば 0.001 など) とすると, 計算が収束しないケースを生じた。また, 計算はすべて倍精度で C 言語によるプログラムで行ったが, 計算精度の問題を考慮し, 推定の最大値は 0.999999 としたが, この値は, 実用上は 1.0 と同一とみなせる値である。

3.3 結果

1) ρ の推定

モンテカルロ実験の結果は, 表 1-3 の通りである。 ρ の推定値 $\hat{\rho}$ についてみると, β_{ij} の値によらず, 多くの試行において計算上の最大値である 0.999999 となっている。1,000 回の繰り返し計算中, $n=50$ では 954 回/943 回 (前者の値が $\beta_{11}=\beta_{21}=-1.0, \beta_{12}=\beta_{22}=1.0$, 後者の値が $\beta_{11}=\beta_{21}=0.0, \beta_{12}=\beta_{22}=0.0$ のケース, 以下同じ), $n=100$ では 955 回/945 回, $n=200$ では 915 回/900 回, $n=400$ では 908 回/935 回, $n=800$ では 935 回/945 回である。ここで, $Y_{2i}/\hat{\sigma}_2 + x_i'(\hat{\beta}_1 - \hat{\beta}_2/\hat{\sigma}_2) > 0$ であれば, $\Phi[\{x_i'\hat{\beta}_1 + \rho(Y_{2i} - x_i'\hat{\beta}_2)/\hat{\sigma}_2\}/\sqrt{1-\rho^2}]$ は $\rho \rightarrow 1.0$ で最大の 1.0 となる。したがって, $Y_{1i} > 0$ であるすべての i において $Y_{2i}/\hat{\sigma}_2 + x_i'(\hat{\beta}_1 - \hat{\beta}_2/\hat{\sigma}_2) > 0$ であれば, $\hat{\rho}$ は極限値の 1.0 でなければならないことになる。(0.999999 が得られたすべての試行においては, この条件は満足された。なお, (2.6) 式は $\rho=1.0$ では定義されないので, 以後, これを $\hat{\rho} \rightarrow 1.0$ と表記することとする。)

0.999999 以外の値を取る場合でも, 多くの場合で 1.0 に近い値となっている。1.0 から大きく離れた値となる回数は非常に少ない。 $n=50$ では, 0.7 以下が 14 回/18 回, 0.8 以下が 17 回/22 回, 0.9 以下が 24 回/29 回, 0.95 以下が 28 回/34 回, 0.99 以下が 40 回/52 回であり, 0.99 以下となるのは 5% 程度である。 $n=100$ では, 0.7 以下が 0 回/4 回, 0.8 以下が 1 回/4 回, 0.9 以下が 1 回/6 回, 0.95 以下が 6 回/14 回, 0.99 以下が 26 回/30 回であり, 0.99 以下となるのは 3% 程度である。 n が 200 以上の場合, 0.9 以下 ($n=400, 800$ では 0.95 以下) となることはなく, 0.999 以下となる回数も全体の 5% 程度に過ぎない¹⁾。

$\hat{\rho} < 1.0$ となる確率 $P(\hat{\rho} < 1.0)$ が 0 に収束するかどうかを含め, $\hat{\rho}$ の収束のオーダーやその漸近分布が問題となる。(モンテカルロ実験の結果は $\hat{\rho} < 0.999999$ であるが表記を簡単にするため, 以後, これを $\hat{\rho} < 1.0$ と表すこととする。)これについては, 各種の理論的な考察を行ったが, 現時点では, 結論は得られていない。ここでは, $\hat{\rho}$ の平均二乗誤差 (Mean Squared Error) MSE の平方根 $(MSE)^{1/2}$ と n の関係について分析し, 収束のオーダーについての考察を行う。図 1 は

表1 モンテカルロ実験の結果 ($\beta_{11}=\beta_{21}=-1.0, \beta_{12}=\beta_{22}=1.0$)

	平均	標準偏差	25%分位点	中央値	75%分位点
$n=50$					
β_{11}	-1.0620	0.4145	-1.3113	-1.0408	-0.7802
β_{12}	1.0582	0.3611	0.8098	1.0306	1.2678
β_{21}	-0.8311	0.4368	-1.0839	-0.8056	-0.5589
β_{22}	0.9256	0.3141	0.7180	0.9058	1.1119
σ_2	0.9087	0.1513	0.8131	0.9041	1.0015
ρ	0.986483	0.097839	0.999999	0.999999	0.999999
$n=100$					
β_{11}	-1.0321	0.2608	-1.1771	-1.0191	-0.8675
β_{12}	1.0233	0.2216	0.8708	1.0186	1.1617
β_{21}	-0.9439	0.2802	-1.1275	-0.9357	-0.7538
β_{22}	0.9748	0.2131	0.8336	0.9737	1.1114
σ_2	0.9619	0.1059	0.8938	0.9612	1.0318
ρ	0.998823	0.011143	0.999999	0.999999	0.999999
$n=200$					
β_{11}	-1.0041	0.1838	-1.0941	-1.0007	-0.9158
β_{12}	1.0047	0.1571	0.9406	1.0064	1.0685
β_{21}	-0.9740	0.1803	-1.0751	-0.9723	-0.8740
β_{22}	0.9869	0.1560	0.9138	0.9859	1.0526
σ_2	0.9846	0.0804	0.9527	0.9850	1.0172
ρ	0.999712	0.001857	0.999999	0.999999	0.999999
$n=400$					
β_{11}	-1.0041	0.1338	-1.0941	-1.0007	-0.9158
β_{12}	1.0047	0.1071	0.9406	1.0064	1.0685
β_{21}	-0.9740	0.1403	-1.0751	-0.9723	-0.8740
β_{22}	0.9869	0.1060	0.9138	0.9859	1.0526
σ_2	0.9846	0.0504	0.9527	0.9850	1.0172
ρ	0.999905	0.000423	0.999999	0.999999	0.999999
$n=800$					
β_{11}	-0.9997	0.0908	-1.0608	-0.9997	-0.9395
β_{12}	0.9997	0.0742	0.9513	0.9985	1.0488
β_{21}	-0.9850	0.0984	-1.0471	-0.9850	-0.9239
β_{22}	0.9923	0.0746	0.9451	0.9909	1.0416
σ_2	0.9924	0.0369	0.9673	0.9900	1.0181
ρ	0.99997396	0.00016743	0.999999	0.999999	0.999999

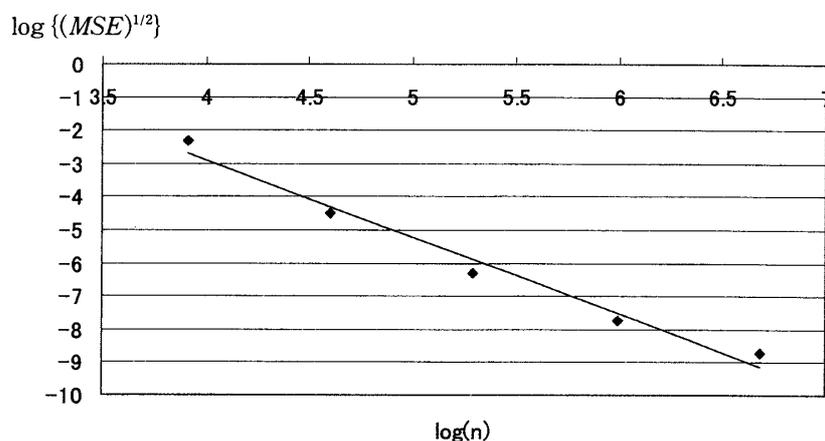
図1 $\hat{\rho}$ の $\log\{(MSE)^{1/2}\}$ と $\log(n)$ のグラフ ($\beta_{11}=\beta_{21}=-1.0, \beta_{12}=\beta_{22}=1.0$)

表2 モンテカルロ実験の結果 ($\beta_{11}=\beta_{21}=0.0, \beta_{12}=\beta_{22}=0.0$)

	平均	標準偏差	25%分位点	中央値	75%分位点
$n=50$					
β_{11}	-0.0164	0.3570	-0.2396	-0.0164	0.2151
β_{12}	0.0102	0.3051	-0.1952	0.0102	0.2106
β_{21}	0.0680	0.3305	-0.1388	0.0799	0.2718
β_{22}	0.0173	0.2615	-0.1589	0.0159	0.1891
σ_2	0.8996	0.1591	0.8088	0.9062	1.0034
ρ	0.981535	0.119986	0.999999	0.999999	0.999999
$n=100$					
β_{11}	0.0002	0.2492	-0.1598	0.0009	0.1583
β_{12}	-0.0001	0.2121	-0.1411	0.0000	0.1422
β_{21}	0.0340	0.2382	-0.1149	0.0378	0.1890
β_{22}	0.0031	0.1967	-0.1239	0.0063	0.1272
σ_2	0.9509	0.1132	0.8799	0.9474	1.0320
ρ	0.995260	0.056257	0.999999	0.999999	0.999999
$n=200$					
β_{11}	-0.0103	0.1508	-0.1150	-0.0154	0.0889
β_{12}	0.0024	0.1364	-0.0854	0.0079	0.0907
β_{21}	0.0105	0.1525	-0.0784	0.0147	0.1145
β_{22}	0.0005	0.1352	-0.0844	0.0055	0.0874
σ_2	0.9737	0.0767	0.9207	0.9723	1.0239
ρ	0.999508	0.004740	0.999999	0.999999	0.999999
$n=400$					
β_{11}	0.0039	0.1156	-0.0729	0.0042	0.0837
β_{12}	-0.0017	0.0967	-0.0637	-0.0034	0.0629
β_{21}	0.0123	0.1127	-0.0640	0.0161	0.0926
β_{22}	-0.0004	0.0943	-0.0614	-0.0031	0.0631
σ_2	0.9852	0.0550	0.9474	0.9853	1.0193
ρ	0.999959	0.000194	0.999999	0.999999	0.999999
$n=800$					
β_{11}	-0.0046	0.0821	-0.0592	-0.0088	0.0485
β_{12}	0.0054	0.0701	-0.0424	0.0080	0.0536
β_{21}	0.0030	0.0811	-0.0505	0.0051	0.0542
β_{22}	0.0047	0.0689	-0.0404	0.0059	0.0524
σ_2	0.9920	0.0360	0.9684	0.9915	1.0174
ρ	0.9999815	0.0001089	0.999999	0.999999	0.999999

$\beta_{11}=\beta_{21}=-1.0, \beta_{12}=\beta_{22}=1.0$ のケースにおける $\log(n)$ と $\hat{\rho}$ の $\log\{(MSE)^{1/2}\}$ のグラフである。
 $\log(n)$ と $\log\{(MSE)^{1/2}\}$ の間には線形関係が認められる。ここで、

$$\log\{(MSE)^{1/2}\} = \alpha_1 + \alpha_2 \log(n) + \varepsilon_i \quad (3.3)$$

として、 α_1, α_2 を最小二乗法によって推定すると、 α_1, α_2 の値 (カッコ内は標準誤差) は、 $\beta_{11}=\beta_{21}=-1.0, \beta_{12}=\beta_{22}=1.0$ では、6.3193(0.46142), -2.3066(0.1972), $\beta_{11}=\beta_{21}=0.0, \beta_{12}=\beta_{22}=0.0$ では、9.4316(1.9741), -2.3582(0.3664) である。また、 $\hat{\rho} < 1.0$ となったのは 5~10% の観測値であったので、(結果の安定性を考慮して) 各ケースについて、 $\hat{\rho}$ の値が下位 3% となった 30 個の観測値を使い $(MSE)^{1/2}$ を求め、同様に α_1, α_2 推定すると、 $\beta_{11}=\beta_{21}=-1.0, \beta_{12}=\beta_{22}=1.0$ では、7.4950(1.2318), -2.2573(0.2286), $\beta_{11}=\beta_{21}=0.0, \beta_{12}=\beta_{22}=0.0$ では、9.4943(0.9793), -2.5467(0.1818) であった。いずれの場合でも、 α_2 の値は -2.0 より小さく、その標準誤差を

表3 $\hat{\rho}$ の推定値の分布

	頻度				
$\beta_{11}=\beta_{21}=-1.0, \beta_{12}=\beta_{22}=1.0$					
	$n=50$	$n=100$	$n=200$	$n=400$	$n=800$
0.7 以下	14	0	0	0	0
0.7-0.8	3	1	0	0	0
0.8-0.9	7	0	0	0	0
0.9-0.95	4	5	0	0	0
0.95-0.99	12	20	8	27	5
0.99-0.999	3	18	47	65	36
0.999-0.999998	3	1	30	0	10
0.999999	954	955	915	908	949
$\beta_{11}=\beta_{21}=0.0, \beta_{12}=\beta_{22}=0.0$					
	$n=50$	$n=100$	$n=200$	$n=400$	$n=800$
0.7 以下	18	4	0	0	0
0.7-0.8	4	0	0	0	0
0.8-0.9	7	2	0	0	0
0.9-0.95	5	8	3	0	0
0.95-0.99	18	16	4	9	5
0.99-0.999	2	22	46	55	39
0.999-0.999998	3	3	47	1	11
0.999999	943	945	900	935	945

考慮すると、 $1-\hat{\rho}$ は n^{-2} またはそれより小さいオーダーで、 $1-\hat{\rho}=O_p(n^{-2})$ であると考えられる。

2) β_{ij} の推定

β_{ij} の推定値 $\hat{\beta}_{ij}$ についてみると、すべての n においてバイアスは小さい。次に、標準偏差についてであるが、特に収束が速いといった傾向は見受けられない。ここで、

$$\log(\text{標準偏差}) = \alpha_1 + \alpha_2 \log(n) + \varepsilon_i \quad (3.4)$$

として最小二乗法によって α_2 の値を求めると(カッコ内は標準誤差, $\hat{\beta}_{11}, \hat{\beta}_{12}, \hat{\beta}_{21}, \hat{\beta}_{22}$ の順), $\beta_{11}=\beta_{21}=-1.0, \beta_{12}=\beta_{22}=1.0$ のケースでは, $-0.5345(0.0856), -0.5612(0.0948), -0.5300(0.0880), -0.5155(0.0847)$, のケースでは, $-0.5350(0.0295), -0.5378(0.0170), -0.5132(0.0185), -0.4910(0.0120)$ であり, 標準偏差は, ほぼ, $n^{-1/2}$ に比例して減少しており, 通常の $n^{-1/2}$ のオーダーの推定量であると考えられる。

この場合, 真のモデルはタイプ I のトービット・モデルであるので, $\beta_{21}, \beta_{22}, \sigma_2$ は (2.2) 式から推定することができる。タイプ I のトービット・モデルの最尤推定量を $\hat{\beta}_{21}, \hat{\beta}_{22}, \hat{\sigma}_2$ とすると, $\hat{\beta}_{21}, \hat{\beta}_{22}, \hat{\sigma}_2$ の (漸近有効推定量である $\tilde{\beta}_{21}, \tilde{\beta}_{22}, \tilde{\sigma}_2$ と比較した) 効率 (efficiency) が問題となる。表 4 は, $\hat{\beta}_{21}, \hat{\beta}_{22}, \hat{\sigma}_2$ の推定結果および 2 つの推定量の標準偏差の比 (=タイプ II のトービット・モデルの標準偏差/タイプ I のトービット・モデルの標準偏差) である。 $\hat{\beta}_{21}, \hat{\beta}_{22}, \hat{\sigma}_2$ の標準偏差は $\tilde{\beta}_{21}, \tilde{\beta}_{22}, \tilde{\sigma}_2$ の 1.1 倍程度以下となっており, 特に, $\hat{\beta}_{22}$ では $n=800$ で 1.0379 および 1.0162 となっている。これらのパラメータの推定に関しては, タイプ II のトービット・モデルを用いたことによるロス (標準偏差の増加) は比較的小さいと言えるであろう。

3) $\hat{\beta}_{11}-\hat{\beta}_{21}/\hat{\sigma}_2, \hat{\beta}_{12}-\hat{\beta}_{22}/\hat{\sigma}_2$ の分布

タイプ I のトービット・モデルは, タイプ II のトービット・モデルにおいて,

表4 タイプIのトービット・モデルによる推定結果

	平均	標準偏差	25%分位点	中央値	75%分位点	標準偏差の比*
$\beta_{11}=\beta_{21}=-1.0, \beta_{12}=\beta_{22}=1.0$						
$n=50$						
β_{21}	-0.9611	0.3930	-1.1983	-0.9293	-0.6882	1.1115
β_{22}	0.9806	0.3092	0.7684	0.9778	1.1882	1.0160
σ_2	0.9378	0.1356	0.8390	0.9349	1.0215	1.1156
$n=100$						
β_{21}	-0.9545	0.2452	-1.1107	-0.9438	-0.7856	1.1431
β_{22}	0.9783	0.2007	0.8408	0.9676	1.1152	1.0618
σ_2	0.9510	0.0956	0.8871	0.9448	1.0134	1.1071
$n=200$						
β_{21}	-0.9463	0.1791	-1.0668	-0.9384	-0.8235	1.0066
β_{22}	0.9726	0.1426	0.8724	0.9701	1.0673	1.0726
σ_2	0.9515	0.0704	0.9040	0.9476	0.9966	1.1414
$n=400$						
β_{21}	-0.9490	0.1235	-1.0370	-0.9419	-0.8639	1.1355
β_{22}	0.9732	0.0987	0.9046	0.9692	1.0388	1.0735
σ_2	0.9572	0.0471	0.9244	0.9562	0.9919	1.0691
$n=800$						
β_{21}	-0.9530	0.0911	-1.0141	-0.9518	-0.8865	1.0801
β_{22}	0.9759	0.0719	0.9254	0.9773	1.0272	1.0379
σ_2	0.9583	0.0339	0.9350	0.9592	0.9813	1.0889
$\beta_{11}=\beta_{21}=0.0, \beta_{12}=\beta_{22}=0.0$						
$n=50$						
β_{21}	-0.0016	0.3157	-0.2173	0.0222	0.1972	1.0470
β_{22}	0.0208	0.2748	-0.1633	0.0170	0.2066	0.9514
σ_2	0.9399	0.1416	0.8476	0.9274	1.0226	1.1235
$n=100$						
β_{21}	0.0163	0.2199	-0.1189	0.0245	0.1605	1.0829
β_{22}	-0.0026	0.1901	-0.1257	-0.0008	0.1185	1.0349
σ_2	0.9543	0.1000	0.8847	0.9500	1.0166	1.1321
$n=200$						
β_{21}	0.0161	0.1527	-0.0844	0.0225	0.1245	0.9982
β_{22}	0.0041	0.1275	-0.0781	0.0015	0.0875	1.0608
σ_2	0.9611	0.0695	0.9137	0.9600	1.0056	1.1045
$n=400$						
β_{21}	0.0119	0.1081	-0.0597	0.0154	0.0862	1.0422
β_{22}	0.0035	0.0950	-0.0633	0.0072	0.0639	0.9927
σ_2	0.9639	0.0500	0.9293	0.9642	0.9957	1.1001
$n=800$						
β_{21}	0.0182	0.0798	-0.0359	0.0199	0.0714	1.0162
β_{22}	-0.0004	0.0678	-0.0479	-0.0002	0.0440	1.0162
σ_2	0.9659	0.0335	0.9414	0.9654	0.9893	1.0741

* タイプIIのトービット・モデルの標準偏差/タイプIのトービット・モデルの標準偏差

$$\beta_{11}=\beta_{21}/\sigma_2, \beta_{12}=\beta_{22}/\sigma_2 \quad (3.5)$$

という条件を満足する。ここでは、(3.5)式について分析する。 $\hat{\beta}_{21}, \hat{\beta}_{22}, \hat{\sigma}_2, \hat{\beta}_{12}, \hat{\beta}_{22}, \hat{\sigma}_2$ の分布は表5の通りである。 $n=50$ の場合以外は、そのバイアスは小さい。標準偏差は、 $\beta_{11}=\beta_{21}=-1.0, \beta_{12}=\beta_{22}=1.0$ のケースでは、 $n=50$ で $0.38220/0.26884$ (前者の値が $\hat{\beta}_{11}-\hat{\beta}_{21}/\hat{\sigma}_2$, 後者の値が $\hat{\beta}_{12}$

表5 $\hat{\beta}_{11}-\hat{\beta}_{21}/\sigma_2, \hat{\beta}_{12}-\hat{\beta}_{22}/\sigma_2$ の分布

	平均	標準偏差	25%分位点	中央値	75%分位点	歪度	尖度	$(MSE)^{1/2}$
$\beta_{11}=\beta_{21}=-1.0, \beta_{12}=\beta_{22}=1.0$								
$\hat{\beta}_{11}-\hat{\beta}_{21}/\sigma_2$								
n								
50	-0.1618	0.3822	-0.2405	-0.0673	0.0215	-3.3406	17.6531	0.4150
100	-0.0532	0.1355	-0.0933	-0.0260	0.0163	-2.2439	11.6950	0.1455
200	-0.0253	0.0589	-0.0511	-0.0127	0.0093	-1.1420	4.5150	0.0642
400	-0.0149	0.0310	-0.0276	-0.0075	0.0041	-1.7600	5.5830	0.0344
800	-0.0073	0.0163	-0.0142	-0.0042	0.0026	-1.3120	4.8354	0.0179
$\hat{\beta}_{12}-\hat{\beta}_{22}/\sigma_2$								
n								
50	0.0272	0.2688	-0.0872	0.0047	0.1171	0.9293	5.7134	0.2702
100	0.0046	0.1090	-0.0426	0.0037	0.0479	0.5163	4.9234	0.1091
200	0.0018	0.0508	-0.0208	0.0026	0.0247	-0.3172	3.0286	0.0508
400	0.0012	0.0246	-0.0127	-0.0002	0.0146	0.1207	2.1999	0.0247
800	-0.0008	0.0142	-0.0078	-0.0005	0.0067	-0.0905	3.2396	0.0143
$\beta_{11}=\beta_{21}=0.0, \beta_{12}=\beta_{22}=0.0$								
$\hat{\beta}_{11}-\hat{\beta}_{21}/\sigma_2$								
n								
50	-0.1230	0.3321	-0.1833	-0.0511	0.0245	-4.4223	33.7345	0.3542
100	-0.0460	0.1613	-0.0673	-0.0129	0.0150	-8.3077	112.2575	0.1677
200	-0.0234	0.0530	-0.0396	-0.0115	0.0073	-2.2394	8.5910	0.0579
400	-0.0101	0.0227	-0.0197	-0.0065	0.0034	-1.2191	4.4540	0.0249
800	-0.0084	0.0136	-0.0148	-0.0061	0.0004	-1.4180	4.5643	0.0160
$\hat{\beta}_{12}-\hat{\beta}_{22}/\sigma_2$								
n								
50	-0.0093	0.2137	-0.0930	-0.0044	0.0805	0.0164	6.7476	0.2139
100	-0.0041	0.0958	-0.0419	-0.0035	0.0327	0.8556	15.9041	0.0959
200	0.0010	0.0422	-0.0171	0.0007	0.0189	0.0470	3.2600	0.0422
400	-0.0014	0.0204	-0.0111	-0.0004	0.0092	-0.3019	3.3021	0.0205
800	0.0008	0.0109	-0.0061	0.0006	0.0072	0.1152	1.4786	0.0110

$-\hat{\beta}_{22}/\sigma_2$ 以下同じ), $n=100$ で $0.13545/0.10898$, $n=200$ で $0.05894/0.05081$, $n=400$ で $0.03102/0.02464$, $n=800$ で $0.01634/0.01424$ である. $\beta_{11}=\beta_{21}=0.0, \beta_{12}=\beta_{22}=0.0$ のケースでは, $n=50$ で $0.33214/0.21368$, $n=100$ で $0.16132/0.09580$, $n=200$ で $0.05299/0.04218$, $n=400$ で $0.02271/0.02041$, $n=800$ で $0.01358/0.01093$ である. 個々の係数の標準偏差の減少に比べ, これらの標準偏差の減少率は大きい. $\hat{\rho}$ の場合ほどではないが, 通常 $n^{-1/2}$ より速いオーダーで収束する可能性があることを示唆していると考えられる.

次に, $\hat{\rho}$ と同様, $\hat{\beta}_{1i}-\hat{\beta}_{2i}/\sigma_2, i=1,2$ の平均二乗誤差の平方根 $(MSE)^{1/2}$ と n の関係について考察する. 図2は $\beta_{11}=\beta_{21}=0.0, \beta_{12}=\beta_{22}=0.0$ のケースにおける n^{-1} と $\hat{\beta}_{1i}-\hat{\beta}_{2i}/\sigma_2$ の $(MSE)^{1/2}$ のグラフである. n^{-1} と $(MSE)^{1/2}$ は, ほぼ比例している. さらに, (3.3)式の α_1, α_2 を最小二乗法によって推定すると, α_1, α_2 の値(カッコ内は標準誤差)は, $\beta_{11}=\beta_{21}=-1.0, \beta_{12}=\beta_{22}=1.0$ では, $1.1150(0.0781), -1.0632(0.0573)$, $\beta_{11}=\beta_{21}=0.0, \beta_{12}=\beta_{22}=0.0$ では, $-1.1699(0.0842), -1.0804(0.0335)$ である. すべての場合において α_2 の値は -1.0 に近く, $\hat{\beta}_{1i}-\hat{\beta}_{2i}/\sigma_2, i=1,2$ は n^{-1} のオーダーであることが示唆される. (収束のオーダーについては, 次章において理論的な考察を加える.)

なお, $\beta_1=\beta_2/\sigma_2$ に関しては, Fin and Schmidt (1984) はタイプIのトービット・モデルに基

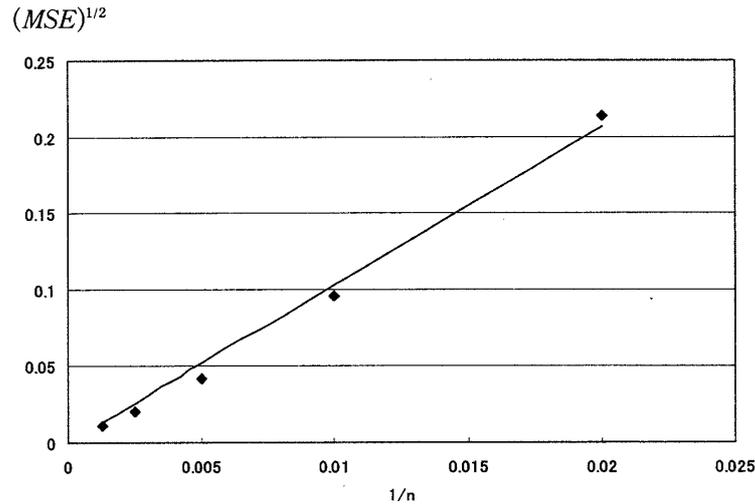


図2 $\hat{\beta}_{12} = \hat{\beta}_{22}/\hat{\sigma}$ の $(MSE)^{1/2}$ と $1/n$ のグラフ ($\beta_{11} = \beta_{21} = 0.0, \beta_{12} = \beta_{22} = 1.0$)

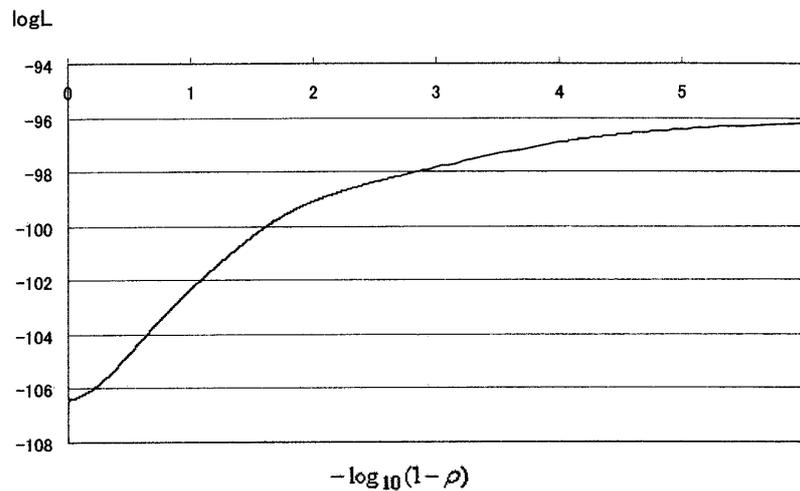


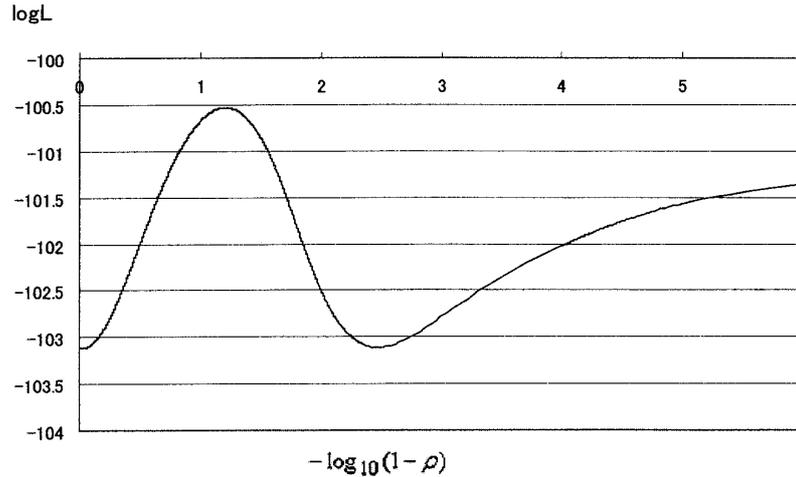
図3 対数尤度の値 ($\hat{\rho} = 0.999999$)

づくラグランジュ乗数検定 (Lagrange multiplier test) を, Greene (2000, pp. 915) はプロビット・モデルと切断回帰モデルによる (2.3) 式の推定に基づく尤度比検定を提案している. しかしながら, これらはタイプIIのトービット・モデルの尤度関数を考慮しておらず, 通常 $n^{-1/2}$ のオーダーのものとなっている. $\hat{\beta}_1 - \hat{\beta}_2/\hat{\sigma}_2$ の漸近分布を求めることは今後の課題であるが, 誤差項の次元が減少し分布が退化していることを考慮することによって, より優れた検定を行うことができる可能性があると考えられる.

次に分布の形状であるが, 歪度・尖度 (正規分布を0とする) を求めると, $n=800$ においても歪度が $-1.3120, -0.0905, -1.4180, 0.1152$, 尖度が $4.8354, 3.2396, 4.5643, 1.4786$ である. 特に尖度はすべてのケースで0よりかなり大きくなっており, 漸近分布が正規分布でない可能性を示唆していると言える.

4) 尤度関数の形状

モンテカルロ実験の結果からは, タイプIのトービット・モデルから発生させたデータから求めた $\hat{\rho}$ は, ほとんどの場合, 0.999999 またはそれに近い値となっている. ここでは, ρ に対する尤度関数の形状について分析する. 図3は, $n=100, \beta_{11} = \beta_{21} = -1, \beta_{12} = \beta_{22} = 1$ のケースで, $\hat{\rho} = 0.999999$ となった試行における ρ と対数尤度 $\log L$ の関係をグラフにしたものである. \log

図4 対数尤度の値 ($\hat{\rho}=0.937444$)

L は、与えられた ρ に対して、条件付尤度関数を最大にする値から求めた。また、 $\rho=1.0$ の近傍での尤度関数の形状が問題となるため、横軸の値は、 $-\log_{10}(1-\rho)=\log_{10}\{1/(1-\rho)\}$ とした。したがって、 $\rho=0.9, 0.99, 0.999, 0.9999, 0.99999, 0.999999$ の場合の横軸の値は、それぞれ、1.0, 2.0, 3.0, 4.0, 5.0, 6.0 となっている。 $\log L$ の値は、 ρ が 1.0 に近づくに従い増加するが、その値は発散せずに、収束していく傾向にあることが分かる。

一方、図4は、同じく $n=100, \beta_{11}=\beta_{21}=-1, \beta_{12}=\beta_{22}=1$ のケースで、 $\hat{\rho}=0.9374$ となった試行における $\log L$ の値である。この場合、 $\hat{\rho}$ の値は、1.0 とはかなり異なる。 $\log L$ は、 $\rho=0.9374$ (横軸の値 $=-\log_{10}(1-\rho)=1.2037$) で最大値 -100.531 をとった後、減少し、 $\rho=0.9966$ (横軸の値 $=2.4684$) で局所的な最小値 -103.11 をとり、その後は、増加に転じるが、増加率は、徐々に小さくなり、収束していく傾向にあることが分かる。 ρ の値が 1.0 に近づくると $\log L$ の値は増加する傾向にあるため、計算された $\hat{\rho}$ は尤度関数の局所的な最大値を与えるに過ぎない場合が考えられる。このため、モンテカルロ実験では、すべての場合において、 $\rho=0.9999999$ までの計算を行っている。

なお、図4の例では、 $\rho=0.999999$ (横軸の値 $=6.0$) においては、 $\log L=-101.361$ であり、 0.999999 以下の区間の最大値 -100.53 よりかなり小さく、また、 $\log L$ がすでに収束傾向にあることから、この場合は、 $\hat{\rho}=0.9374$ が最尤推定値であると考えられる。

4. $\hat{\beta}_1 - \hat{\beta}_2 / \hat{\sigma}_2$ の収束のオーダーの考察

$\hat{\beta}_1 - \hat{\beta}_2 / \hat{\sigma}_2$ の漸近分布を求めることは、検定などへの応用上も重要である。しかしながら、通常の最尤法の漸近理論が成り立たないため、現状では漸近分布ばかりでなく、その正確な収束のオーダーを求めることもできていない。前章のモンテカルロ実験の結果から、 $\hat{\beta}_1 - \hat{\beta}_2 / \hat{\sigma}_2$ は n^{-1} のオーダーで収束することが示唆された。ここでは、 $\hat{\rho} \rightarrow 1.0$ となる場合について、 $\hat{\beta}_1 - \hat{\beta}_2 / \hat{\sigma}_2$ が n^{-1} のオーダーであること証明する。次に、 $\hat{\rho} < 1.0$ の場合についての収束のオーダーについて考察する。

$\hat{\beta}_1 - \hat{\beta}_2 / \hat{\sigma}_2$ の収束の正確なオーダーや漸近分布を求めるためには、 $\hat{\rho} < 1.0$ となる確率 $P(\hat{\rho} < 1.0)$ が 0 に収束するかどうかを含め、 $\hat{\rho}$ の収束のオーダーやその漸近分布が問題となる。すでに述べたように、各種の理論的な考察を行ったが、現時点では、結論は得られていない。本章の考察は、特別なケースにおいてのものであるが、一般的な解法への足掛かりとなるものであると考えられる。

4.1 $\hat{\rho} \rightarrow 1.0$ となる場合

前項のモンテカルロ実験の結果からは、90~95%の試行で尤度関数が図3の形状となり、0.999999で最大値をとる。また、これらすべての試行では、 $Y_{1i} > 0$ であるすべての*i*において $Y_{2i}/\hat{\sigma}_2 + x_i'(\hat{\beta}_1 - \hat{\beta}_2/\hat{\sigma}_2) > 0$ であるため、 $\hat{\rho} \rightarrow 1.0$ であると考えられる。 $\hat{\rho} \rightarrow 1.0$ となる場合について $\hat{\beta}_1 - \hat{\beta}_2/\hat{\sigma}_2$ の収束のオーダーが $1/n$ であることを示す。 $\{x_i\}$ は独立同一分布に従いその分布の台 (support) Ω は有界であり、 $\sup_{x \in \Omega} \|x\| < M$ となる有限の値 $M < \infty$ が存在するとする。また、説明変数間に完全な多重共線性がないなどの標準的な条件は満足されるものとする。

(2.6) 式の尤度関数において $x_{1i} = x_{2i} = x_i$ として、 $\rho \rightarrow 1.0$ の極限を考えると、

$$\log L(\beta_1, \beta_2, \sigma_2^2) = \sum_{d_i=1} \log \{1 - \Phi(x_i' \beta_1)\} \\ \cdot \sum_{d_i=1} \log [1\{x_i' \beta_1 + (Y_{2i} - x_i' \beta_2)/\sigma_2 \geq 0\} \cdot \sigma_2^{-1} \phi\{Y_{2i} - x_i' \beta_2\}/\sigma_2] \quad (4.1)$$

である。 $1(\cdot)$ は \cdot が真の場合1、それ以外0のindicator関数である。

$$\gamma = \beta_2/\sigma_2 - \beta_1 \quad (4.2)$$

とおくと、(4.1)式は、

$$\log L(\beta_2, \gamma, \sigma_2^2) = \sum_{d_i=0} \log \{1 - \Phi(x_i' \beta_2/\sigma_2 - x_i' \gamma)\} \\ \cdot \sum_{d_i=1} \log [1\{Y_{2i}/\sigma_2 - x_i' \gamma \geq 0\} \cdot \sigma_2^{-1} \phi\{Y_{2i} - x_i' \beta_2\}/\sigma_2] \quad (4.3)$$

となる。これは打ち切り点分からない場合の打ち切り点推定問題の拡張問題となっており、最小値の分布(極値分布)の応用によって分布の収束のオーダーを求めることができる。 γ の最尤推定量の収束の速度が n^{-1} より遅いとした場合、矛盾を生じることを3つの部分に分けて証明する。

1) 対数尤度の差

$\hat{\beta}_2, \hat{\gamma}, \hat{\sigma}_2$ を最尤推定量とする。 $(\hat{\beta}_2, \hat{\gamma}, \hat{\sigma}_2)$ と $\gamma=0$ とした $(\hat{\beta}_2, 0, \hat{\sigma}_2)$ における対数尤度の差を考える。 $d_i=1$ では $Y_{2i}/\hat{\sigma}_2 - x_i' \hat{\gamma} > 0$ でなければならないから、 $I_0 = \{i: d_i=1\}$ とすると

$$\log L(\hat{\beta}_2, \hat{\gamma}, \hat{\sigma}_2^2) - \log L(\hat{\beta}_2, 0, \hat{\sigma}_2^2) \\ = \sum_{i \in I_0} [\log \{1 - \Phi(x_i' \hat{\beta}_2/\hat{\sigma}_2 - x_i' \hat{\gamma})\} - \log \{1 - \Phi(x_i' \hat{\beta}_2/\hat{\sigma}_2)\}] \quad (4.4)$$

である。中間値の定理から

$$\log L(\hat{\beta}_2, \hat{\gamma}, \hat{\sigma}_2^2) - \log L(\hat{\beta}_2, 0, \hat{\sigma}_2^2) = \sum_{i \in I_0} \lambda(x_i' \hat{\beta}_2/\hat{\sigma}_2 + \xi_i) x_i' \hat{\gamma}, \\ \lambda(z) = \frac{d \log \Phi(z)}{dz} = \frac{\phi(z)}{\Phi(z)} \quad (4.5)$$

となる。 ξ_i は0と $x_i' \hat{\gamma}$ の間の値である。 $\lambda(z) > 0, \lambda'(z)$ で $\lambda(z)$ は単調減少関数であるから、

$$\sum_{i \in I_0} \lambda(x_i' \hat{\beta}_2/\hat{\sigma}_2 + \xi_i) x_i' \hat{\gamma} \leq \sum_{i \in I_0} \lambda(x_i' \hat{\beta}_2/\hat{\sigma}_2) x_i' \hat{\gamma} \quad (4.6)$$

である。

ここで、 $\hat{\gamma} = O_p(\eta^{-1})$ で $n \rightarrow \infty$ の場合、 $\eta \hat{\gamma}$ は0に確率収束しないものとする。 $\hat{\beta}_2, \hat{\sigma}_2$ は一致推定量であるから(これは、通常の議論によって、簡単に示すことができる)、

$$\sum_{i \in I_0} \lambda(x_i' \hat{\beta}_2 / \hat{\sigma}_2) x_i' \hat{\gamma} = \sum_{i \in I_0} \lambda(x_i' \beta_2 / \sigma_2) x_i' \hat{\gamma} + o_p(\eta \cdot n) \quad (4.7)$$

となる。(4.4)–(4.7) 式から

$$\log L(\hat{\beta}_2, \hat{\gamma}, \hat{\sigma}_2^2) - \log L(\hat{\beta}_2, 0, \hat{\sigma}_2^2) \leq \sum_{i \in I_0} \lambda(x_i' \beta_2 / \sigma_2) x_i' \hat{\gamma} + o_p(\eta \cdot n) \quad (4.8)$$

が得られる。

2) I_0 のグループ分け

ここでは、 I_0 を $x_i' \hat{\gamma}$ の大きさによって、グループに分け、各グループに含まれる要素の数のオーダーを求める。いま、 $n/\eta \rightarrow \infty$ で $\hat{\gamma}$ 収束の速度が n^{-1} より遅いと仮定する。説明変数間には完全な多重共線性が存在しないので、

$$\begin{aligned} P(x_i \in \Omega_1) &> \delta, \\ \Omega_1 &= \{x : \lim_{n \rightarrow \infty} [P(\eta | x' \hat{\gamma} | > \varepsilon) > 0]\} \end{aligned} \quad (4.9)$$

となる $\varepsilon, \delta > 0$ が存在する。次に、

$$\Omega_1^+ = \{x : \lim_{n \rightarrow \infty} [P(\eta \cdot x' \hat{\gamma} > \varepsilon) > 0]\} \quad (4.10)$$

とすると、

$$P(x_i \in \Omega_1^+) = 0 \quad (4.11)$$

でなければならない。なぜなら、 $P(x_i \in \Omega_1^+) > 0$ であるとすると、

$$I_1 = \{i : \eta \cdot x_i' \hat{\gamma} > \varepsilon\} \cap I_0, \quad (4.12)$$

とした場合、 I_1 に含まれる要素の数は m_1 の n オーダーとなるため、 $\{Y_i : i \in I_1\}$ の最小値は $O_p(n^{-1})$ となり

$$P[Y_{2i} > 0, x_i' \hat{\gamma} > Y_i \text{ となる } i \text{ が存在し, } 1(Y_{2i} - x_i' \hat{\gamma} > 0) = 0 \text{ となる確率}] \rightarrow 1 \quad (4.13)$$

となり、 $\hat{\gamma}$ が最尤推定量であることに反する。したがって、

$$m_1 = o_p(n) \quad (4.14)$$

でなければならない。

次に、

$$I_2 = \{i : (x\eta)^{-1/2} < x_i' \hat{\gamma} \leq \varepsilon \eta^{-1}\} \cap I_0 \quad (4.15)$$

とする。 I_1 の場合と同様の議論によって、 I_2 に含まれる要素の数 m_2 は

$$m_2 = o_p(n) \quad (4.16)$$

でなければならない。さらに、

$$I_3 = \{i : 0 < x_i' \hat{\gamma} \leq (x\eta)^{-1/2}\} \quad (4.17)$$

と定義する。(証明のためには, I_3 に含まれる要素の数 m_3 は $O_p(n)$ でよい.)
ここで,

$$\Omega_1^- = \{x : \lim_{n \rightarrow \infty} P(\eta \cdot x' \hat{\gamma} < \varepsilon) > 0\} \quad (4.18)$$

とすると, (4.9), (4.11) 式から

$$P(x_i \in \Omega_1^-) > \delta \quad (4.19)$$

である. $P(Y_i = 0 | x_i \in \Omega_1^-) = 0$ であるから,

$$\lim_{n \rightarrow \infty} P(i \in I_2) > \delta_0, \quad (4.20)$$

$$I_4 = \{i : \eta \cdot x_i' \hat{\gamma} < -\varepsilon\} \cap I_0$$

となる $\delta_0 > 0$ が存在する. したがって, m_4 を I_4 に含まれる要素の数とすると,

$$P(m_4 > \delta_0 n) \rightarrow 1 \quad (4.21)$$

である.

3) 対数尤度の差の符号

ここでは, 各グループにおける $\lambda(x_i' \beta_2 / \sigma_2) x_i' \hat{\gamma}$ の和の符号を求め, (4.4) 式の対数尤度の差が $n \rightarrow \infty$ の場合, 確率 1 で負となることを示す. ここで,

$$\begin{aligned} \sum_{i \in I_0} \lambda(x_i' \beta_2 / \sigma_2) x_i' \hat{\gamma} &= \sum_{i \in I_1} \lambda(x_i' \beta_2 / \sigma_2) x_i' \hat{\gamma} + \sum_{i \in I_2} \lambda(x_i' \beta_2 / \sigma_2) x_i' \hat{\gamma} \\ &\quad + \sum_{i \in I_3} \lambda(x_i' \beta_2 / \sigma_2) x_i' \hat{\gamma} + \sum_{x_i' \hat{\gamma} \leq 0} \lambda(x_i' \beta_2 / \sigma_2) x_i' \hat{\gamma} \\ &\leq \sum_{i \in I_1} \lambda(x_i' \beta_2 / \sigma_2) x_i' \hat{\gamma} + \sum_{i \in I_2} \lambda(x_i' \beta_2 / \sigma_2) x_i' \hat{\gamma} + \sum_{i \in I_3} \lambda(x_i' \beta_2 / \sigma_2) x_i' \hat{\gamma} \\ &\quad + \sum_{i \in I_4} \lambda(x_i' \beta_2 / \sigma_2) x_i' \hat{\gamma} \end{aligned} \quad (4.22)$$

である. $x_j, \hat{\gamma}_{ij}, j=1, 2, \dots, k$ を $x, \hat{\gamma}_j$ の第 j 成分とすると, (4.14) 式から

$$\begin{aligned} \sum_{i \in I_1} \lambda(x_i' \beta_2 / \sigma_2) x_i' \hat{\gamma} &\leq \sum_{i \in I_1} \nu \sum_{j=1}^k |x_{ij} \hat{\gamma}_j| \\ &\leq m_1 \nu w \sum_{j=1}^k |\hat{\gamma}_j| = o_p(n\eta^{-1}), \\ \nu &= \sup_{x \in \mathcal{D}} \{\gamma(x_i' \beta_2 / \sigma_2)\}, \\ w &= \sup_{x \in \mathcal{D}} \max_{1 \leq j \leq k} \{|x_j|\}, \end{aligned} \quad (4.23)$$

である. 同様に, (4.16) 式から

$$\sum_{i \in I_2} \lambda(x_i' \beta_2 / \sigma_2) x_i' \hat{\gamma} = \sum_{i \in I_2} \nu \eta^{-1} = o_p(n\eta^{-1}) \quad (4.24)$$

である. さらに, (4.17) 式から,

$$\sum_{i \in I_3} \lambda(x_i' \beta_2 / \sigma_2) x_i' \hat{\gamma} \leq \sum_{i \in I_3} \nu (n\eta)^{-1/2} = O_p\{(n/\eta)^{1/2}\} = o_p(n\eta^{-1}) \quad (4.25)$$

である。一方,

$$\sum_{i \in I_4} \lambda(x_i' \beta_2 / \sigma_2) x_i' \hat{\gamma} \leq - \sum_{i \in I_4} \underline{\nu} \eta^{-1} = \underline{\nu} m_4 \eta^{-1} \quad (4.26)$$

$$\underline{\nu} = \inf_{x \in \mathcal{G}} \lambda(x' \beta),$$

である。

(4.22) - (4.26) 式から

$$\sum_{i \in I_0} \lambda(x_i' \beta_2 / \sigma_2) x_i' \hat{\gamma} \leq - \varepsilon \underline{\nu} m_2 \eta^{-1} + o_p(n\eta^{-1}) \quad (4.27)$$

である。(4.8), (4.27) 式から,

$$\log L(\hat{\beta}_2, \hat{\gamma}, \hat{\sigma}_2^2) - \log L(\hat{\beta}_2, 0, \hat{\sigma}_2^2) \leq \varepsilon \underline{\nu} m_2 \eta^{-1} + o_p(n\eta^{-1}) \quad (4.28)$$

を得る。(4.21) 式から $P[-\varepsilon \underline{\nu} m_2 / \eta < -\varepsilon \underline{\nu} \delta_0 n \eta^{-1}] \rightarrow 1$ であり, また, $\underline{\nu} > 0$ であるから,

$$P[\log L(\hat{\beta}_2, \hat{\gamma}, \hat{\sigma}_2^2) - \log L(\hat{\beta}_2, 0, \hat{\sigma}_2^2) < 0] \rightarrow 1 \quad (4.29)$$

となり, $\hat{\gamma}$ が最尤推定量であるという仮定に反する。すなわち, $n/\eta \rightarrow \infty$ で $\hat{\gamma}$ の収束の速度が n^{-1} より遅いことはなく,

$$\hat{\gamma} = O_p(1/n) \quad (4.30)$$

でなければならない。

モデルが定数項を含み x_i の第1成分は1であるとする。 $s = \min\{Y_i : Y_i > 0\}$ とすると, s は n^{-1} のオーダーで n_s の極限分布は退化しない。ここで, $\hat{\gamma} = o_p(n^{-1})$ とすると,

$$P(\max_{1 \leq i \leq n} x_i' \hat{\gamma} < s) \rightarrow 1 \quad (4.31)$$

となり,

$$P(\log L(\hat{\beta}_2, \hat{\gamma}, \hat{\sigma}_2^2) < \log(\hat{\beta}_2, \hat{\gamma}, \hat{\sigma}_2^2)) \rightarrow 1 \quad (4.32)$$

$$\tilde{\gamma}' = (s, 0, 0, \dots, 0)$$

であり矛盾を生じる。したがって, $\hat{\gamma} = o_p(n^{-1})$ であることはなく, $n\hat{\gamma}$ は0に確率収束しないことになる。

なお, これらの議論は最小値の分布理論に基づいているが, 最小値の漸近分布は正規分布ではなく指数分布・極値分布である。このため, $\hat{\gamma}$ の漸近分布は正規分布でないことが予想される。

4.2 $\hat{\rho} < 1.0$ の場合

モンテカルロ実験において, $\hat{\rho}$ の値は一部の試行(5~10%)において, 尤度関数が図4のような形状となり, 0.999999と異なった値となる。 $\gamma = \beta_2 / \sigma_2 - \beta_1$ とおくと, (2.6) 式の尤度関数は

$$\begin{aligned} \log L(\beta_2, \gamma, \sigma_2^2, \rho) &= \sum_{d_i=0} \log \{1 - \Phi(x_i' \beta_2 / \sigma_2 - x_i' \gamma)\} \\ &\cdot \sum_{d_i=0} \log [\Phi\{\rho Y_{2i} / \sigma_2 - x_i' \gamma + (1 - \rho) x_i' \beta_2 / \sigma_2\} \sigma_2^{-1} \phi\{Y_{2i} - x_i' \beta_2\} / \sigma_2] \end{aligned} \quad (4.33)$$

である。

$$\begin{aligned} \frac{d \log L}{d \rho} &= (1 - \rho^2)^{-3/2} \sum_{d_i=1} \lambda(\Psi_i) \{Y_i / \sigma - x_i \gamma + (1 - \rho)(Y_i - x_i' \beta^2) / \sigma_2\} \\ \Psi_i(\beta_2, \gamma, \sigma_2^2, \rho) &= \{Y_{2i} / \sigma_2 - x_i' \gamma - (1 - \rho)(Y_{2i} - x_i' \beta_2) / \sigma_2\} / \sqrt{1 - \rho^2} \end{aligned} \quad (4.34)$$

であるから、 $\rho < 1.0$ で $\partial \log L / \partial \rho = 0$ となることは可能であり、実際にそのような試行を生じる。ここでは、そのような場合の、 $\hat{\gamma} = \hat{\beta}_2 / \hat{\sigma}_2 - \hat{\beta}_1$ の分布について分析する。

$\hat{\rho} < 1.0$ となったのは 5~10% の観測値であったので、(結果の安定性を考慮して) 各ケースについて、 $\hat{\rho}$ の値が下位 3% となった 30 個の観測値を使い $\hat{\beta}_1 - \hat{\beta}_2 / \hat{\sigma}_2$, $i=1, 2$ の平均二乗誤差 MSE の平方根 $(MSE)^{1/2}$ を求め、

$$\log \{(MSE)^{1/2}\} = \alpha_1 + \alpha_2 \log(n) + \varepsilon_i \quad (4.35)$$

として、 α_1, α_2 を最小二乗法によって推定すると、 α_2 の値(カッコ内は標準誤差)は、 $\beta_{11} = \beta_{21} = -1.0, \beta_{12} = \beta_{22} = 1.0$ では、 $-0.5317 (0.0623), -0.4701 (0.0517)$, $\beta_{11} = \beta_{21} = 0.0, \beta_{12} = \beta_{22} = 0.0$ では、 $-0.6050 (0.0765), -0.5356 (0.0285)$ と、すべてのケースにおいて -0.5 に近く、この場合、supper efficiency に関連する問題は生じていないと考えられる。

5. まとめ

本論文では、タイプIとタイプIIのトービット・モデルの比較を行った。前者は後者の特別なケースであるが、誤差項の次元が減少して分布が退化してしまうため、標本がタイプIのトービット・モデルから得られた場合、タイプIIのトービット・モデルの最尤推定量に対しては、通常の推定の漸近理論が成り立たない。本論文は、誤差項の分布が退化し、次元が減少するときに起こる問題を分析した最初の論文である。ここでは、タイプIのトービット・モデルから発生させたデータを用い、最尤法によってタイプIIのトービット・モデルの推定を行うモンテカルロ実験を行った。誤差項の相関係数 ρ の推定量 $\hat{\rho}$ は、多くの試行 (90~95%) において 0.999999 (計算の精度の信頼性の問題から誤差項の相関係数 ρ の最大値は 0.999999 とした) となった。平均二乗誤差の分析からは、 $1 - \hat{\rho} = O_p(n^{-2})$ であることが示された。また、係数間の制約条件においても平均二乗誤差の分析および理論的な考察から、 $\hat{\gamma} = \hat{\beta}_1 - \hat{\beta}_2 / \hat{\sigma}_2 = O_p(n^{-1})$ であると考えられる。なお、モンテカルロ実験の結果および $\hat{\gamma}$ の分布は最小値の分布と密接に結びついていることから、漸近分布は正規分布とは異なることが予想される。

$\hat{\rho} < 1.0$ となる確率 $P(\hat{\rho} < 1.0)$ が 0 に収束するかどうかを含めた $\hat{\rho}$ の漸近分布、さらに、 $\hat{\gamma}$ の漸近分布を求めることは今後の課題である。これらは、タイプI、タイプIIのトービット・モデルの検定などの応用問題において重要である。なお、本論文で考察した、誤差項の次元が減少して分布が退化してしまう問題は、多項プロビット・モデルと順序プロビット・モデルとの関係 (小林 (2000), 縄田 (2000)) においても起こるが、この分析も今後の課題である。

注)

1) $\hat{\rho}$ の値は、ほとんどの場合、計算上の最大値である 0.999999、またはそれに近い値となるが、一部の試行においては、1.0 はかなり異なった値となる。したがって、 $\rho = 1.0$ の検定を $\hat{\rho}$ を使って行った場合、検定のサイズ

(size)は0とはならない。これに対して、他の次元が減少して分布が退化する問題、例えば、主成分分析における固有値0の場合などでは、サイズ0の検定を考えることが可能である。主成分分析で真の固有値が0であれば、標本空間の次元が減少してしまうため、データから計算された固有値もすべて0となる。このため、固有値が0であるという帰無仮説は、固有値がいかに小さくとも0でなければ棄却され、サイズ0の検定を得ることができ。 (なお、固有値がいかに小さくとも0でなければ棄却されるのでは、観測誤差の存在などを考えると、実用上の検定として意味をもたないと考えられる。共和分検定 (cointegration), 特に Johansen (1988, 1991) の方法は、 $I(0)$ と $I(1)$ の2つのプロセスを導入することにより、(観測値数が大きくなると、帰無仮説のもとで固有値の比は0に近づくが有限標本では0でなくなるため) 実用上意味のある検定を可能にしたものと解釈できる。)

タイプIのトービット・モデルとタイプIIのモデルの比較においても、負となる観測値が存在するかどうか、すなわち、帰無仮説をタイプIのトービット・モデルとすると、「 $Y_{2i} < 0$ となる観測値が存在する場合、帰無仮説を棄却する」という検定を考えると、誤差項の次元が減少して分布が退化しているため、第一種の誤差は生じず、検定のサイズは常に0であり、有意水準を0とすることができる。

参 考 文 献

- [1] Amemiya, T. (1985). Advanced Econometrics, Harvard University Press.
- [2] Gragg, J. (1971). Some Statistical Models for Limited Dependent Variables with Application to the Demand for Durable Goods, Econometrica, **39**, 829-844.
- [3] Fin, T. and Schmidt, P. (1984). A Test of the Tobit Specifications Against an Alternative Suggested by Cragg, Review of Economics and Statistics, **66**, 174-177.
- [4] Greene, W. (2000). Econometric Analysis (Fourth Edition), Prentice Hall, Englewood Cliffs.
- [5] Johansen, S. (1988). Statistical Analysis of Cointegration Vectors, Journal of Economic Dynamics and Control, **12**, 231-254.
- [6] _____ (1991). Estimation and Hypothesis of Cointegration Vectors in Gaussian Vector Autoregressive Model, Econometrica, **59**, 1551-1580.
- [7] 小林正人(2000). 順序プロビット・モデルのテストと社債価格付けデータへの応用, IMES Discussion Paper Series No. 2000-J-17, 日本銀行金融研究所.
- [8] Maddala, G. S. (1983). Limited Dependent and Qualitative Variables in Econometrics, Cambridge University Press.
- [9] Melenberg, B. and van Soest, A. (1996). Parametric and Semi-Parametric Modeling of Vacation Expenditures, Journal of Applied Econometrics, **11**, 59-76.
- [10] Nawata, K. (1993). A Note on Estimation of Models with Sample Selection Biases, Economic Letters, **42**, 15-24.
- [11] _____ (1994). Estimation of Sample Selection Bias Models by the Maximum Likelihood Estimator and Heckman's Two-Step Estimator, Economic Letters, **45**, 33-40.
- [12] _____ (1995). Estimation of Sample-Selection Models by the Maximum Likelihood Method, Mathematics and Computers in Simulation, **39**, 299-303.
- [13] Nawata, K., and Nagase, N. (1996). Estimation of Sample Selection Biases Models, Econometric Reviews, **15**, 387-400.
- [14] 縄田和満 (1993). タイプIIのトービット・モデルの推定について, 日本統計学会誌, **23**, 223-247.
- [15] _____ (1997). Probit, Logit, Tobit, 牧厚志他著『応用計量経済学II』, 多賀出版に収録.
- [16] _____ (2000). 多項プロビットモデルと順序プロビットモデルの関連について.
- [17] Tobin, J. (1958). Estimation of Relationships for Limited Dependent Variables, Econometrica, **26**, 24-36.