

高次モーメントのノンパラメトリック推定

前園 宜彦*

Nonparametric Estimation of Higher Order Moments

Yoshihiko Maesono*

正規分布などの分布を仮定したパラメトリックな統計的推測においては, 高次のモーメントの推定量は構造式を利用して構成できる. しかし一般の統計量の高次モーメントについては構造式を具体的に求めることができないために, ノンパラメトリックな手法を利用することが多い. 特にジャックナイフ法やブートストラップ法などのリサンプリング法は, 汎用性が高く有効な手法として定着しつつある. 本論文では 3 次及び 4 次モーメントのジャックナイフ推定量の一致性について議論する. 証明に利用するのは Hoeffding-分解である.

Using the structure of the underlying parametric models, we can make consistent estimators of higher order moments. Many papers discuss the estimation of parameters which relate to the normal distribution. However we cannot obtain explicit structures of the parameters, when we discuss nonparametric inference. Resampling methods, like bootstrap or jackknife, are very useful in such situations. In this paper we discuss jackknife estimators of the higher order (3rd and 4th) moments and prove consistency of them, using the Hoeffding-decomposition.

キーワード: Hoeffding-分解, 一致推定量, エッジワース展開, 擬似量, キュムラント, 高次モーメント, ジャックナイフ法

1. 序

U -統計量のように統計量の形が具体的に与えられるものに対する高次モーメントのノンパラメトリックな推定法としては, ジャックナイフ法やブートストラップ法がよく利用される. 本論文ではジャックナイフ型推定量の一致性について議論する. そのために推定量の高次の漸近表現を求め, モーメントの評価を使って一致性を示す. $X_1, X_2, \dots, X_n$ を母集団分布 $F_\theta(x)$ からの無作為標本とする. ここで議論するのは, 母数 θ に関連した漸近 U -統計量

$$\begin{aligned} S_n = & \theta + n^{-1}\delta + n^{-1} \sum_{i=1}^n g_1(X_i) + n^{-2} \sum_{1 \leq i < j \leq n} g_2(X_i, X_j) \\ & + n^{-3} \sum_{1 \leq i < j < k \leq n} g_3(X_i, X_j, X_k) + \dots \end{aligned} \quad (1.1)$$

* 九州大学大学院数理学研究院: 〒 819-0395 福岡市西区元岡 744 (E-mail: maesono@math.kyushu-u.ac.jp).

である. ただし g_2 と g_3 は成分の入れ替えについて不変なシメトリック関数で, δ はバイアス項である. このとき次の仮定をおく.

$$(H1) \quad E[g_1(X_1)] = 0,$$

$$(H2) \quad E[g_2(X_1, X_2)|X_1] = E[g_3(X_1, X_2, X_3)|X_1, X_2] = 0 \quad a.s.$$

漸近 U -統計量は Lai and Wang (1993) により導入され, エッジワース展開が求められている. Hoeffding (1961) によるフォワードマルチンゲールへの分解 (H -分解) や確率展開を利用して多くの統計量が式 (1.1) を満たすことが示せる. (H1), (H2) が成り立つとマルチンゲールに対するモーメントの評価が適用できる. すなわち

$$A_1 = \sum_{i=1}^n g_1(X_i), \quad A_2 = \sum_{1 \leq i < j \leq n} g_2(X_i, X_j)$$

とおくと, $p \geq 2$ に対して

$$E|A_1|^p \leq Cn^{p/2}, \quad E|A_2|^p \leq Cn^p \quad (1.2)$$

が成り立つ (Maesono (1997) 参照).

この漸近 U -統計量を標準化したものは

$$\begin{aligned} \frac{\sqrt{n}(S_n - \theta)}{\xi} &= n^{-1/2} \frac{\delta}{\xi} + n^{-1/2} \sum_{i=1}^n \frac{g_1(X_i)}{\xi} + n^{-3/2} \sum_{1 \leq i < j \leq n} \frac{g_2(X_i, X_j)}{\xi} \\ &\quad + n^{-5/2} \sum_{1 \leq i < j < k \leq n} \frac{g_3(X_i, X_j, X_k)}{\xi} + \dots \end{aligned}$$

となる. ここで $\xi^2 = E[g_1^2(X_1)]$ と定義され, 漸近分散の主要項である. このときエッジワース展開は次で与えられる.

$$P\left\{\frac{\sqrt{n}(S_n - \theta)}{\xi} \leq x\right\} = \Phi(x) - \phi(x) \left[\frac{\delta}{\xi} + \frac{\kappa_3(x^2 - 1)}{6\xi^3} \right] + o(n^{-1/2}).$$

ただし $\Phi(x), \phi(x)$ は標準正規分布の分布関数及び確率密度関数で, また

$$\kappa_3 = E[g_1^3(X_1)] + 3E[g_1(X_1)g_1(X_2)g_2(X_1, X_2)]$$

である. 漸近分散の主要項 ξ^2 のジャックナイフ推定量は

$$\hat{\xi}^2 = (n-1) \sum_{i=1}^n (S_n^{(i)} - S_n)^2$$

で与えられる. ここで $S_n^{(i)}$ は n 個の標本から X_i を除いた S_n に対応する統計量である. 本論文ではエッジワース展開に現れる高次のモーメント

$$e_1 = E[g_1^3(X_1)], \quad e_2 = E[g_1(X_1)g_1(X_2)g_2(X_1, X_2)].$$

及びバイアス δ の推定量について考察する．これらの量はスチューデント化統計量のエッジワース展開にも現れるものである．これらのモーメントのブートストラップ推定量の性質を議論することも可能であるが，復元抽出にもとづくために式が複雑になる．ここではジャックナイフ型の推定量について考察する．

2. ジャックナイフ型推定量

Quenouille (1949) 及び Tukey (1958) によって議論されているバイアス δ の推定量は

$$\hat{\delta} = (n-1) \sum_{i=1}^n (S_n^{(i)} - S_n)$$

になる． e_1, e_2 の推定のために，従来議論されている $g_1(X_i)$ 及び $g_1(X_i, X_j)$ の擬似量を少し修正した

$$\begin{aligned}\hat{g}_1(X_i) &= nS_n - (n-1)S_n^{(i)}, \\ \hat{g}_2(X_i, X_j) &= (n-2) \left\{ nS_n - (n-1)(S_n^{(i)} + S_n^{(j)}) + (n-2)S_n^{(i,j)} \right\}\end{aligned}$$

を考える．ここで $S_n^{(i,j)}$ は X_i, X_j を除いた $n-2$ 個の標本に基づく S_n に対応する統計量である． $\hat{g}_2(X_i, X_j)$ については，Hinkley and Wei (1984) によりジャックナイフ分散推定量のバイアス修正の議論において研究されている．これらの擬似量を使うと e_1, e_2 の一致推定量が次で与えられる．

$$\begin{aligned}\hat{e}_1 &= \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n \hat{g}_1^3(X_i), \\ \hat{e}_2 &= \frac{2}{n(n-1)} \sum_{1 \leq i < j \leq n} \hat{g}_1(X_i) \hat{g}_1(X_j) \hat{g}_2(X_i, X_j).\end{aligned}$$

これらの推定量は一致性を持つことが示せる．

定理 2.1 $E\{|g_1(X_1)|^4 + |g_2(X_1, X_2)|^4 + |g_3(X_1, X_2, X_3)|^4\} < \infty$ と仮定する．このとき $\hat{\delta}, \hat{e}_1, \hat{e}_2$ は，それぞれ δ, e_1, e_2 の一致推定量である．

証明 2.1 $A_1^{(i)}, A_2^{(i)}$ を n 個の標本から X_i を除いた $n-1$ 個の標本に基づく A_1, A_2 に対応する量とすると

$$\sum_{i=1}^n A_1^{(i)} = (n-1)A_1, \quad \sum_{i=1}^n A_2^{(i)} = (n-2)A_2$$

が成り立つ．したがって擬似量の定義より

$$\hat{\delta} = \delta + (n-1) \sum_{i=1}^n \left\{ (n-1)^{-1} A_1^{(i)} - n^{-1} A_1 \right\}$$

$$\begin{aligned}
& + (n-1) \sum_{i=1}^n \left\{ (n-1)^{-2} A_2^{(i)} - n^{-2} A_2 \right\} + \cdots \\
& = \delta + (n-1) A_1 - (n-1) A_1 + \frac{n-2}{n-1} A_2 - \frac{n-1}{n} A_2 + \cdots \\
& = \delta - \frac{1}{n(n-1)} A_2 + \cdots.
\end{aligned}$$

ここで式 (1.2) より

$$E \left| \frac{1}{n(n-1)} A_2 \right| \leq \left\{ E \left| \frac{1}{n(n-1)} A_2 \right|^2 \right\}^{1/2} = O(n^{-1})$$

と評価できて, $\frac{1}{n(n-1)} A_2 = O_P(n^{-1})$ となり, $\hat{\delta}$ の一致性が成り立つ.

擬似量 $\hat{g}_1(X_i)$ については直接計算より

$$\begin{aligned}
\hat{g}_1(X_i) &= \theta + \delta + A_1 + n^{-1} A_2 - \left\{ \theta + \delta + A_1^{(i)} + (n-1)^{-1} A_2^{(i)} \right\} + \cdots \\
&= A_1 - A_1^{(i)} + \left(\frac{1}{n} - \frac{1}{n-1} \right) A_2 + \frac{1}{n-1} (A_2 - A_2^{(i)}) + \cdots \\
&= g_1(X_i) - \frac{1}{n(n-1)} A_2 + \frac{1}{n-1} \sum_{\ell \neq i}^n g_2(X_i, X_\ell) + \cdots
\end{aligned}$$

が成り立つ. 同様にして $\hat{g}_2(X_i, X_j)$ についても次のような表現が得られる. まず $\hat{g}_1(X_i)$ の表現より

$$\begin{aligned}
& -(n-1) S_n^{(j)} + (n-2) S_n^{(i,j)} \\
& = -g_1(X_i) + \frac{1}{(n-1)(n-2)} A_2^{(j)} - \frac{1}{n-2} \sum_{\ell \neq i, j}^n g_2(X_i, X_\ell) + \cdots
\end{aligned}$$

が成り立つ. したがって

$$\begin{aligned}
\hat{g}_2(X_i, X_j) &= -\frac{(n-2)}{n(n-1)} A_2 + \frac{1}{(n-1)} A_2^{(j)} \\
&+ \frac{n-2}{n-1} \sum_{\ell \neq i}^n g_2(X_i, X_\ell) - \sum_{\ell \neq i, j}^n g_2(X_i, X_\ell) + \cdots \\
&= -\frac{(n-2)}{n(n-1)} A_2 + \frac{1}{n-1} A_2 - \frac{1}{n-1} A_2 + \frac{1}{n-1} A_2^{(j)} \\
&+ \frac{n-2}{n-1} \sum_{\ell \neq i}^n g_2(X_i, X_\ell) - \sum_{\ell \neq i}^n g_2(X_i, X_\ell) \\
&+ \sum_{\ell \neq i}^n g_2(X_i, X_\ell) - \sum_{\ell \neq i, j}^n g_2(X_i, X_\ell) \cdots \\
&= \frac{2}{n(n-1)} A_2 - \frac{1}{n-1} \sum_{\ell \neq j}^n g_2(X_j, X_\ell) - \frac{1}{n-1} \sum_{\ell \neq i}^n g_2(X_i, X_\ell)
\end{aligned}$$

$$+g_2(X_i, X_j) + \cdots$$

となる．まず $\hat{g}_1$ の漸近表現を利用すると

$$\hat{e}_1 = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n g_1^3(X_i) + \frac{3}{n} \sum_{i=1}^n g_1^2(X_i) B_n(i) + \frac{3}{n} \sum_{i=1}^n g_1(X_i) B_n^2(i) + \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n B_n^3(i)$$

となる．ただし

$$B_n(i) = -\frac{1}{n(n-1)} A_2 + \frac{1}{n-1} \sum_{k \neq i}^n g_2(X_i, X_k) + \cdots$$

である．モーメントの評価を使うと第二項目以降が無視できることが分る．たとえば式 (1.2) より

$$E \left| \frac{1}{n(n-1)} A_2 \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n g_1^2(X_i) \right| \leq \left\{ E \left| \frac{1}{n(n-1)} A_2 \right|^2 \right\}^{1/2} \left\{ E \left| \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n g_1^2(X_i) \right|^2 \right\}^{1/2} = O(n^{-1})$$

となり

$$\frac{1}{n(n-1)} A_2 \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n g_1^2(X_i) = O_P(n^{-1})$$

が成り立つ．同様に他の項も $O_P(n^{-1})$ であることが示せる．また大数の法則より

$$\frac{1}{n} \sum_{i=1}^n \hat{g}_1^3(X_i) \xrightarrow{P} e_1$$

となる．したがって $\hat{e}_1$ が e_1 の一致推定量になることが分る．

同様に $\hat{e}_2$ の一致性を示すことができる．定義より

$$\hat{e}_2 = \frac{2}{n(n-1)} \sum_{1 \leq i < j \leq n} g_1(X_i) g_1(X_j) g_2(X_i, X_j) + \cdots$$

となる． U -統計量の一致性 (Hoeffding (1961)) より

$$\frac{2}{n(n-1)} \sum_{1 \leq i < j \leq n} g_1(X_i) g_1(X_j) g_2(X_i, X_j) \xrightarrow{P} e_2$$

が成り立つ．残りの項は $O_P(n^{-1})$ となることが示せるから， $\hat{e}_2$ は e_2 の一致推定量である．

3 次のモーメントまでであれば，一般的な形で議論できる．しかし 4 次以上のジャックナイフ型推定量の構成は，分離できない母数が存在することがあるために一般的に求めることはできない．次節では U -統計量について 4 次のモーメント推定量に関連した擬似量の漸近表現を求めて一致性を議論する．

3. U -統計量の4次のモーメント推定

U -統計量は, Halmos (1947) によって不偏性を考慮して, 標本平均の一般化として提案され, Hoeffding (1948) の論文によって注目されるようになった統計量のクラスである. 関数 $h(x_1, \dots, x_r) : \mathbf{R}^r \rightarrow \mathbf{R}$ を変数 $x_1, \dots, x_r$ のすべての順列にたいして不変とすると, 一標本 U -統計量は

$$U_n = \binom{n}{r}^{-1} \sum_{C_{n,r}} h(X_{i_1}, \dots, X_{i_r})$$

と定義される. ここで $\sum_{C_{n,r}}$ は $1 \leq i_1 < \dots < i_r \leq n$ を満たすすべての組み合わせ $(i_1, \dots, i_r)$ についての和を表す. U_n は母数 $\theta = E[h(X_1, \dots, X_r)]$ の不偏推定量になっている.

まず漸近的な性質を調べるのに有用な Hoeffding (1961) による U_n のフォワード・マルチンゲールへの分解を述べる. 次の記号を準備する.

定義 3.1 $E[|h(X_1, \dots, X_r)|] < \infty$ のとき $1 \leq k \leq r$ に対して

$$a_k(x_1, \dots, x_k) = E[h(X_1, \dots, X_r) | X_1 = x_1, \dots, X_k = x_k] - \theta,$$

$$b_1(x_1) = a_1(x_1),$$

$$b_2(x_1, x_2) = a_2(x_1, x_2) - b_1(x_1) - b_1(x_2),$$

...

$$b_r(x_1, \dots, x_r) = a_r(x_1, \dots, x_r) - \sum_{k=1}^{r-1} \sum_{C_{r,k}} b_k(x_{i_1}, \dots, x_{i_k}),$$

$$g_k(x_1, \dots, x_k) = \frac{r!}{(r-k)!} b_k(x_1, \dots, x_k),$$

$$A_k = \sum_{C_{n,k}} g_k(X_{i_1}, \dots, X_{i_k}),$$

$$\xi_k^2 = E[g_k^2(X_1, \dots, X_k)]$$

と定義する.

このとき

$$U_n - E(U_n) = \sum_{k=1}^r \frac{(n-k)!}{n!} A_k,$$

$$E[g_k(X_1, \dots, X_k) | X_1, \dots, X_{k-1}] = 0 \quad a.s.$$

が成り立つ. この性質を使うと, $E(|g_k \pi|) < \infty$ を満たす ℓ -変数関数 $\pi(x_1, \dots, x_\ell)$ と添え字の集合 $\{i_1, \dots, i_k\}$ に対して, $i_m \notin \{j_1, \dots, j_\ell\}$ なる $i_m \in \{i_1, \dots, i_k\}$ があれば

$$E[g_k(X_{i_1}, \dots, X_{i_k}) \pi(X_{j_1}, \dots, X_{j_\ell})] = 0$$

が成り立つ. U_n の分散 σ_n^2 は ξ_k^2 を使うと

$$\sigma_n^2 = \frac{1}{n}\xi_1^2 + \frac{1}{2n(n-1)}\xi_2^2 + \cdots + \frac{1}{r!n(n-1)\cdots(n-r+1)}\xi_r^2$$

と表せる.

この定理より $g_k(1 \leq k \leq r)$ は共分散が 0 の意味で直交しており, $\{A_k\}_{k \leq n}(1 \leq k \leq r)$ はフォワード・マルチンゲールであることが分かる. この分解は H -分解 (Hoeffding-分解) または ANOVA-分解と呼ばれ, 分散分析, ジャックナイフ推測等の統計の分野で広く利用されている便利な手法である.

A_k の絶対モーメントについては von Bahr and Esséen (1965) 及び Dharmadhikari *et al.* (1968) のマルチンゲールに対するモーメントの評価を使うと, 次の上限が得られる.

(i) $1 \leq p < 2$ に対して $E[|g_k(X_1, \dots, X_k)|^p] < \infty$ ならば

$$E(|A_k|^p) \leq Cn^k \quad (3.1)$$

が成り立ち,

(ii) $2 \leq p$ に対して $E[|g_k(X_1, \dots, X_k)|^p] < \infty$ ならば

$$E(|A_k|^p) \leq Cn^{pk/2} \quad (3.2)$$

が成り立つ.

式 (3.1), (3.2) は U -統計量の漸近的性質を議論するときの基本となるものである. 2 次の一標本標準化 U -統計量 ($r = 2$) の n^{-1} の項までのエッジワース展開は, Callaert *et al.* (1980) によって求められた. Maesono (1987) は彼らの結果を含む形で, 一般の r 次の一標本 U -統計量についてのエッジワース展開を求めている. 次の記号を準備する.

定義 3.2

$$\begin{aligned} e_1 &= E[g_1^3(X_1)], \\ e_2 &= E[g_1(X_1)g_1(X_2)g_2(X_1, X_2)], \\ e_3 &= E[g_1^4(X_1)], \\ e_4 &= E[g_1^2(X_1)g_1(X_2)g_2(X_1, X_2)], \\ e_5 &= E[g_1(X_2)g_1(X_3)g_2(X_1, X_2)g_2(X_1, X_3)], \\ e_6 &= E[g_1(X_1)g_1(X_2)g_1(X_3)g_3(X_1, X_2, X_3)], \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\kappa_3 &= \xi_1^{-3}\{e_1 + 3e_2\}, \\
\kappa_4 &= \xi_1^{-4}\{e_3 - 3\xi_1^4 12e_4 + 12e_5 + 4e_6\}, \\
Q_n(x) &= \Phi(x) - \phi(x) \left\{ n^{-\frac{1}{2}} \frac{\kappa_3}{6} (x^2 - 1) \right. \\
&\quad \left. + n^{-1} \left[\frac{\kappa_4}{24} (x^3 - 3x) + \frac{\kappa_3^2}{72} (x^5 - 10x^3 + 15x) \right] \right\}.
\end{aligned}$$

このとき

$$P\left(\sigma_n^{-1}[U_n - E(U_n)] \leq x\right) = Q_n(x) + o(n^{-1})$$

が成り立つ.

実際の統計的推測においてはスチューデント化 U -統計量のエッジワース展開の方がより重要である. スチューデント化は標準化のときの標準偏差 σ_n を推定量で置き換えるものである. 多くの場合, ジャックナイフ分散推定量の平方根を標準偏差の推定量として利用したスチューデント化 U -統計量が考察されている. ジャックナイフ分散推定量は

$$\hat{\sigma}_n^2 = \frac{n-1}{n} \sum_{i=1}^n (U_n^{(i)} - U_n)^2$$

であるから, スチューデント化 U -統計量は

$$\frac{U_n - \theta}{\hat{\sigma}_n}$$

となる. このスチューデント化 U -統計量はスチューデントの t -統計量の拡張になっている.

ここで

$$\begin{aligned}
\lambda_1 &= \frac{1}{\xi_1^3}(2e_1 + 3e_2), & \lambda_2 &= \frac{1}{\xi_1^3}(e_1 + 3e_2), & \nu_1 &= -\frac{1}{\xi_1^6}(2e_1 + 3e_2)^2, \\
\nu_2 &= \frac{6}{\xi_1^4}(e_3 - 6\xi_1^4 + 12e_4 + 6e_5 + 4e_6) - \frac{2}{\xi_1^6}(2e_1 + 3e_2)(2e_1 + 9e_2), \\
\nu_3 &= \frac{3}{\xi_1^6}(4e_1^2 + 12e_1e_2 + 3e_2^2) + \frac{18}{\xi_1^4}(\xi_1^2\xi_2^2 - e_3 + 2\xi_1^4 - 4e_4 - 2e_5), \\
P_n(x) &= \Phi(x) + \phi(x) \frac{1}{6\sqrt{n}}(\lambda_1 x^2 + \lambda_2) + \phi(x) \frac{1}{72n}(\nu_1 x^5 + \nu_2 x^3 + \nu_3 x)
\end{aligned}$$

とおく. スチューデント化 U -統計量 に対して Maesono (1997) は

$$P\left\{\hat{\sigma}_n^{-1}(U_n - \theta) \leq x\right\} = P_n(x) + o(n^{-1})$$

が成り立つことを示した.

e_1, e_2 のジャックナイフ型推定量の一致性は先に示した. ここでは $\xi_2^2, e_3, e_4, e_5, e_6$ の推定量を考察する. まず ξ_2^2, e_3, e_4, e_5 の推定量は先に定義した擬似量を用いて

$$\hat{\xi}_2^2 = \frac{2}{n(n-1)} \sum_{1 \leq i < j \leq n} \hat{g}_2^2(X_i, X_j),$$

$$\begin{aligned}
\hat{e}_3 &= \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n \hat{g}_1^4(X_i), \\
\hat{e}_4 &= \frac{2}{n(n-1)} \sum_{1 \leq i < j \leq n} \{ \hat{g}_1^2(X_i) \hat{g}_1(X_j) + \hat{g}_1^2(X_j) \hat{g}_1(X_i) \} \hat{g}_2(X_i, X_j), \\
\hat{e}_5 &= \frac{2}{n(n-1)(n-2)} \sum_{C_{n,3}} \left\{ \hat{g}_1(X_j) \hat{g}_1(X_k) \hat{g}_2(X_i, X_j) \hat{g}_2(X_i, X_k) \right. \\
&\quad \left. + \hat{g}_1(X_i) \hat{g}_1(X_k) \hat{g}_2(X_i, X_j) \hat{g}_2(X_j, X_k) + \hat{g}_1(X_j) \hat{g}_1(X_j) \hat{g}_2(X_i, X_k) \hat{g}_2(X_j, X_k) \right\}
\end{aligned}$$

と構成できる. e_6 の推定のためには g_3 の擬似量

$$\begin{aligned}
\hat{g}_3(X_i, X_j, X_k) &= (n-4)(n-5) \left\{ nU_n - (n-1)(U_n^{(i)} + U_n^{(j)} + U_n^{(k)}) \right. \\
&\quad \left. + (n-2)(U_n^{(i,j)} + U_n^{(j,k)} + U_n^{(i,k)}) - (n-3)U_n^{(i,j,k)} \right\}
\end{aligned}$$

が必要になる. ここで $U_n^{(i,j,k)}$ は X_i, X_j, X_k を除いた $n-3$ 個の標本に基づく U_n に対応する統計量である. この擬似量を使うと

$$\hat{e}_6 = \frac{6}{n(n-1)(n-2)} \sum_{C_{n,3}} \hat{g}_1(X_i) \hat{g}_1(X_j) \hat{g}_1(X_k) \hat{g}_3(X_i, X_j, X_j)$$

が e_6 の一致推定量になる.

定理 3.2 $E[|h(X_1, \dots, X_r)|^5] < \infty$ と仮定する. このとき $\hat{\xi}_2, \hat{e}_3, \hat{e}_4, \hat{e}_5, \hat{e}_6$ は, それぞれ $\xi_2, e_3, e_4, e_5, e_6$ の一致推定量である.

証明 3.2 擬似量 $\hat{g}_3$ について考える. 一般の場合も不等式 (3.2) を利用して証明することができるが, 簡単のために U -統計量が 3 次のカーネルの場合, すなわち $r=3$ で $U_n - \theta$ が

$$U_n - \theta = \frac{1}{n} A_1 + \frac{1}{n(n-1)} A_2 + \frac{1}{n(n-1)(n-2)} A_3$$

の場合を示す. これ以降添え字 i, j, k は固定して考える. 定義より

$$\begin{aligned}
&nU_n - (n-1)U_n^{(i)} \\
&= A_1 + \frac{1}{n-1} A_2 + \frac{1}{(n-1)(n-2)} A_3 \\
&\quad - A_1^{(i)} - \frac{1}{n-2} A_2^{(i)} - \frac{1}{(n-2)(n-3)} A_3^{(i)} \\
&= g_1(X_i) - \frac{1}{(n-1)(n-2)} A_2 + \frac{1}{n-2} \sum_{\ell \neq i}^n g_2(X_i, X_\ell) \\
&\quad - \frac{2}{(n-1)(n-2)(n-3)} A_3 + \frac{1}{(n-2)(n-3)} \sum_{1 \leq \ell < m \leq n}^{(i)} g_3(X_i, X_\ell, X_m)
\end{aligned}$$

となる. ここで $\sum_{1 \leq \ell < m \leq n}^{(i)}$ は X_i を除いた和を表す. 同様に

$$\begin{aligned}
 & -(n-1)U_n^{(j)} + (n-2)U_n^{(j,k)} \\
 = & -g_1(X_k) + \frac{1}{(n-2)(n-3)}A_2^{(j)} - \frac{1}{n-3} \sum_{\ell \neq j,k}^n g_2(X_i, X_\ell) + \frac{2}{(n-2)(n-3)(n-4)}A_3^{(j)} \\
 & - \frac{1}{(n-3)(n-4)} \sum_{1 \leq \ell < m \leq n}^{(j,k)} g_3(X_k, X_\ell, X_m), \\
 & -(n-1)U_n^{(k)} + (n-2)U_n^{(i,k)} \\
 = & -g_1(X_i) + \frac{1}{(n-2)(n-3)}A_2^{(k)} - \frac{1}{n-3} \sum_{\ell \neq i,k}^n g_2(X_i, X_\ell) + \frac{2}{(n-2)(n-3)(n-4)}A_3^{(k)} \\
 & - \frac{1}{(n-3)(n-4)} \sum_{1 \leq \ell < m \leq n}^{(i,k)} g_3(X_i, X_\ell, X_m)
 \end{aligned}$$

及び

$$\begin{aligned}
 & (n-2)U_n^{(i,j)} - (n-3)U_n^{(i,j,k)} \\
 = & g_1(X_k) - \frac{1}{(n-3)(n-4)}A_2^{(i,j)} + \frac{1}{n-4} \sum_{\ell \neq i,j,k}^n g_2(X_k, X_\ell) \\
 & - \frac{2}{(n-3)(n-4)(n-5)}A_3^{(i,j)} + \frac{1}{(n-4)(n-5)} \sum_{1 \leq \ell < m \leq n}^{(i,j,k)} g_3(X_k, X_\ell, X_m)
 \end{aligned}$$

が成り立つ. ただし $\sum_{1 \leq \ell < m \leq n}^{(i,j)}$ は X_i, X_j を除いた和を表し, $\sum_{1 \leq \ell < m \leq n}^{(i,j,k)}$ は X_i, X_j, X_k を除いた和を表す. 上記の変形より $\hat{g}_3$ の中で g_1 を含む項はゼロになる. g_2 を含む項をまとめると

$$\begin{aligned}
 & -\frac{(n-4)(n-5)}{(n-1)(n-2)}A_2 + \frac{(n-4)(n-5)}{n-2} \sum_{\ell \neq i}^n g_2(X_i, X_\ell) \\
 & + \frac{(n-4)(n-5)}{(n-2)(n-3)}A_2^{(k)} - \frac{(n-4)(n-5)}{n-3} \sum_{\ell \neq i,k}^n g_2(X_i, X_\ell) \\
 & + \frac{(n-4)(n-5)}{(n-2)(n-3)}A_2^{(j)} - \frac{(n-4)(n-5)}{n-3} \sum_{\ell \neq j,k}^n g_2(X_k, X_\ell) \\
 & - \frac{(n-5)}{(n-3)}A_2^{(i,j)} + (n-5) \sum_{\ell \neq i,j,k}^n g_2(X_k, X_\ell)
 \end{aligned}$$

となる. ここで最初の4つの項について, 前と同様に変形すると

$$-\frac{(n-4)(n-5)}{(n-1)(n-2)}A_2 + \frac{(n-4)(n-5)}{n-2} \sum_{\ell \neq i}^n g_2(X_i, X_\ell)$$

$$\begin{aligned}
& + \frac{(n-4)(n-5)}{(n-2)(n-3)} A_2^{(k)} - \frac{(n-4)(n-5)}{n-3} \sum_{\ell \neq i, k}^n g_2(X_i, X_\ell) \\
= & \frac{2(n-4)(n-5)}{(n-1)(n-2)(n-3)} A_2 - \frac{(n-4)(n-5)}{(n-2)(n-3)} \sum_{\ell \neq k}^n g_2(X_k, X_\ell) \\
& - \frac{(n-4)(n-5)}{(n-2)(n-3)} \sum_{\ell \neq i}^n g_2(X_i, X_\ell) + \frac{(n-4)(n-5)}{n-3} g_2(X_i, X_k)
\end{aligned}$$

が得られる．後半の4つの項についても同様に変形して

$$\begin{aligned}
& - \frac{2(n-5)}{(n-2)(n-3)} A_2^{(j)} + \frac{n-5}{n-3} \sum_{\ell \neq i, j}^n g_2(X_i, X_\ell) \\
& + \frac{n-5}{n-3} \sum_{\ell \neq j, k}^n g_2(X_k, X_\ell) - (n-5) g_2(X_i, X_k)
\end{aligned}$$

が得られる．以上をまとめると g_2 を含む項は

$$\begin{aligned}
& - \frac{6(n-5)}{(n-1)(n-2)(n-3)} A_2 + \frac{2(n-5)}{(n-2)(n-3)} \sum_{\ell \neq j}^n g_2(X_j, X_\ell) \\
& + \frac{2(n-5)}{(n-2)(n-3)} \sum_{\ell \neq k}^n g_2(X_k, X_\ell) + \frac{2(n-5)}{(n-2)(n-3)} \sum_{\ell \neq i}^n g_2(X_i, X_\ell) \\
& - \frac{n-5}{n-3} g_2(X_k, X_j) - \frac{n-5}{n-3} g_2(X_i, X_j) - \frac{n-5}{n-3} g_2(X_i, X_k)
\end{aligned}$$

と変形できる．同様にして g_3 を含む項は

$$\begin{aligned}
& - \frac{24}{(n-1)(n-2)(n-3)} A_3 + \frac{6}{(n-2)(n-3)} \sum_{1 \leq \ell < m \leq n}^{(i)} g_3(X_i, X_\ell, X_m) \\
& + \frac{6}{(n-2)(n-3)} \sum_{1 \leq \ell < m \leq n}^{(j)} g_3(X_j, X_\ell, X_m) + \frac{6}{(n-2)(n-3)} \sum_{1 \leq \ell < m \leq n}^{(k)} g_3(X_k, X_\ell, X_m) \\
& - \frac{2}{(n-3)} \sum_{\ell \neq i, j}^n g_3(X_i, X_j, X_\ell) - \frac{2}{(n-3)} \sum_{\ell \neq j, k}^n g_3(X_j, X_k, X_\ell) \\
& - \frac{2}{(n-3)} \sum_{\ell \neq i, k}^n g_3(X_i, X_k, X_\ell) + g_3(X_i, X_j, X_k)
\end{aligned}$$

となる．

以上より擬似量 $\hat{g}_3$ は

$$\begin{aligned}
& \hat{g}_3(X_i, X_j, X_k) \\
= & - \frac{6(n-5)}{(n-1)(n-2)(n-3)} A_2 + \frac{2(n-5)}{(n-2)(n-3)} \sum_{\ell \neq j}^n g_2(X_j, X_\ell) \\
& + \frac{2(n-5)}{(n-2)(n-3)} \sum_{\ell \neq k}^n g_2(X_k, X_\ell) + \frac{2(n-5)}{(n-2)(n-3)} \sum_{\ell \neq i}^n g_2(X_i, X_\ell)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& -\frac{n-5}{n-3}g_2(X_k, X_j) - \frac{n-5}{n-3}g_2(X_i, X_j) - \frac{n-5}{n-3}g_2(X_i, X_k) \\
& -\frac{24}{(n-1)(n-2)(n-3)}A_3 + \frac{6}{(n-2)(n-3)} \sum_{1 \leq \ell < m \leq n}^{(i)} g_3(X_i, X_\ell, X_m) \\
& + \frac{6}{(n-2)(n-3)} \sum_{1 \leq \ell < m \leq n}^{(j)} g_3(X_j, X_\ell, X_m) + \frac{6}{(n-2)(n-3)} \sum_{1 \leq \ell < m \leq n}^{(k)} g_3(X_k, X_\ell, X_m) \\
& -\frac{2}{(n-3)} \sum_{\ell \neq i, j}^n g_3(X_i, X_j, X_\ell) - \frac{2}{(n-3)} \sum_{\ell \neq j, k}^n g_3(X_j, X_k, X_\ell) \\
& -\frac{2}{(n-3)} \sum_{\ell \neq i, k}^n g_3(X_i, X_k, X_\ell) + g_3(X_i, X_j, X_k)
\end{aligned}$$

と表せる. この表現と $\hat{g}_1$ の表現を利用すると, 主要項について U -統計量の一致性より

$$\frac{6}{n(n-1)(n-2)} \sum_{1 \leq i < j < k \leq n} g_1(X_i)g_1(X_j)g_1(X_k)g_3(X_i, X_j, X_k) \xrightarrow{P} e_6$$

となる. 他の項は $O_P(n^{-1})$ となることが示せる. たとえば

$$\begin{aligned}
& \frac{6}{n(n-1)(n-2)} \sum_{1 \leq i < j < k \leq n} g_1(X_i)g_1(X_j)g_1(X_k) \frac{6(n-5)}{(n-1)(n-2)(n-3)} A_2 \\
& = \frac{36(n-5)}{n(n-1)^2(n-2)^2(n-3)} A_2 \sum_{1 \leq i < j < k \leq n} g_1(X_i)g_1(X_j)g_1(X_k)
\end{aligned}$$

となる. ここでモーメントの評価 (3.2) と同じようにして

$$E \left| \sum_{1 \leq i < j < k \leq n} g_1(X_i)g_1(X_j)g_1(X_k) \right|^2 = O(n^3)$$

が示せる. したがって

$$\begin{aligned}
& O(n^{-5}) E \left| A_2 \sum_{1 \leq i < j < k \leq n} g_1(X_i)g_1(X_j)g_1(X_k) \right| \\
& \leq O(n^{-5}) \left\{ E |A_2|^2 E \left| \sum_{1 \leq i < j < k \leq n} g_1(X_i)g_1(X_j)g_1(X_k) \right|^2 \right\}^{1/2} \\
& = O(n^{-5/2})
\end{aligned}$$

が得られ, $O_P(n^{-1})$ となることが分る. また

$$\begin{aligned}
& \frac{6}{n(n-1)(n-2)} \sum_{C_{n,3}} g_1(X_i)g_1(X_j)g_1(X_k) \frac{2(n-5)}{(n-2)(n-3)} \sum_{\ell \neq j}^n g_2(X_j, X_\ell) \\
& = O(n^{-4}) \sum_{C_{n,3}} \sum_{\ell \neq j}^n g_1(X_i)g_1(X_j)g_1(X_k)g_2(X_j, X_\ell) \\
& = O(n^{-4}) \sum_{C_{n,3}} g_1(X_i)g_1(X_j)g_1(X_k) \{g_2(X_i, X_j) + g_2(X_i, X_k) + g_2(X_j, X_k)\}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& +O(n^{-4}) \sum_{C_{n,4}} \left[g_1(X_i)g_1(X_j)g_1(X_k)\{g_2(X_i, X_\ell) + g_2(X_j, X_\ell) + g_2(X_k, X_\ell)\} \right. \\
& \quad + g_1(X_i)g_1(X_j)g_1(X_\ell)\{g_2(X_i, X_k) + g_2(X_j, X_k) + g_2(X_\ell, X_k)\} \\
& \quad + g_1(X_i)g_1(X_k)g_1(X_\ell)\{g_2(X_i, X_j) + g_2(X_k, X_j) + g_2(X_\ell, X_j)\} \\
& \quad \left. + g_1(X_j)g_1(X_k)g_1(X_\ell)\{g_2(X_j, X_i) + g_2(X_k, X_i) + g_2(X_\ell, X_i)\} \right]
\end{aligned}$$

と変形できる．最初の項は3次のカーネルを持つ U -統計量で近似できて，オーダーが n^{-4} であるから， $O_P(n^{-1})$ が容易に示せる．第二項は任意の $s, t \in \{i, j, k, \ell\}$ に対して

$$E[g_1(X_i)g_1(X_j)g_1(X_k)\{g_2(X_i, X_\ell) + g_2(X_j, X_\ell) + g_2(X_k, X_\ell)\} | X_s, X_t] = 0 \quad a.s.$$

が成り立つ．したがって H -分解を適用すると A_3 と A_4 に相当するものが残る． $E|n^{-3}A_3|^2 = O(n^{-3})$, $E|n^{-4}A_4| = O(n^{-4})$ となるから，第二項も $O_P(n^{-1})$ となることが示せる．

残りの項も H -分解とモーメントの評価を使って同じようにして $O_P(n^{-1})$ となることが示せる．

謝辞

本稿を作成するにあたり，有益なコメントをいただいた匿名の査読者と編集者に感謝します．また本研究は日本学術振興会科学研究費補助金基盤研究 (B)(課題番号 21340026) 及び挑戦的萌芽研究 (課題番号 21650065) の援助を受けたものである．

参 考 文 献

- Callaert, H., Janssen, P. and Veraverbeke, N. (1980). An Edgeworth expansion for U -statistics, *Ann. Statist.*, **8**, 299–312.
- Dharmadhikari, S. W., Fabian, V. and Jogdeo, K. (1968). Bounds on the moments of martingales, *Ann. Math. Statist.*, **39**, 1719–1723.
- Drucker, P. E. (1993). *Post-Capitalist Society*, Harper Business, New York.
- Hinkley, D. V. and Wei, B. C. (1984). Improvements of jackknife confidence limit methods, *Biometrika*, **71**, 331–339.
- Halmos, P. R. (1946). The theory of unbiased estimation, *Ann. Math. Statist.*, **17**, 34–43.
- Hoeffding, W. (1948). A class of statistics with asymptotically normal distribution, *Ann. Math. Statist.*, **19**, 293–325.
- Hoeffding, W. (1961). The strong law of large numbers for U -statistics, *University of North Carolina Institute of statistics Mimeo Series.*, No.302.
- Lai, T. L. and Wang, J. Q. (1993). Edgeworth expansion for symmetric statistics with applications to bootstrap methods, *Statistica Sinica*, **3**, 517–542.
- Maesono, Y. (1997). Edgeworth expansions of a studentized U -statistics and a jackknife estimator of variance, *J. Statist. Plan. & Inf.*, **61**, 61–84.
- Quenouille, M. (1949). Approximation tests of correlation in time series, *J. Roy. Statist. Soc. B*, **11**, 18–84.
- Tukey, J. (1958). Bias and confidence in not quite large samples(Abstract), *Ann. Math. Statist.*, **29**, 614.
- von Bahr, B. and Esséen, C.-G. (1965). Inequalities for the r -th absolute moment of a sum of random variables, *Ann. Math. Statist.*, **36**, 299–303.