

# 長記憶時系列と検定

西埜 晴久\*

## Tests on Long Memory Time Series

Haruhisa Nishino\*

本論文では、長記憶性をもつ時系列に対する検定について概観して解説する。まず、短記憶定常時系列を帰無仮説として長記憶時系列を対立仮説とした長記憶性を検出するための検定である。次に長記憶を持つ時系列に変化点があるかどうかを見る検定と 2 標本の長記憶パラメーターの比較の検定である。また、これらの検定に対しシミュレーションを行いパフォーマンスを比較し、日経平均の実現ボラティリティーに対し応用する。

This paper surveys and explains testing problems on long memory time series. The first testing is a test where a null hypothesis is that a time series is short-memory stationary and alternatives is that it is long-memory. The paper explains a change point test and a two sample test for comparison of long memory parameters. It compares the performance of these tests with computer simulations and applies the tests to the realized volatility data of the Nikkei index.

キーワード: 時系列, 長記憶性, 実数差分, 検定, 変化点

### 1. はじめに

本論文は長記憶性をもつ時系列における検定を解説し概観を行うことをその目的とする。あわせて、実際にシミュレーションを行うとともに、日本のファイナンスデータへの応用例も示すものとする。

経済時系列の研究においては、Box=Jenkins 法の対象となる ARIMA (自己回帰和分移動平均) モデルが用いられてきた。一方、長記憶性 (long-memory) は、自己相関の減少が非常に遅い時系列であり、その出発点となった水文学だけでなく、近年は金融時系列にその応用が見出すことができる。しかしながら、通常の ARIMA モデルでは長記憶性をモデル化することはできない。そこで長記憶性をもつ時系列をモデル化するためには、Granger and Joyeux (1980) および Hosking (1981) によって導入されたモデルの和分を整数だけでなく、実数にまで拡張した実数差分 (fractional difference) を導入することが必要となる。

---

\* 千葉大学法経学部 (〒 263-8522 千葉市稲毛区弥生町 1-33, E-mail: nishino@le.chiba-u.ac.jp.)

実数差分を持つ ARMA モデルは ARFIMA (fractional ARIMA) モデルと呼ばれる。つまり、実数差分を用いることで ARIMA モデルは ARFIMA モデルへと拡張される。

長記憶性については金融時系列を含む多くの分野で応用されている。特に、金融時系列における実証的な結果としては、Ding *et al.* (1993) によって指摘された結果が知られている。それは、金融時系列のリターンそのままでは自己相関を計算すると相関がないように見えるのに対し、リターンの絶対値および2乗の値の自己相関では、ラグを長くとるにつれての減少度合いが非常にゆっくりとしているというのである。このことは、リターンの絶対値および2乗の値が長記憶性を持つことを示しているといえる。また、リターンの分散にあたるものがボラティリティーであるが、最近になって高頻度データが利用可能になったことから、ボラティリティーを高頻度データから計算して求めるものとしては実現ボラティリティー (realized volatility) がある。実際に、渡部 (2007) では、日本のファイナンスデータを用いて実現ボラティリティーの対数値が長記憶性を持っていることが示されている。たとえば、実現ボラティリティーの対数値が長記憶性を持っているかどうかの検定を考えることができるだろう。

長記憶性をもつ時系列に関してはこれまでに多くの研究が行われている。長記憶性を持つ時系列について概観したものあるいは長記憶性の研究論文をまとめたものには、Beran (1994), Robinson (2003), Doukhan *et al.* (2003), Teyssiere and Kirman (2007), Palma (2007) がある。邦文文献としては、矢島 (2003) がある。

本稿は以下のように構成される。まず、次節では長記憶性と実数差分について説明する。そのなかで ARFIMA( $p, d, q$ ) モデルと fractional Brownian motion について説明する。3 節では短記憶定常過程を帰無仮説とし長記憶過程を対立仮説とする検定を説明する。はじめにパラメトリックな検定を説明した後、3つのノンパラメトリック検定 (修正 R/S 統計量, KPSS 検定, V/S 統計量) を説明し、そして、セミパラメトリックな検定である Lobato-Robinson 検定を説明する。またこれらの検定に対しシミュレーションによって比較を行う。さらには日経平均の実現ボラティリティーの対数値に対して、これらの検定を実際に行う。4 節では長記憶性を持つ時系列に対して、変化点の検定と2標本の長記憶パラメータの比較の検定を説明する。これらの検定にたいしてもシミュレーションを行う。5 節ではこれまでの議論をまとめることとする。

## 2. 長記憶性をもつ時系列

はじめに、定常時系列の基本的な事項を述べ、ついで、長記憶性 (long-memory) と実数差分 (fractional difference) について説明する。定常時系列  $\{y_t; t = 1, 2, \dots\}$  に対し、自己共分散関数  $\gamma(k)$  を以下のように定義できる。

$$\gamma(k) = \text{Cov}(y_t, y_{t+k}), \quad k = 0, 1, 2, \dots$$

そして、定常時系列に対し、自己共分散関数はスペクトル密度関数  $f(\lambda)$  のフーリエ変換で表現できる。

$$\gamma(k) = \int_{-\pi}^{\pi} e^{ik\lambda} f(\lambda) d\lambda.$$

さらに、自己相関関数を以下のように定義できる。

$$\rho(k) = \frac{\gamma(k)}{\gamma(0)}, \quad k = 0, 1, 2, \dots$$

定常過程における長記憶性とは、次のようにスペクトル密度が原点で発散することである。

$$f(\lambda) \sim C\lambda^{-2d}, \quad \text{as } \lambda \rightarrow +0. \quad (2.1)$$

なお、 $C$  は正の定数とする。したがって、原点でのスペクトル密度が無限大であるために、時系列は長い周期の波を含むものになる。また、長記憶性をもつ時系列 (long memory time series) では、ラグ  $k$  が増加するときの自己共分散関数の減少は緩やかである。すなわち、 $C$  を正の定数とすると、

$$\gamma(k) \sim Ck^{2d-1}, \quad \text{where } 0 < d < 1/2, \quad (2.2)$$

である。この減少は非常に遅く、hyperbolic である。

他方、長記憶性を持たない定常時系列を短記憶性 (short-memory) を持つと呼ぶとき、短記憶性を自己共分散関数が絶対総和可能として定義づけておく。つまり、

$$\sum_{k=-\infty}^{\infty} |\gamma(k)| < \infty, \quad (2.3)$$

である。

## 2.1 実数差分

$B$  を  $By_t = y_{t-1}$  を表すバックシフトオペレータとした時、階差をとるとは、差分オペレータ  $1 - B$  を原系列にかけることである。Box-Jenkins 法においては、非定常な時系列に対しては、整数回の階差をとって定常化してから分析を行う。一方、Granger and Joyeux (1980) および Hosking (1981) が導入した実数差分 (fractional difference) とは、差分オペレータ  $1 - B$  を実数の  $d$  回かけることである。つまり、実数差分の場合には、 $d$  は整数から実数に拡張され、

$$(1 - B)^d y_t = \varepsilon_t, \quad -1/2 < d < 1/2, \quad (2.4)$$

である. なお,  $\{\varepsilon_t\} \sim WN(0, \sigma^2)$  のホワイトノイズであるとする. このとき, 差分オペレータは次のように展開できる.

$$(1 - B)^{-d} = \sum_{j=0}^{\infty} \frac{\Gamma(j+d)}{\Gamma(j+1)\Gamma(d)} B^j. \quad (2.5)$$

なお,  $\Gamma(x)$  は, ガンマ関数であり,  $\Gamma(x) = \int_0^{\infty} z^{x-1} e^{-z} dz$ , である.  $x$  が正の整数なら,  $\Gamma(x) = (x-1)!$  となる.

それゆえ, Hosking (1981) によれば, (2.4) において  $d < 1/2$  であれば,  $\{y_t\}$  は定常であり, 以下のように無限次の MA で書き表すことができる,

$$y_t = \sum_{j=0}^{\infty} \frac{\Gamma(j+d)}{\Gamma(j+1)\Gamma(d)} \varepsilon_{t-j}. \quad (2.6)$$

他方,  $-1/2 < d$  であれば,  $\{y_t\}$  は反転可能である.

したがって, 定常 ARMA( $p, q$ ) 過程に実数階差部分を組み合わせると,

$$\phi(B)(1 - B)^d (y_t - \mu) = \theta(B)\varepsilon_t, \quad (2.7)$$

と ARFIMA( $p, d, q$ ) モデルを定義することができる.  $0 < d < 1/2$  のとき, (2.7) のスペクトル密度関数は,

$$f(\lambda) = \frac{\sigma^2}{2\pi} \frac{|\theta(e^{i\lambda})|}{|\phi(e^{i\lambda})|} |1 - e^{i\lambda}|^{-2d} = \frac{\sigma^2}{2\pi} \frac{|\theta(e^{i\lambda})|}{|\phi(e^{i\lambda})|} \left|2 \sin\left(\frac{\lambda}{2}\right)\right|^{-2d} \sim C\lambda^{-2d}, \quad \text{as } \lambda \rightarrow +0, \quad (2.8)$$

と (2.1) が成り立っている. つまり,  $0 < d < 1/2$  のとき,  $\lim_{\lambda \rightarrow 0} f(\lambda) = \infty$  が成り立ち, 原点でのスペクトルが発散する長記憶過程である. 一方,  $-1/2 < d < 0$  のときは,  $\lim_{\lambda \rightarrow 0} f(\lambda) = 0$  であり, 原点でのスペクトルは 0 に収束してしまう.

## 2.2 パラメータ $d$ の範囲と定常性

長記憶性の検定について述べる前に, 長記憶性を表す実数差分のパラメータ  $d$  の範囲と定常性の問題について整理しておこう. Dickey and Fuller (1979) に始まる単位根検定は AR モデルにおける単位根の存在を議論してきた. 一番単純な AR(1) モデルによって説明すると, 単位根検定とは

$$(1 - \phi B)y_t = \varepsilon_t, \quad t = 1, 2, \dots, \quad (2.9)$$

において, 帰無仮説:  $\phi = 1$  (単位根を持つ非定常過程) に対し, 対立仮説:  $\phi < 1$  (定常過程) を検定する問題である. したがって, 前節で説明した実数差分が

$$(1 - B)^d y_t = \varepsilon_t, \quad t = 1, 2, \dots, \quad (2.10)$$

と書けることより, (2.9) の単位根検定で帰無仮説:  $\phi = 1$  が成立していることは, (2.10) では,  $d = 1$  が成立していることに相当している. さらに, Hosking (1981) より, 定常性の条件は  $d < 1/2$  である.

次に, (2.10) を  $d \geq 1/2$  の非定常の領域に拡張することを考える.  $1/2 \leq d < 1$  の  $I(d)$  過程  $\{y_t\}$  を考えたい. このとき,  $d^* = d - 1$  とおけば,  $-1/2 \leq d^* < 0$  なので, まず,  $I(d^*)$  である  $\{z_t\}$  を短記憶過程  $\{\varepsilon_t\}$  によって,  $(1 - B)^{d^*} z_t = \varepsilon_t$  と定める. よって, 非定常実数和分過程である  $I(d)$  過程  $\{y_t\}$  を  $y_t = \sum_{j=1}^t z_t, (t = 1, 2, \dots)$  として  $\{z_t\}$  の和分として作ることができる. そして, 単位根過程  $I(1)$  である  $\{y_t\}$  は, 短記憶過程  $\{\varepsilon_t\}$  の和分時系列として,  $y_t = \sum_{j=1}^t \varepsilon_t, (t = 1, 2, \dots)$  とすればよいのである.

したがって, (2.10) で表現される  $I(d)$  過程を  $d$  の値によって分類してまとめると以下のようなになる.

- (i)  $d = 0$ , 短記憶定常過程 (short-memory process).
- (ii)  $0 < d < 1/2$ , 定常長記憶過程 (stationary long-memory process).
- (iii)  $1/2 \leq d < 1$ , 非定常実数和分過程 (nonstationary fractionally integrated process).
- (iv)  $d = 1$ , 単位根過程 (非定常過程, nonstationary process).

ゆえに, 単位根検定問題は,  $I(1)$  過程を帰無仮説にとり,  $I(0)$  過程を対立仮説にとる検定と理解することができる. なお, (2.9) の単位根検定において,  $\{\varepsilon_t\}$  を  $0 < d < 1/2$  の長記憶  $I(d)$  過程とした場合の単位根検定の検定統計量の極限分布は, Sowell (1990) によって求められている. そしてその極限分布は, fractional Brownian motion を含むものになっている. ただし, Sowell (1990) の極限分布に出てくる fractional Brownian motion (fBM) は, 2.3 節で説明する Marinucci and Robinson (1999) の呼ぶ Type I fBM へと変更を要することに注意されたい. (Marinucci and Robinson (1999, p. 120) を見よ). なお, Marinucci and Robinson (1999) で指摘されているように fractional Brownian motion には Type II という別の形があることが知られている.

また, 単位根検定の帰無仮説と対立仮説を入れ替えた Kwiatkowski *et al.* (1992) および Saikkonen and Luukkonen (1993) の検定では,  $I(0)$  過程を帰無仮説にとり,  $I(1)$  過程を対立仮説にとる検定になっている. Kwiatkowski *et al.* (1992) の提案した検定は KPSS 検定と呼ばれ, 次節でもみるように長記憶性を検出する検定にも用いられている.

さらに,  $d \geq 1/2$  の非定常実数和分過程における  $d$  の推定が研究上のテーマになっている. 従来は, tapering を組み入れたピリオドグラムを考えることで, 非定常な領域での  $d$  の推定法が考案されてきた. たとえば, Hurvich and Ray (1995), Velasco (1999a, b), Velasco and Robinson (2000) がある. しかしながら, 近年は, Shimotsu and Phillips (2005), Abadir

*et al.* (2007), Shao (2010) のように tapering を使わずに local Whittle 法あるいは Whittle 法を用いる推定法の研究が進んでいる。

### 2.3 fractal Brownian motion と極限定理

まず、長記憶過程の極限定理に出てくる fractal Brownian motion について述べておく。まず、 $\{B(t); 0 \leq t \leq 1\}$  を通常の標準 Brownian motion とする。そして、 $\tilde{B}(t) = B(t) - tB(1)$  とおくことで、 $\{\tilde{B}(t); 0 \leq t \leq 1\}$  を Brownian bridge と定義する。さらに、fractional Brownian motion  $\{B_d(t); 0 \leq t \leq 1\}$  を標準 Brownian motion を使い、Marinucci and Robinson (1999) の呼ぶ Type I fractional Brownian motion として、

$$B_d(t) = \frac{1}{A(d)} \left[ \int_0^t (t-s)^d dB(s) + \int_{-\infty}^0 (t-s)^d - (-s)^d dB(s) \right],$$

$$\text{where } A(d) = \left[ \frac{1}{2d+1} + \int_0^\infty \{(1+r)^d - r^d\}^2 dr \right]^{1/2},$$

と表現する。そして、 $\tilde{B}_d(t) = B_d(t) - tB_d(1)$  とおくことで、 $\{\tilde{B}_d(t); 0 \leq t \leq 1\}$  を fractional Brownian bridge とする。

次に、短記憶過程と定常長記憶過程を極限定理が成り立つようにするため、それぞれ3つの仮定を満たすものとして、より細かく定義する。これらの定義は主に次節で用いられる。こうした定義を導入するのは fractional Brownian motion に収束する極限定理が成り立つための条件は細かく複雑であるためである。そこで、あらかじめ極限定理が成り立つことを仮定してしまうこととするのである。

**短記憶過程：**短記憶過程とは以下の3つの仮定を満たすものとする。

(i) 自己共分散関数が絶対総和可能。つまり、

$$\sum_{k=-\infty}^{\infty} |\gamma(k)| < \infty,$$

である。

(ii) 以下の標準 BM に収束する汎関数中心極限定理 (functional central limit theorem) が成り立つ。

$$\frac{1}{\sqrt{n}} \sum_{j=1}^{[nt]} (y_t - E(y_t)) \Rightarrow \sigma_L B(t), \quad \text{as } n \rightarrow \infty.$$

ただし、 $\sigma_L^2 = \sum_{k=-\infty}^{\infty} \gamma(k) = 2\pi f(0)$ 。

(iii) 4次キウムラントが

$$\sup_h \sum_{r,s=-\infty}^{\infty} |\kappa(h,r,s)| < \infty,$$

を満たす。ただし、4次キウムラントとは  $\kappa(h,r,s) = E(y_k y_{k+h} y_{k+r} y_{k+s}) - \{\gamma(h)\gamma(r-s) + \gamma(r)\gamma(h-s) + \gamma(s)\gamma(h-r)\}$  で定義されるものである。

定常長記憶過程：長記憶過程とは以下の3つの仮定を満たすものとする。

(i) 自己共分散関数の減少が

$$\gamma(k) \sim ck^{1-2d} \quad \text{as } k \rightarrow \infty,$$

である。ただし  $c$  は定数。

(ii) 以下の fractional BM に収束する汎関数中心極限定理 (functional central limit theorem) が成り立つ。

$$n^{-1/2-d} \sum_{j=1}^{[nt]} (y_t - E(y_t)) \Rightarrow c_d B_d(t), \quad \text{as } n \rightarrow \infty.$$

ただし、 $c_d^2 = c/\{d(2d+1)\}$ 。

(iii) 4 次のキュムラントが

$$\sum_{r,s=-n}^n |\kappa(h,r,s)| = O(n^{2d}),$$

を満たす。

### 3. 長記憶性を検出する検定

長記憶性を検出する検定はこれまでいくつかの検定統計量が提案されてきた。時系列  $\{y_t\}$  が以下の実数差分を持っているとする。

$$(1-B)^d y_t = u_t, \quad t = 1, 2, \dots, n \quad (3.1)$$

ここで  $\{u_t\}$  は短記憶定常過程とする。ここで  $d=0$  の短記憶過程  $I(0)$  を帰無仮説とし、対立仮説  $I(d)$  ( $0 < d < 1/2$ ) の定常長記憶過程を検出する検定を考えるのである。初めに  $u_t$  に定常 ARMA モデルを仮定するパラメトリックな検定として LM 検定と Breitung-Hassler の検定を説明する。次に  $u_t$  にパラメトリックなモデルを仮定しない修正 R/S 統計量、KPSS 検定、V/S 統計量のノンパラメトリックな3検定、そして Lobato-Robinson 検定を紹介する。

#### 3.1 パラメトリック検定

まず、標準的な検定は ARFIMA( $p, d, q$ ) モデルをパラメトリックに特定化した上で、 $d$  の検定を行う方法であるだろう。こうした検定については、周波数領域では Robinson (1994) が、時間領域では Tanaka (1999) が  $d$  に関する LM 検定統計量を導出している。また Tanaka (1999) ではワルド検定も導いている。さらに Breitung and Hassler (2002) が Tanaka (1999) の検定と同等の検定を提案しており、共和分分析に応用している。最近では Harris *et al.* (2008) が Tanaka (1999) の検定を用いた同様の検定を提案している。以下に Tanaka (1999) の LM 検定と Breitung and Hassler (2002) の検定を説明する。

### 3.1.1 Tanaka (1999) の LM 検定

長記憶過程を検出する検定を考えるなら, Tanaka (1999) の LM 検定を帰無仮説で  $d = 0$  として, 対立仮説  $d > 0$  とすれば良いであろう. Tanaka (1999) の検定は以下の通りである.

$$S_T = \frac{\sqrt{n} \sum_{j=1}^{n-1} \hat{\rho}_j / j}{\hat{\omega}} \quad (3.2)$$

ここで  $\hat{\rho}_j$  は  $\{y_t\}$  の  $j$  次の標本自己相関であり,  $\hat{\omega}^2$  は Tanaka (1999) の (50) 式によって定義された  $\omega^2$  に ARMA( $p, q$ ) モデルで最尤推定されたパラメータの推定値を代入したものである. もし,  $u_t$  が  $u_t = \varepsilon_t$  とホワイトノイズであるならば,  $\omega^2 = \pi^2/6$  である. また,  $u_t$  が  $u_t = \phi u_{t-1} + \varepsilon_t$  と 1 次の AR(1) モデルであるなら

$$\omega^2 = \frac{\pi^2}{6} - \frac{(1 - \phi^2)}{\phi^2} (\log(1 - \phi))^2 \quad (3.3)$$

である. (3.3) に帰無仮説  $d = 0$  の下で AR(1) を推定した推定値  $\hat{\phi}$  を代入することで  $\hat{\omega}^2$  が得られる. この検定は LM 検定なので ARFIMA( $p, d, q$ ) の帰無仮説  $d = 0$  の下で検定統計量を構成する. つまり, ARMA( $p, q$ ) を特定化して, 推定を行い残差に対して検定統計量を構成することになる.  $d = 0$  の帰無仮説の下で検定統計量  $S_T$  は漸近的に標準正規分布に従うので, 対立仮説  $d > 0$  の片側検定ならば,  $S_T$  の大きい値に対して棄却域を設ければ良い.

### 3.1.2 Breitung and Hassler (2002) の検定

Breitung and Hassler (2002) は Tanaka (1999) の LM 検定と同等の検定を以下のように提案している. 提案された検定は以下の通りである.  $(1 - B)^d y_t = \varepsilon_t$  で  $\{\varepsilon_t\}$  をホワイトノイズとして,  $d$  の値について検定を行う.  $d = 0$  を帰無仮説とし対立仮説を  $d > 0$  とすればこの検定は長記憶性を検出する検定となる. ここで

$$y_{t-1}^* = \sum_{j=1}^{t-1} y_{t-j} / j, \quad (3.4)$$

とにおいて, 以下の回帰を考える.

$$y_t = \rho y_{t-1}^* + e_t \quad (3.5)$$

このときの回帰係数  $\rho = 0$  のときの  $t$  統計量, すなわち  $\rho$  の  $t$  値を検定統計量とするのである. つまり,

$$\hat{\tau}_n = \frac{\sum_{t=2}^n y_t y_{t-1}^*}{\sqrt{\hat{\sigma}_e^2 \sum_{t=2}^n y_{t-1}^2}} \quad (3.6)$$

を検定統計量とする. ただし,  $\hat{\sigma}_e^2$  は (3.5) の回帰の誤差項の分散の推定値である. このとき, 帰無仮説の下で  $\hat{\tau}_n$  が漸近的に標準正規分布に従うことを使って検定を行えばよい.

次に AR(1) の項が含まれている場合には,  $(1 - \phi B)(1 - B)^d y_t = \varepsilon_t$  での  $d$  の検定になる. この時, はじめに AR(1) の推定された係数を  $\hat{\phi}$  とし, AR(1) の残差を  $\hat{x}_t = y_t - \hat{\phi}y_{t-1}$  とおく. (3.4) と同様に

$$x_{t-1}^* = \sum_{j=1}^{t-1} \hat{x}_{t-j}/j, \quad (3.7)$$

とおく. ここでは以下の回帰を考えることになる.

$$\hat{x}_t = \rho x_{t-1}^* + \psi y_{t-1} + e_t, \quad (3.8)$$

この回帰の回帰係数  $\rho$  の  $t$  値を検定統計量とすれば良い. また, AR( $p$ ) の場合も同様に検定統計量を作成することができる. しかしながら, Breitung and Hassler (2002) の検定では MA 項を含んだ場合は検定統計量を作ることができないのが難点であるだろう.

### 3.2 ノンパラメトリック検定

ここでは, 修正 R/S 統計量, KPSS 検定, V/S 統計量の 3 検定を説明する. これらの検定では  $\{u_t\}$  の長期分散 (long-run variance) をノンパラメトリックに推定する必要がある.

#### 3.2.1 修正 R/S 統計量

時系列  $\{y_t\}$  が長記憶性を持つかという検出法は, いくつかあるが, その中で古くから知られているのが, rescaled range (R/S) 分析である. とりわけ, Lo (1991) が提案した修正 R/S 統計量が良く用いられている. 修正 R/S 統計量は,

$$Q_n(q) = \frac{1}{\hat{s}_{n,q}} \left[ \max_{1 \leq k \leq n} \sum_{j=1}^k (y_j - \bar{y}) - \min_{1 \leq k \leq n} \sum_{j=1}^k (y_j - \bar{y}) \right], \quad (3.9)$$

$$\hat{s}_{n,q}^2 = \frac{1}{n} \sum_{t=1}^n (y_t - \bar{y})^2 + 2 \sum_{j=1}^q \omega_j(q) \hat{\gamma}(j), \quad (3.10)$$

となる. なお,  $\{\omega_j\}$  は, Bartlett カーネルで,  $\omega_j = 1 - j/(q+1)$  である. また,  $\hat{\gamma}(j)$  は標本自己共分散で

$$\hat{\gamma}(j) = \frac{1}{n} \sum_{t=1}^{n-j} (y_t - \bar{y})(y_{t+j} - \bar{y}), \quad (3.11)$$

である. ちなみに,  $\hat{s}_{n,q}^2$  は, 自己共分散関数が絶対総和可能な短記憶過程においては,  $2\pi f(0) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} \gamma(k)$  の推定量, つまり, 原点でのスペクトル密度の推定量となっている. また長期分散 (long-run variance) と呼ばれている. しかし, 長記憶過程では (2.1) から分かるように原点におけるスペクトル密度が発散しているため, そのままでは  $\hat{s}_{n,q}^2$  は発散してしまう. なお, Lo (1991) ではバンド幅  $q$  を Andrews (1991) のデータに依存して選択する方法を用いている. この時には,

$$q = [k_n], \quad k_n = \left( \frac{3n}{2} \right)^{1/3} \left( \frac{2\hat{\phi}}{1 - \hat{\phi}^2} \right)^{2/3} \quad (3.12)$$

ととる.  $q$  は  $k_n$  を超えない最大の整数とし,  $\hat{\phi}$  は 1 次の自己相関である. バンド幅  $q$  の決め方については KPSS 検定の 3.2.2 節でも説明する.

帰無仮説の短記憶過程の下では,

$$\frac{1}{\sqrt{n}}Q_n \Rightarrow U_{MRS} = \max_{0 \leq t \leq 1} \tilde{B}(t) - \min_{0 \leq t \leq 1} \tilde{B}(t), \quad (3.13)$$

が成り立つ. なお,  $\{\tilde{B}(t); 0 \leq t \leq 1\}$  は Brownian bridge であり,  $\tilde{B}(t) = B(t) - tB(1)$  と標準 Brownian motion  $B(t)$  により定義されるものである. そこで  $U_{MRS}$  の分布を用いて検定を行えばよい. (3.13) の右辺の漸近分布  $U_{MRS}$  の分布関数は Lo (1991) の (3.9) 式で,

$$F_{MRS}(x) = 1 + 2 \sum_{k=1}^{\infty} (1 - 4k^2 x^2) e^{-2k^2 x^2}, \quad (3.14)$$

と与えられている. また,  $U_{MRS}$  の分布の数値表は Lo (1991, 表 II) にあるので, それを使えばよいことになる. 一方, 対立仮説の定常長記憶過程の下では,

$$\left(\frac{q}{n}\right)^d \frac{1}{\sqrt{n}}Q_n \Rightarrow \sup_{0 \leq t \leq 1} \tilde{B}_d(t) - \inf_{0 \leq t \leq 1} \tilde{B}_d(t),$$

が成り立つ. なお  $\{\tilde{B}_d(t)\}$  は  $\tilde{B}_d(t) = B_d(t) - tB_d(1)$  で定められる fractional Brownian bridge である. したがって, 対立仮説では一貫性がある.

### 3.2.2 KPSS 検定

Kwiatkowski *et al.* (1992) が提案した KPSS 検定は, Saikkonen and Luukkonen (1993) の検定と同じものであり, 定常過程 [I(0) 過程] を帰無仮説にとり, 単位根過程 [I(1) 過程] を対立仮説にとる検定になっている. この検定を長記憶過程を対立仮説とする検定へと応用したのが, Lee and Schmidt (1996) と Lee and Amsler (1997) である. 帰無仮説として,  $d = 0$  の短記憶過程をとり, 対立仮説として, 単位根過程 ( $d = 1$ ) だけでなく, 定常長記憶過程 ( $0 < d < 1/2$ ) および非定常実数値和分時系列 ( $1/2 \leq d < 1$ ) をも考えようというものである. このケースではトレンド項を含まない帰無仮説を考える. つまり, Lee and Schmidt (1996) および Lee and Amsler (1997) のデータ生成プロセスでのトレンド項のパラメータを  $\xi = 0$  とした場合を帰無仮説として考えている. このときの KPSS 検定の検定統計量は,

$$T_n = \frac{1}{\hat{s}_{n,q}^2 n^2} \sum_{k=1}^n \left( \sum_{t=1}^k (y_t - \bar{y}) \right)^2, \quad (3.15)$$

である.

まず, 帰無仮説である短記憶定常時系列の下では

$$T_n \Rightarrow U_{KPSS} = \int_0^1 \tilde{B}(t)^2 dt, \quad (3.16)$$

が成り立つ．ただし  $\{\tilde{B}(t); 0 \leq t \leq 1\}$  は Brownian bridge である．従って，この分布に基づいて検定を行えばよい．Anderson and Darling (1952) が (4.35) 式で  $U_{KPSS}$  の分布関数をベッセル関数を用いて陽表的に与え，また Anderson and Darling (1952, Table 1) で分布表を与えている．したがってその分布表によって検定を行うことができる．また，Anderson and Darling (1952) は  $U_{KPSS}$  を

$$U_{KPSS} = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{Y_k^2}{\pi^2 k^2}$$

と独立な標準正規変数列  $N(0, 1)$  の  $\{Y_k\}$  の和による表現を与えており，また， $U_{KPSS}$  の特性関数も

$$\phi_{KPSS}(\theta) = \left( \frac{\sin \sqrt{2i\theta}}{\sqrt{2i\theta}} \right)^{-1/2} \quad (3.17)$$

と与えられている．Tanaka (1996, Figure 1.2) では，(3.17) の特性関数から反転公式を用いて得た密度関数のグラフを与えている．また Tanaka (1996, Table 1.2) にも  $U_{KPSS}$  の分布表が与えられている．一方，対立仮説の定常長記憶時系列の下では Giraitis *et al.* (2003) にあるように

$$\left( \frac{q}{n} \right)^{2d} T_n \Rightarrow \int_0^1 \tilde{B}_d(t)^2 dt,$$

が成り立つので，検定の一致性が保証される．ここで  $\{\tilde{B}_d(t)\}$  は，fractional Brownian bridge である．

KPSS 検定で用いる長期分散 (long-run variance) の推定法はいくつか提案されている．特に Hobijn *et al.* (2004) では KPSS 検定に対して Bartlett カーネルと Quadratic Spectral カーネルの 2 種類の方法を提案している．Bartlett カーネルは  $\omega_j = 1 - j/(q+1)$  であり，(3.10) 式によって長期分散を推定する．一方，Quadratic Spectral カーネルは，

$$\omega_j = \frac{25}{12\pi^2(j/q)^2} \left[ \frac{\sin(6\pi(j/m)/5)}{6\pi(j/m)/5} - \cos(6\pi(j/m)/5) \right]$$

を (3.10) 式に入れて長期分散を推定する．これら 2 つのカーネルについては，Andrews (1991) および Newey and West (1994) が長期分散のバンド幅  $q$  をデータから自動的に選択する方法を提案しており，また Quadratic Spectral カーネルのほうがより効率的であるとしている．後のシミュレーションにおいてもこの 2 種のカーネルを使って長期分散を推定し，Hobijn *et al.* (2004, Table 3) の方法でバンド幅  $q$  を決めることとする．

### 3.2.3 V/S 検定

この検定統計量は Giraitis *et al.* (2003) が提案したもので，KPSS 検定を中心化したものになっている．以下の V/S 統計量あるいは rescaled variance 統計量を計算して検定を

行う。

$$M_n(q) = \frac{1}{\hat{s}_{n,q}^2 n^2} \left[ \sum_{k=1}^n \left( \sum_{t=1}^k (y_t - \bar{y}) \right)^2 - \frac{1}{n} \left( \sum_{k=1}^n \sum_{t=1}^k (y_t - \bar{y}) \right)^2 \right], \quad (3.18)$$

である。部分和  $S_k^* = \sum_{t=1}^k (y_t - \bar{y})$  とおけば、 $M_n$  は、部分和  $S_k^*$  の標本分散と  $\hat{s}_{n,q}^2$  の比を  $n$  で割ったものであることが分かる。つまり、

$$M_n = \frac{1}{n} \frac{\frac{1}{n} \sum_{j=1}^n (S_j^* - \bar{S}^*)^2}{\hat{s}_{n,q}^2},$$

である。

帰無仮説の短記憶定常時系列の下では

$$M_n \Rightarrow U_{VS} = \int_0^1 \tilde{B}(t)^2 dt - \left( \int_0^1 \tilde{B}(t) dt \right)^2, \quad (3.19)$$

が成り立つので、この分布を用いて検定を行えばよい。ただし  $\{\tilde{B}(t); 0 \leq t \leq 1\}$  は Brownian bridge である。Watson (1961) の (22) 式には  $U_{VS}$  の分布関数が

$$F_{VS}(x) = 1 + \sum_{k=1}^{\infty} 2(-1)^k e^{-2k^2 \pi^2 x}, \quad (3.20)$$

と与えられているので  $U_{VS}$  の分布の数値表を求めることができる。また、Kolmogorov-Smirnov 統計量の極限分布の分布関数を  $F_{KS}(x)$  とすると、 $F_{VS}(x) = F_{KS}(\pi\sqrt{x})$  の関係が成り立っているので、Kolmogorov-Smirnov 統計量の数値表 (たとえば、Smirnov (1948)) によって  $U_{VS}$  の分布の数値表を得ることもできる。さらには  $U_{VS}$  は Watson (1961) の (16) 式にあるように

$$U_{VS} = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{Y_k^2 + Z_k^2}{4\pi^2 k^2}$$

と互いに独立な  $N(0, 1)$  の正規変数 ( $\{Y_k\}, \{Z_k\}$ ) の加重和の表現をもつ。また、Watson (1961) から  $U_{VS}$  の特性関数が

$$\phi_{VS}(\theta) = \left( \frac{\sin \sqrt{i\theta/2}}{\sqrt{i\theta/2}} \right)^{-1/2} \quad (3.21)$$

と与えられるので、これらを用いることもできる。また、対立仮説の定常長記憶時系列の下では、Giraitis *et al.* (2003) より

$$\left( \frac{q}{n} \right)^{2d} M_n \Rightarrow \int_0^1 \tilde{B}_d(t)^2 dt - \left( \int_0^1 \tilde{B}_d(t) dt \right)^2,$$

が成り立つので、検定の一致性が示される。

### 3.3 Lobato-Robinson 検定

Lobato and Robinson (1998) は,  $d = 0$  の短記憶  $I(0)$  過程を帰無仮説とする検定を提案した. この検定は, 長記憶  $I(d)$  過程のパラメータ  $d$  のセミパラメトリックな推定法として, Robinson (1995) が提案した局所 Whittle 法を基礎として構成するものである. なお, この検定は Shao and Wu (2007) によって修正 R/S 統計量, KPSS 検定, V/S 統計量の 3 つのノンパラメトリック検定よりも漸近的に局所検出力が大きくなることが理論的に示されている.

局所 Whittle 推定法は, 対数尤度を Whittle 推定の方法で近似し, その近似した目的関数のうち,  $d$  の推定に必要な原点近くのスペクトルのみを局所的に用いるものである. つまり, 標本サイズ  $n$  に対して,  $1 < m < n/2$  の範囲の  $m$  をとり,  $\lambda_j = 2\pi j/n$ ,  $j = 1, \dots, m$ , とし,

$$I(\lambda) = \frac{1}{2\pi n} \left| \sum_{t=1}^n y_t e^{it\lambda} \right|^2, \quad (3.22)$$

をピリオドグラムとする. このとき,

$$R(d) = \log \left[ \frac{1}{m} \sum_{j=1}^m \lambda_j^{2d} I(\lambda_j) \right] - \frac{2d}{m} \sum_{j=1}^m \log(\lambda_j), \quad (3.23)$$

なる目的関数  $R(d)$  を最小化する  $d$  を推定値とする推定法が局所 Whittle 法である.

局所 Whittle 推定法は, その構成法より, 最小化する目的関数  $R(d)$  は対数尤度を近似したものであるから,  $R(d)$  を対数尤度と見なして,  $d = 0$  を帰無仮説とする LM 検定を構成することを考えるものである. 実際には, 2 乗値が LM 検定に漸近的に等しい  $LM = t_m^2$  を以下のように構成する.  $\nu_j = \log j - m^{-1} \sum_{j=1}^m \log j$ ,  $\hat{C}_0 = m^{-1} \sum_{j=1}^m I(\lambda_j)$ ,  $\hat{C}_1 = m^{-1} \sum_{j=1}^m \nu_j I(\lambda_j)$  とおいたとき, Shao and Wu (2007) の (8) 式にあるように

$$t_m = -m^{1/2} \frac{\hat{C}_1}{\hat{C}_0}, \quad (3.24)$$

を検定統計量とする. ここでは 1 変量の場合を考えているので自由度は 1 となる. そこで  $t_m^2$  が漸近的に  $\chi_1^2$  に従う. よって  $t_m$  は  $n \rightarrow \infty$  で標準正規分布に従う. このことは局所 Whittle 推定量  $\hat{d}_{loc}$  が帰無仮説  $d = 0$  の下で  $\hat{d}_{loc} = t_m/2$  となることから分かる. そこで  $d > 0$  の片側検定のときは, 有意水準を  $100\alpha\%$  としたとすれば,  $t_m$  の値が標準正規分布の上側確率  $\alpha$  点を超えたとき,  $d = 0$  の帰無仮説を棄却し,  $d > 0$  の対立仮説を採用すればよいことになる.

なお,  $t_m$  の漸近分布を導くためには,  $m$  は,

$$\frac{1}{m} + \frac{m^5 (\log m)^2}{n^4} \rightarrow 0, \quad \text{as } n \rightarrow \infty,$$

を満たす必要がある．具体的な  $m$  の選び方として，Lobato and Robinson (1998) は以下の方法を提案している． $\underline{m} = 0.06n^{4/5}$  を下限， $\bar{m} = 1.2n^{4/5}$  を上限とした上で，

$$m_{opt} = \left(\frac{3n}{4\pi}\right)^{4/5} \left| \frac{-\hat{\phi}}{(1-\hat{\phi})^2} \right|^{-2/5}$$

とする．なお， $\hat{\phi}$  は原系列  $\{y_t\}$  に AR(1) を当てはめた時の  $y_{t-1}$  の係数パラメータの推定値あるいは1次の標本自己相関とする．しかしながら， $m$  の選び方である  $m_{opt}$  の理論的な最適性は確立されていないことに注意する必要がある．たとえば，Lobato and Savin (1998) のディスカッションではサイズの歪みが生じている可能性が指摘されている．

### 3.4 シミュレーション

ここでは，これまでとりあげた Tanaka (1999) の LM 検定，Breitung-Hassler の検定，修正 R/S 統計量，KPSS 検定，V/S 検定，Lobato-Robinson 検定の6つをシミュレーションによって比較する．はじめに，ARFIMA(0,  $d$ , 0) モデル，ARFIMA(1,  $d$ , 0) ( $\phi = 0.2, 0.5, 0.8$ ) モデル，ARFIMA(0,  $d$ , 1) ( $\theta = 0.8$ ) モデルの5つのケースについてシミュレーションを行った．ここでの検定問題は， $d = 0$  を帰無仮説とし， $d = 0.1, 0.2, 0.3$  を対立仮説ととった時の検定を考えている．この検定のサイズと検出力を計算する．標本サイズは  $n = 500, 1000$  とし，有意水準は5%，1%の2つとする．また，繰り返し数は1000回とする．パラメトリックな検定は Tanaka (1999) の LM 検定を LM と Breitung and Hassler (2002) は BH と表中に記してある．さらに，修正 R/S 統計量 (mR/S)，KPSS 検定，V/S 検定についてはバンド幅  $q$  を選ぶ必要がある．KPSS 検定，V/S 検定の Bartlett カーネルと Quadratic Spectral カーネルの  $q$  は Hobijn *et al.* (2004, 表3) のやり方で決めている．なおその際に初期バンド幅を決める必要があるが，Bartlett カーネルでは  $n_0 = [8(n/100)^{1/4}]$  を Quadratic Spectral カーネルでは  $n_0 = [8(n/100)^{2/25}]$  をそれぞれ用いている．表には BT, QS と示し区別している．さらに，修正 R/S 統計量では KPSS 検定および V/S 検定で用いた Bartlett カーネルと Quadratic Spectral カーネルを使うだけでなく，(3.12) 式で示された Lo (1991) で用いられている Bartlett カーネルのバンド幅の選び方も使った．表中 Lo と表わしてある．Lobato and Robinson (1998) の検定は表には L-R と記してある．Lobato-Robinson 検定では  $m_{opt}$  を用いた．またこれらの計算には Ox (Doornik (2008)) を用いている．

表1に ARFIMA(0,  $d$ , 0) のシミュレーションの結果が載せてある．ARFIMA(0,  $d$ , 0) では，修正 R/S 統計量のサイズがやや小さいが，その他の検定のサイズは良好である．検出力をみるとパラメトリックな検定である LM 検定と Breitung-Hassler の検定 (BH) が検出力が一番高く，次に Lobato-Robinson 検定である．それから，ノンパラメトリックな3検定 (修正 R/S 統計量，KPSS 検定，V/S 検定) である．また，修正 R/S 統計量，KPSS 検定，V/S 検定の3つを比較すると Lo (1991) のバンド幅  $q$  で修正 R/S 統計量の検出量が高

表1 ARFIMA(0,  $d$ , 0) における長記憶性を検出する検定のサイズと検出力.

$q$	LM	BH	mR/S			KPSS		V/S		L-R $m_{opt}$	
			Lo	BT	QS	BT	QS	BT	QS		
$n$	$d$										
5%test											
$n = 500$											
	0.0	4.0	4.4	2.9	2.0	1.9	4.1	4.6	4.1	4.2	4.1
	0.1	79.4	62.0	20.4	6.8	7.0	11.3	11.5	11.3	11.6	53.3
	0.2	99.9	98.2	36.9	9.9	11.3	19.5	19.5	20.5	21.5	87.9
	0.3	100.0	100.0	49.3	11.6	15.2	28.7	29.8	30.5	32.4	96.9
$n = 1000$											
	0.0	3.8	4.7	2.8	3.1	3.5	5.4	5.7	4.2	4.0	4.1
	0.1	97.8	85.8	25.9	10.4	11.4	15.0	14.8	15.2	16.1	53.3
	0.2	100.0	100.0	49.7	18.8	23.7	24.0	26.8	27.9	31.3	87.9
	0.3	100.0	100.0	64.2	23.8	38.1	35.8	40.5	41.5	48.1	96.9
1%test											
$n = 500$											
	0.0	0.6	0.8	0.3	0.1	0.2	0.6	0.4	0.4	0.5	1.0
	0.1	61.0	40.5	7.3	0.6	0.7	3.2	3.3	2.6	2.6	31.9
	0.2	99.9	96.0	17.9	1.1	1.8	6.1	6.9	5.5	6.5	73.8
	0.3	100.0	100.0	26.3	0.9	1.9	10.9	12.9	9.1	10.7	89.0
$n = 1000$											
	0.0	0.9	0.4	0.5	0.3	0.3	0.7	0.6	0.2	0.3	1.0
	0.1	94.2	70.6	11.3	2.0	3.6	4.7	5.4	3.7	4.7	31.9
	0.2	100.0	100.0	30.3	4.0	8.8	10.1	12.5	10.2	14.6	73.8
	0.3	100.0	100.0	45.1	5.9	16.1	17.5	21.7	18.1	26.2	89.0

い、次には V/S 検定のほうが KPSS 検定よりも検出力がやや高めにみえる。この場合では、パラメトリック検定 > セミパラ検定 (Lobato-Robinson 検定) > ノンパラ検定と検出力の順序がかなりはっきりと出ている。

次に、ARFIMA(1,  $d$ , 0) と 1 次の AR 項を含んだものとおよび ARFIMA(0,  $d$ , 1) と 1 次の MA 項を含んだもののシミュレーション実験を行った。AR の場合は、 $\phi = 0.2, 0.5, 0.8$  であり、MA の場合は  $\theta = 0.5$  である。標本サイズ、有意水準、繰り返し数およびバンド幅  $q$  の選択と  $m_{opt}$  は ARFIMA(0,  $d$ , 0) と同じである。

AR パラメータは自己相関の強さを直接示すので、AR 項の係数のみ 3 種類  $\phi = 0.2, 0.5, 0.8$  を設定している。まず、表 2 の  $\phi = 0.2$  の場合では、全体的な傾向としては ARFIMA(0,  $d$ , 0) とおなじであるが、LM 検定と Lobato-Robinson 検定にサイズの歪みが生じてきている。比較的、Breitung-Hassler の検定 (BH) のパフォーマンスが良好と考えられる。表 3 の  $\phi = 0.5$  のときには、KPSS 検定および V/S 検定のパフォーマンスも良くなっている。表 4 の  $\phi = 0.8$

表2 ARFIMA(1,  $d$ , 0) ( $\phi = 0.2$ ) における長記憶性を検出する検定のサイズと検出力。

$q$	LM	BH	mR/S			KPSS		V/S		L-R $m_{opt}$	
			Lo	BT	QS	BT	QS	BT	QS		
$n$	$d$										
5%test											
$n = 500$											
	0.0	2.0	3.3	3.7	3.0	1.9	4.7	4.7	4.8	4.2	10.5
	0.1	22.8	28.9	13.9	6.4	6.6	11.6	11.6	12.1	11.5	40.6
	0.2	57.1	61.8	26.3	9.3	10.7	19.2	19.7	20.4	21.3	69.7
	0.3	69.1	75.5	33.0	10.7	14.6	28.5	29.7	29.8	32.2	83.1
$n = 1000$											
	0.0	2.7	4.5	4.3	3.4	3.4	5.9	5.9	4.5	4.1	10.2
	0.1	46.7	49.4	19.3	10.6	11.4	15.1	14.8	15.2	16.5	64.2
	0.2	87.9	87.8	38.0	17.8	23.6	23.9	26.8	27.7	31.4	90.8
	0.3	95.9	95.3	51.0	23.4	37.5	35.8	40.3	41.3	47.9	97.7
1%test											
$n = 500$											
	0.0	0.4	0.9	0.7	0.2	0.2	0.7	0.5	0.5	0.5	2.6
	0.1	11.0	13.0	4.6	0.5	0.8	3.1	3.2	2.7	2.3	19.8
	0.2	38.4	38.5	9.8	0.9	1.2	5.8	6.9	5.3	6.3	49.0
	0.3	51.9	57.9	12.2	0.8	1.8	10.8	12.9	9.1	10.6	64.7
$n = 1000$											
	0.0	0.7	0.4	0.8	0.5	0.3	0.8	0.6	0.4	0.3	2.8
	0.1	28.7	25.9	7.8	2.0	3.3	4.9	5.7	3.8	4.7	40.3
	0.2	75.4	72.3	19.1	3.7	8.3	10.2	12.3	10.0	14.4	81.2
	0.3	88.6	88.7	30.0	5.5	16.0	17.5	21.5	18.1	26.1	93.1

のときには、LM 検定のサイズの歪みが小さくなり、検出力も大きい。これは AR パラメータが正しく推定できているからではないかと考えられる。つまり、モデルがうまく特定化出来ているからではないかと考える。しかしながら、Lobato-Robinson 検定の検出力は落ちてしまっている。さらには LM 検定を除く検定は全体的に検出力が低い。このことはノンパラメトリックな手法では 1 次の自己相関の強さと長期記憶の区別がつきにくいからではないだろうか。特に修正 R/S 統計量は実際に使うには難しいほど検出力が小さくなっている。

表 5 の MA(1) ( $\theta = 0.8$ ) を含んだケースでは Breitung-Hassler の検定は行わず、残りの 5 種の検定を用いる。このケースでは LM 検定でのサイズの歪みが大きくなってしまっている。これは LM 検定では MA(1) を推定しているため、その推定と関係があるのではないだろうか。一方、Lobato-Robinson 検定はサイズの歪みも小さく、検出力も他のノンパラメトリック検定よりも大きくなっている。

表3 ARFIMA(1,  $d$ , 0) ( $\phi = 0.5$ ) における長記憶性を検出する検定のサイズと検出力.

$q$	LM	BH	mR/S			KPSS		V/S		L-R $m_{opt}$	
			Lo	BT	QS	BT	QS	BT	QS		
$n$	$d$										
5%test											
$n = 500$											
	0.0	1.2	2.6	3.3	3.6	2.7	5.4	5.5	6.4	5.2	8.7
	0.1	8.3	19.1	8.3	5.4	5.5	12.7	12.8	12.7	11.5	22.1
	0.2	17.5	30.4	11.7	7.8	9.2	19.7	20.2	20.0	21.5	37.2
	0.3	22.3	33.7	10.3	9.1	13.6	28.5	29.9	29.8	32.1	41.5
$n = 1000$											
	0.0	2.4	4.7	4.0	3.9	3.6	7.0	6.4	6.0	4.7	10.2
	0.1	19.9	29.2	12.5	9.9	10.7	15.2	15.1	15.6	16.3	39.5
	0.2	40.8	48.3	23.5	16.3	21.1	24.0	26.5	27.5	31.5	62.8
	0.3	48.5	46.3	28.4	22.6	36.6	35.6	40.6	40.9	47.8	74.2
1%test											
$n = 500$											
	0.0	0.1	0.8	0.3	0.4	0.2	1.2	1.0	0.8	0.7	2.2
	0.1	2.9	7.2	0.9	0.7	0.2	3.0	3.2	2.9	2.3	9.0
	0.2	6.5	16.8	1.8	0.6	0.9	6.0	6.9	5.5	6.1	17.7
	0.3	8.8	23.8	0.5	0.7	1.3	11.0	13.0	8.8	10.6	20.0
$n = 1000$											
	0.0	0.7	0.6	0.4	0.3	0.4	1.1	0.8	0.8	0.3	2.4
	0.1	9.4	13.6	3.8	1.7	2.7	4.8	5.9	3.8	4.6	18.9
	0.2	25.2	29.7	7.9	2.8	8.0	9.9	12.3	9.7	14.9	42.4
	0.3	26.4	33.7	9.1	4.3	15.4	17.2	21.5	17.9	26.0	53.1

以上のシミュレーション実験で観察されたことをまとめると、以下のことが言えるであろう。まず、モデルが特定化できればパラメトリックなLM検定が一番良いであろう。しかしながら、AR項およびMA項のパラメータの値によってはサイズの歪みが生じることに留意する必要がある。Breitung-Hasslerの検定は1次の自己相関があるが小さいケースに使えるようである。Lobato-Robinson検定はMA(1)など使えるケースは多く、検出力も大きい。場合によってはサイズの歪みが生じてしまう。これは $\phi$ の値が小さい時に顕著である。 $\phi = 0.2$ ではLM検定でもサイズが過小になっており、 $\phi$ の値が小さいと $\phi$ の推定が難しくなるからと推測される。ノンパラメトリックな検定は検出力は必ずしも高いわけではない。しかし、データから自動的にバンド幅 $q$ を決めてBartlettカーネルあるいはQuadratic Spectralカーネルを使って推定した長期分散(long-run variance)を用いたKPSS検定とV/S検定の検定のサイズは安定的であることが利点として考えられる。カーネルについてはBartlettよりもQuadratic Spectralカーネルが幾分良く、KPSS検定よりもV/S検定の

表4 ARFIMA(1,  $d$ , 0) ( $\phi = 0.8$ ) における長記憶性を検出する検定のサイズと検出力.

$q$	LM	BH	mR/S			KPSS		V/S		L-R $m_{opt}$	
			Lo	BT	QS	BT	QS	BT	QS		
$n$	$d$										
5%test											
$n = 500$											
	0.0	4.5	5.5	1.0	1.8	1.8	7.6	7.2	6.9	6.6	4.7
	0.1	28.1	12.0	1.0	3.0	4.1	13.8	14.2	13.1	14.2	5.9
	0.2	72.1	19.9	0.1	4.7	7.8	20.2	20.9	20.2	23.0	10.2
	0.3	98.2	34.5	0.0	6.6	11.7	29.4	31.2	30.7	34.9	19.8
$n = 1000$											
	0.0	3.6	5.6	3.2	3.7	3.7	7.4	7.7	6.9	6.7	6.1
	0.1	39.3	14.1	4.8	7.2	9.7	16.0	16.6	16.4	18.2	12.5
	0.2	91.9	29.0	3.0	12.8	20.2	23.3	27.3	27.0	32.6	29.9
	0.3	99.9	49.1	0.5	19.9	34.9	35.7	41.1	41.5	48.6	50.1
1%test											
$n = 500$											
	0.0	1.0	0.9	0.0	0.1	0.0	1.3	1.2	0.8	0.5	1.0
	0.1	11.9	4.0	0.0	0.0	0.1	3.4	3.5	2.3	3.5	1.3
	0.2	50.6	8.8	0.0	0.1	0.4	6.5	7.6	4.8	6.4	2.2
	0.3	91.4	15.0	0.0	0.0	1.1	11.6	14.0	8.1	12.0	4.5
$n = 1000$											
	0.0	0.6	0.7	0.2	0.4	0.1	1.3	1.2	0.5	0.6	0.8
	0.1	19.5	4.2	0.2	0.5	1.8	4.8	6.6	3.3	5.3	3.8
	0.2	79.3	10.6	0.0	1.3	6.5	9.8	13.0	8.7	15.3	12.3
	0.3	99.2	25.6	0.0	3.1	14.2	16.9	22.7	17.5	27.4	30.4

方がほんの少しだけ検出力が高いようだ.

### 3.5 応用例

これまで説明した検定を実際のデータに応用する. これから取り上げる日経平均株価指数は日本の株式市場で最も典型的な株価指数である. 用いるデータは日経平均の実現ボラティリティー (realized volatility) である. ボラティリティーとはリターンの分散であるが, 実現ボラティリティーは高頻度データから計算されるボラティリティーである. 渡部 (2007) において日経平均の実現ボラティリティーの対数値が強い長記憶性を持っていることが示されているので, ここでも日経平均の実現ボラティリティーの対数値を対象とすることにする.

本稿では日経平均の5分毎のデータから実現ボラティリティを計算して, その対数値に対して長記憶性の検定を行うことを考える. まず, 日次実現ボラティリティ,  $RV_t$  は以下

表5 ARFIMA(0,  $d$ , 1)( $\theta = 0.5$ ) における長記憶性を検出する検定のサイズと検出力.

$q$	LM	mR/S			KPSS		V/S		L-R $m_{opt}$	
		Lo	BT	QS	BT	QS	BT	QS		
$n$	$d$									
5%test										
$n = 500$										
	0.0	16.0	2.6	2.8	1.9	5.1	4.5	4.8	4.3	4.5
	0.1	89.2	9.9	6.6	6.0	11.8	11.4	12.4	11.3	22.6
	0.2	99.9	16.9	9.2	10.8	19.4	19.4	20.5	21.2	48.6
	0.3	96.5	21.9	10.7	14.7	28.7	29.8	29.9	32.2	63.8
$n = 1000$										
	0.0	17.1	3.4	3.4	3.5	6.0	5.6	4.4	4.1	4.6
	0.1	98.1	14.5	10.5	11.3	15.0	14.9	15.2	16.4	38.6
	0.2	100.0	30.8	17.4	23.3	24.0	26.7	27.7	31.5	75.4
	0.3	98.1	41.1	23.4	37.5	35.8	40.4	41.4	47.8	89.0
1%test										
$n = 500$										
	0.0	9.8	0.4	0.3	0.2	0.7	0.4	0.7	0.5	0.7
	0.1	85.4	1.7	0.7	0.6	3.2	3.2	2.7	2.4	11.3
	0.2	99.7	4.8	0.7	1.3	5.8	6.9	5.4	6.4	28.4
	0.3	96.5	5.3	0.8	1.8	10.9	12.9	9.1	10.7	40.7
$n = 1000$										
	0.0	11.5	0.3	0.6	0.3	0.8	0.6	0.6	0.3	0.9
	0.1	97.8	5.3	2.0	3.0	4.8	5.7	3.9	4.8	20.1
	0.2	100.0	12.6	3.4	8.2	10.3	12.4	10.0	14.4	55.0
	0.3	98.1	19.4	5.5	15.9	17.5	21.5	18.2	26.2	76.6

のように定義されるものである.

$$RV_t = c \sum_{i=1}^n r_{i,t}^2, \quad (3.25)$$

$$c = \frac{\sum_{t=1}^T (R_t - \bar{R})^2}{\sum_{t=1}^T \sum_{i=1}^n r_{i,t}^2} \quad (3.26)$$

なお,  $R_t$  は日次リターンであり,  $\bar{R}$  は日次リターンの平均である. そして,  $r_{i,t}$  は  $t$  日における 5 分毎の対数収益率であり,  $c$  は (3.26) で定義される調整定数である.  $c$  によって日次リターンのボラティリティーとサイズが同じになるように調整されるのである. (例えば, Hansen and Lunde (2005), 渡部 (2007) を参照のこと). 日経平均そのものは 1 分毎に算出されているが, 1 分毎のデータを用いると渡部 (2007) などではマイクロストラクチャー・ノイズが含まれてしまうと報告されているため, 渡部 (2007) に倣いここでは 5 分毎のデータを用いる. なお, 本稿で用いる日経平均株価指数のデータは, データの期間は 2006

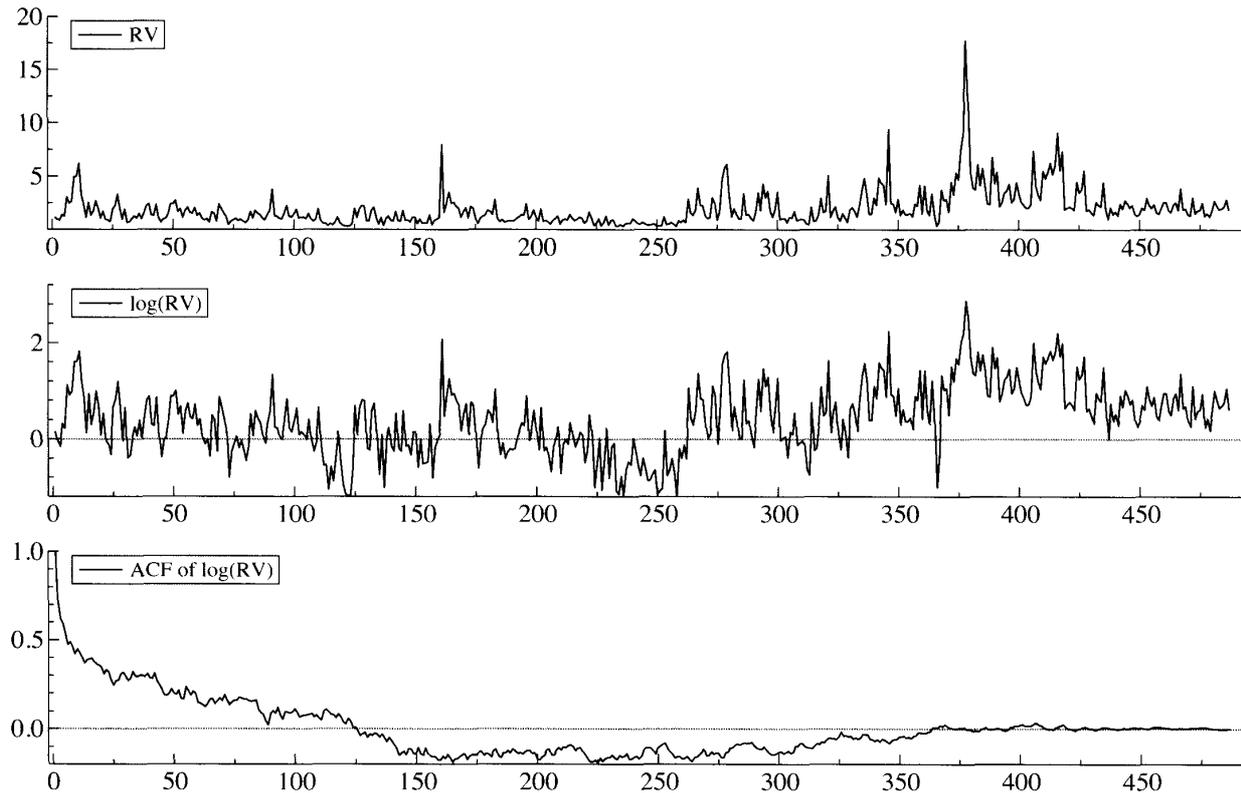


図1  $\log(RV)$  of Nikkei225, 3 July 2006–30 June 2008.

年7月3日から2008年6月30日までの487日分のデータである。用いた調整定数は  $c = 2.411$  である。

実現ボラティリティー  $RV_t$  とその対数変換した値  $\log RV_t$  および  $\log RV_t$  の自己相関を図1にプロットしてある。 $\log RV_t$  の自己相関の減少度合をみると非常にゆっくりなので、 $\log RV_t$  には長記憶性があると予想されるだろう。

次に、 $\log RV_t$  の要約統計量を計算した。表6に計算された  $\log RV_t$  の平均、標本分散、標準偏差、歪度、尖度、Ljung-Box 統計量が載せてある。Ljung-Box 統計量はラグ10で計算してある。 $LB(10) = 1358.4$  は非常に大きいので系列相関がないとの帰無仮説はほとんど棄却される。また、尖度を見るとほぼ3になっているので正規分布の尖度に近いといえるだろう。そして、 $\log RV_t$  についてシミュレーションの時と同じLM検定、Breitung-Hasslerの検定、修正R/S統計量、KPSS検定、V/S検定、Lobato-Robinson検定の6つの検定統計量を計算した。パラメトリックな検定ではARFIMAモデルを特定化する必要がある。そこで、LM検定とBreitung-Hasslerの検定についてはアドホックではあるがAR(1)を付加したARFIMA(1,  $d$ , 0)モデルを仮定して検定統計量を計算した。検定統計量の値は表7に掲載してある。合わせて有意水準5%と1%の棄却域の臨界値も載せてある。Breitung-Hasslerの検定、修正R/S統計量の2つを除いた検定統計量の値は有意水準1%の臨界値よりも大きい。このことより実現ボラティリティーの対数值  $\log RV_t$  に長記憶性があることを示していると判断できる。Breitung-Hasslerの検定はモデルの特定化の問題のため、修正R/S

表 6 実現ボラティリティーの対数値の要約統計量 ( $n = 487$ ).

平均	分散	標準偏差	歪度	尖度	LB(10)
0.4142	0.4959	0.7042	0.1739	3.051	1358.4

表 7 実現ボラティリティーの対数値に対する検定統計量の値 ( $n = 487$ ).

$q$	LM	BH	mR/S			KPSS		V/S		L-R $m_{opt}$
			Lo	BT	QS	BT	QS	BT	QS	
	2.938	1.120	1.955	1.672	1.787	0.728	0.831	0.316	0.360	5.395
5%	1.645	1.645	1.747	1.747	1.747	0.46136	0.46136	0.1869	0.1869	1.645
1%	2.326	2.326	2.001	2.001	2.001	0.74346	0.74346	0.2684	0.2684	2.326

統計量の場合では短記憶部分の自己相関のために、検出力が低くなっていると考えられる。

#### 4. その他の検定

長記憶時系列をめぐる検定の話において、近年、研究の関心を集めているのは、変化点の検定であろう。本節ではまず長記憶性をもつ時系列における変化点の検定に関する研究を紹介し、次いで、変化点の検定と関連のある 2 標本の長記憶パラメータの比較の検定について解説する。最後にこれらの検定に対し、シミュレーションによってパフォーマンスを評価することとする。

##### 4.1 変化点の検定

長記憶時系列における変化点の検定は Beran and Terrin (1996) の提案したものが最初である。その後、その漸近分布の修正を施した Horvath and Shao (1999), Horvath (2001) の研究がある。これらの検定は周波数領域で考えた Whittle 推定を用いたものである。一方、Ling (2007) は時間領域の CSS (conditional sum of squares) 推定を用いることで、Horvath (2001) と同様の Wald 検定を提案している。さらに Yamaguchi (2010) は Ling (2007) の CSS 推定に基づいた検定に Bai (1997) のアイデアを応用することで変化点の推定量を提案している。

以下、一般化による煩雑さを避けて議論の構成が理解できるように説明していく。そこで一変量時系列  $\{y_t, t = 1, 2, \dots, n\}$  の場合で説明する。このときの検定問題は時点  $k = [nt] (0 < t < 1)$  で、パラメータが変わらないか、変化するかを検定する問題である。帰無仮説はパラメータは変化しないであり、対立仮説はパラメータが変化するのである。

はじめに、Horvath and Shao (1999), Horvath (2001) による Whittle 推定を元にした検定を説明する。ここでのパラメータは  $(\sigma^2, \tau)$  であり、パラメータ空間は  $S \times T \subset (0, \infty) \times R^r$  とする。そして、ARFIMA( $p, d, q$ ) なら  $r = p + q + 1$  であり、ARFIMA(1,  $d$ , 1) なら

$\tau = (d, \phi, \theta)'$  である. まず, Whittle 推定はピリオドグラム (3.22) 式で定義された  $I(\omega)$  とスペクトル密度関数  $f(\omega|\tau)$  に対して,

$$Q = \frac{1}{2n} \sum_{j=1}^{n-1} \frac{I(\omega_j)}{f(\omega_j|\tau)} \quad (4.1)$$

を最小化することでパラメータ  $\tau$  の推定値  $\hat{\tau}$  を得るものである. このとき,  $\sqrt{n}(\hat{\tau} - \tau)$  は漸近正規性が成り立ち,  $\mathcal{N}(0, 4\pi\mathcal{W}(\tau)^{-1})$  の正規分布にしたがう. なお,  $\mathcal{W}(\tau)$  は  $r \times r$  の行列でその  $(i, j)$  成分  $w_{ij}(\tau)$  は

$$w_{ij}(\tau) = \int_{-\pi}^{\pi} f(\omega|\tau) \frac{\partial^2}{\partial \tau_i \partial \tau_j} \frac{1}{f(\omega|\tau)} d\tau$$

で定義されるものである.

ここで時点  $k = [nt] (0 < t < 1)$  で変化したかどうかをみる検定を考える. まず, 変化前のパラメータを推定するために

$$L_1 = \frac{1}{2n} \sum_{j=1}^{[nt]} \frac{I(\omega_j)}{f(\omega_j|\tau)} \quad (4.2)$$

を最小化して  $\hat{\tau}_{[nt],1}$  を得る. 一方, 変化後のパラメータを推定するために

$$L_2 = \frac{1}{2n} \sum_{j=[nt]+1}^{n-1} \frac{I(\omega_j)}{f(\omega_j|\tau)} \quad (4.3)$$

を最小化して  $\hat{\tau}_{[nt],2}$  を得るとする.

このときの統計量は,

$$\hat{Z}_n(t) = \frac{1}{\sqrt{4\pi}} n^{1/2} t(1-t) \left\{ (\hat{\tau}_{[nt],1} - \hat{\tau}_{[nt],2})' \hat{\mathcal{W}}(nt) (\hat{\tau}_{[nt],1} - \hat{\tau}_{[nt],2}) \right\}^{1/2} \quad (4.4)$$

と構成される. なお,  $\hat{\mathcal{W}}(nt)$  は  $k = [nt]$  として

$$\hat{\mathcal{W}}(k) = \frac{k}{n} \mathcal{W}(\hat{\tau}_{k,1}) + \frac{n-k}{n} \mathcal{W}(\hat{\tau}_{k,2})$$

によって推定されたものである. このとき帰無仮説のもとで

$$\hat{Z}_n(t) \Rightarrow M(t) \quad (4.5)$$

に分布収束する. なお,  $M(t)$  は  $M(t) = (\sum_{1 \leq j \leq r} \tilde{B}_{(j)}^2(t))^{1/2}$  と定義されるものであり,  $(\tilde{B}_{(1)}(t), \tilde{B}_{(2)}(t), \dots, \tilde{B}_{(r)}(t))$  はパラメータの数  $r$  個と同じ数の独立な Brownian bridge である. なお, 推定するパラメータが  $d$  一つだけならば,  $M(t) = \tilde{B}(t)$  となり, 分布収束の先は Brownian bridge  $\tilde{B}(t) = B(t) - tB(1)$  になる. なおこの収束には細かい仮定が必要であるが,  $E|\varepsilon_t|^{4+\rho}$ ,  $(\rho > 0)$  と 4 次以上のモーメントの存在が必要であることを述べておく. また, この Brownian bridge  $\tilde{B}(t)$  は  $\mathcal{N}(0, t(1-t))$  の正規分布に従うことになる.

一方, Ling (2007) によって提案された CSS 推定に基づく検定は以下ようになる. 平均が 0 の ARFIMA( $p, d, q$ ) を考えると, すでにみた (2.7) 式から  $\varepsilon_t = \theta(B)^{-1}\phi(B)(1-B)^d y_t$  と表現することができる. そこで,  $y_t$  のうち観測期間の外にある部分は 0 とおいて  $y_t = 0$  ( $t \leq 0$ ) として  $\hat{\varepsilon}_t$  を計算して, これを利用するのである. つまり,

$$\hat{\varepsilon}_t = \theta(B)^{-1}\phi(B)(1-B)^d y_t, \quad (4.6)$$

とし, ただし,  $y_t = 0$  ( $t \leq 0$ ) とする. この時の Conditional Sum of Squares は, それぞれ

$$\tilde{L}_1 = -\frac{1}{2} \sum_{t=1}^k \hat{\varepsilon}_t^2, \quad \tilde{L}_2 = -\frac{1}{2} \sum_{t=k+1}^n \hat{\varepsilon}_t^2, \quad (4.7)$$

となる. そして各々から推定値  $\tilde{\tau}_1$  および  $\tilde{\tau}_2$  を得たとする. ここで  $-\hat{\varepsilon}_t^2/2$  の 1 階の微係数と 2 階の微係数から,

$$D_t(\tau) = \frac{\partial}{\partial \tau} \left( -\frac{1}{2} \hat{\varepsilon}_t^2 \right), \quad P_t(\tau) = -\frac{\partial^2}{\partial \tau^2} \left( -\frac{1}{2} \hat{\varepsilon}_t^2 \right),$$

を定義する. 対立仮説の下で推定された  $\tilde{\tau}_1$  および  $\tilde{\tau}_2$  を使って, 微係数の推定値を  $\hat{D}_t(\tilde{\tau}_1)$ ,  $\hat{D}_t(\tilde{\tau}_2)$ ,  $\hat{P}_t(\tilde{\tau}_1)$ ,  $\hat{P}_t(\tilde{\tau}_2)$  と求める. これらを使って,

$$\begin{aligned} \hat{\Sigma}_n(k) &= \sum_{t=1}^k \hat{P}_t(\tilde{\tau}_1) + \sum_{t=k+1}^n \hat{P}_t(\tilde{\tau}_2) \\ \hat{\Omega}_n(k) &= \sum_{t=1}^k \hat{D}_t(\tilde{\tau}_1) \hat{D}_t'(\tilde{\tau}_1) + \sum_{t=k+1}^n \hat{D}_t(\tilde{\tau}_2) \hat{D}_t'(\tilde{\tau}_2) \end{aligned}$$

を評価する. そこで Wald 検定統計量を対立仮説の下での  $\tilde{\tau}_1$  および  $\tilde{\tau}_2$  とそれらによって評価された  $\hat{\Sigma}_n(k)$  および  $\hat{\Omega}_n(k)$  を使って

$$W_n(k) = \frac{k(n-k)}{n^2} (\tilde{\tau}_1 - \tilde{\tau}_2)' \left[ \hat{\Sigma}_n(k) \hat{\Omega}_n(k)^{-1} \hat{\Sigma}_n(k) \right] (\tilde{\tau}_1 - \tilde{\tau}_2) \quad (4.8)$$

と評価する.

Ling (2007) では複合対立仮説 ( $r < k < n - r$ ) に対する検定を考えている. つまり, 変化点が未知の場合の検定を直接導いている. なお,  $r$  は未知パラメータの数である. そこで以下のように標準化された sup タイプの統計量

$$\hat{W}_n(r) = \max_{r < k < n-r} \frac{W_n(k) - b_n(r)}{a_n(r)} \quad (4.9)$$

を定義する. ただし,  $a_n(r) = \sqrt{b_n(r)/(2 \log \log n)}$ ,  $b_n(r) = [2 \log \log n + (r \log \log \log n)/2 - \log \Gamma(r/2)]^2 / (2 \log \log n)$  で  $\Gamma(\cdot)$  をガンマ関数とする. このとき Ling (2007, Theorem 2.1) は  $\{\varepsilon_t\}$  に near epoch dependence (NED) を仮定することで Darling-Erdős タイプの以下の極限定理が成り立つことを示している.

$$P[\hat{W}_n(r) < x] \longrightarrow \exp(-2e^{-x/2}) \text{ as } n \rightarrow \infty. \quad (4.10)$$

Horvath and Shao (1999) も Whittle 推定から得られた  $\hat{\tau}_1$  と  $\hat{\tau}_2$  を使って導かれた  $\hat{Z}_n(t)$  に関して,  $\max_{1 \leq k < n} |\hat{Z}_n(k/n)|$  について (4.10) と同様の極限定理を示している. これらの sup タイプの検定は変化点が未知の場合の検定になっている.

#### 4.2 2 標本の長記憶パラメータの比較の検定

Lavancier *et al.* (2010) は, 3.2.3 節で述べた Giraitis *et al.* (2003) の rescaled variance 検定 (V/S 検定) を用いることで, 同じ標本サイズの 2 つの標本間の長記憶パラメータを比較する検定を提案した. 3.2.3 節の V/S 検定統計量では,

$$V = \sum_{k=1}^n \left( \sum_{t=1}^k (y_t - \bar{y}) \right)^2 - \frac{1}{n} \left( \sum_{k=1}^n \sum_{t=1}^k (y_t - \bar{y}) \right)^2 \quad (4.11)$$

と長期分散の推定量  $\hat{s}_{1q}^2$  より V/S 検定統計量  $M_n$  を (3.18) の定義式から  $M_n = V/\hat{s}_q^2$  としていた.

そこで, まず 2 標本が独立の場合の 2 つの標本間の長記憶パラメータを比較する検定を考える. その場合には, 1 番目の標本のものを  $V_1/\hat{s}_{1,q}^2$ , 2 番目のものを  $V_2/\hat{s}_{2,q}^2$  とし, 検定統計量  $T_n$  を

$$T_n = \frac{V_1/\hat{s}_{1,q}^2}{V_2/\hat{s}_{2,q}^2} + \frac{V_2/\hat{s}_{2,q}^2}{V_1/\hat{s}_{1,q}^2}, \quad (4.12)$$

と定める. このとき Lavancier *et al.* (2010, Proposition 2.6) から帰無仮説および対立仮説で以下が成り立つ. まず, 帰無仮説  $d_1 = d_2 = d$  のとき,

$$T_n \Rightarrow T = \frac{U_1}{U_2} + \frac{U_1}{U_2}, \quad (4.13)$$

となる. ただし  $U_1$  と  $U_2$  は,

$$U_i = \int_0^1 \tilde{B}_i(t)^2 dt - \left( \int_0^1 \tilde{B}_i(t) dt \right)^2, \quad i = 1, 2,$$

と fractional Brownian bridge  $\tilde{B}_i(t)$  によって定義されるものとする. この fractional Brownian bridge は 2 変量 fractional Brownian motion  $(B_{d1}(t), B_{d2}(t))$  から得られるものである. ただし, ここでは, 2 標本は独立なのでこの場合の  $B_{d1}(t)$  と  $B_{d2}(t)$  の相関は 0 になる. 一方, 対立仮説  $d_1 \neq d_2$  の下では,

$$T_n \xrightarrow{p} \infty, \quad (4.14)$$

が成り立つ. したがって, 検定の一致性があることになる.

さらに, 2 つの標本に相関がある場合にも検定が構成できる. その場合には標本 1  $\{y_{1t}\}$  と標本 2  $\{y_{2t}\}$  の間の長期共分散 (long-run covariance) を  $\hat{s}_{12,q}^2$  とする. そのとき相関を取り除いた系列を

$$\tilde{y}_{1t} = y_{1t} - \frac{\hat{s}_{12,q}^2}{\hat{s}_{2,q}^2} y_{2t} \quad (4.15)$$

と作成し,  $\tilde{y}_{1t}$  を (4.11) に代入することで  $\tilde{V}_1$  を求める.  $\tilde{V}_1$  に用いる長期分散についても  $\tilde{s}_{1,q}^2 = \hat{s}_{1,q}^2 - \hat{s}_{12,q}^2 / \hat{s}_{2,q}^2$  と相関を取り除いた長期分散を作成する.  $\tilde{V}_1, \tilde{s}_{1,q}^2, V_2, \hat{s}_{2,q}^2$  を用いて, 検定統計量  $\tilde{T}_n$  を

$$\tilde{T}_n = \frac{\tilde{V}_1 / \tilde{s}_{1,q}^2}{V_2 / \hat{s}_{2,q}^2} + \frac{V_2 / \hat{s}_{2,q}^2}{\tilde{V}_1 / \tilde{s}_{1,q}^2}, \quad (4.16)$$

と構成する. Lavancier *et al.* (2010, Proposition 2.7) より, 帰無仮説  $d_1 = d_2$  の場合には  $\tilde{T}_n$  の極限分布は  $T_n$  の極限分布と同じように (4.13) で表わされる. 対立仮説の  $d_1 > d_2$  の時は  $\tilde{T}_n$  は発散するが, しかし,  $d_1 < d_2$  の時は  $\tilde{T}_n$  は定数に確率収束してしまう. したがって, 実際に使う場合には, 標本 1 と標本 2 を入れ換えた  $\tilde{T}_n$  も計算する必要があるであろう.

この検定では帰無仮説の下での分布が複雑であるのが難点であるだろう. そこで, Lavancier *et al.* (2010) では, モンテカルロ・シミュレーションによって分布を求めて, 5%点に対しては, 以下の近似式

$$t_{5\%} \approx 3.7d^2 + 8.6d + 5.2 \quad (4.17)$$

を提案している.

この検定の留意点としては, V/S 検定統計量を用いているので, 短記憶過程部分に対しては, パラメトリックな ARMA モデルを使う必要はなく長期分散を推定すれば良いことになる. なお, Lavancier *et al.* (2010) では長期分散の推定の際に必要なバンド幅  $q$  の選択は, Abadir *et al.* (2009) の方法を用いている. この点は, ARFIMA モデルによってパラメトリックにモデル化する必要のある Horvath (2001) および Ling (2007) とは違う点である. また, この検定は 2 標本のサイズが同じであることを仮定するので, この検定を変化点の検定に応用するならば, 2 標本の大きさが同じになるように長い方のデータの一部を切り捨てるなどして標本サイズを揃える必要があるだろう.

### 4.3 シミュレーション

ここでは前節までに取り上げた Whittle 推定値  $\hat{d}$  および CSS 推定値  $\tilde{d}$  を使った変化点の検定と Lavancier *et al.* (2010) による 2 標本の比較の検定 (LPS) の 3 つをシミュレーションによって比較してみることにする. ARFIMA(0,  $d$ , 0) を仮定してシミュレーション実験を行う. 標本サイズは  $n = 500$  と  $n = 1000$  とし,  $t = 0.5$  で変化があるかどうかを検定してみることにする. 変化前と変化後は独立な系列として発生させる. Lavancier *et al.* (2010) の検定での長期分散のバンド幅は ARFIMA(0,  $d$ , 0) を既知として  $q = 0$  を用いた.  $d_1 = 0.1$  を固定し,  $d_2$  を  $d_2 = 0.1$  (帰無仮説),  $d_2 = 0, 2, 0.3, 0.4$  (対立仮説) とする. 繰り返し数は 1000 回である. また, このケースでは  $d$  だけを推定する.  $d$  の最尤推定量の漸近分散は  $\pi^2/6$  とパラメータ  $d$  に依存しないことが分かっているので, これを用いることとする.

表8 ARFIMA(0,  $d$ , 0)( $d_1 = 0.1$ ) における変化点の検定のサイズと検出力.

$d_2$	$n = 500$			$n = 1000$		
	WH	CSS	LPS	WH	CSS	LPS
0.1	7.7	6.1	4.5	7.1	6.0	3.2
0.2	32.0	31.7	9.0	52.8	53.9	11.4
0.3	79.5	83.3	20.8	97.0	97.5	28.6
0.4	98.9	99.6	36.2	100.0	100.0	50.7

表4には検定のサイズと検出力が掲げている。表4では Whittle 推定値  $\hat{d}$  および CSS 推定値  $\tilde{d}$  を使った変化点の検定をそれぞれ WH および CSS と記し, Lavancier *et al.* (2010) による2標本の比較の検定を LPS と記してある。この結果によると, 2標本の比較の検定(LPS)の検出力は他の2つに比べて低いことが分かる。Whittle 推定と CSS 推定では ARFIMA(0,  $d$ , 0) とモデルが分かっているパラメトリックな検定であるので, ノンパラメトリックな検定である2標本の比較の検定(LPS)は他の2つより検出力が低くなるからと考えられる。表8のシミュレーションでは一つの標本サイズが250, 500なのに対し, Lavancier *et al.* (2010)のシミュレーションでは, 一つの標本サイズが1024と4096とかなり大きくとっているため, 2標本の比較の検定(LPS)の検出力が高くないことは整合的である。一方, Whittle 推定値を使った検定よりも, CSS 推定値を使った検定のほうが微妙に検出力が高いように見える。これは CSS 推定の方がやや精確に推定できているからと考えられる。なお, 本節では ARFIMA(0,  $d$ , 0) だけでシミュレーション実験を行った。3.4節のような AR 項あるいは MA 項を付加した場合の変化点の検定は, Ling (2007) および Yamaguchi (2010) でもシミュレーションは行われていない。ARMA モデルのような短記憶過程が含まれている場合にどうなるかは, 長期分散を使うだけで済むノンパラメトリックな Lavancier *et al.* (2010) の検定とも合わせ, 興味深い今後の研究課題と考えられる。

## 5. 結語

本稿では, 短記憶定常時系列  $I(0)$  を帰無仮説とし, 対立仮説を定常長記憶時系列  $I(d)$  ( $0 < d < 1/2$ ) とする長記憶性を検出する検定として, パラメトリックな検定と修正 R/S 統計量, KPSS 検定, V/S 検定の3つのノンパラメトリック検定, そして, Lobato-Robinson 検定を説明した。これらの検定をシミュレーションで比較したところ, ARFIMA(0,  $d$ , 0) の時系列であれば, 検出力の大きい順に, パラメトリックな LM 検定 > セミパラメトリックな Lobato-Robinson 検定 > 修正 R/S 統計量, KPSS 検定, V/S 検定の3つのノンパラメトリック検定となった。このことは, Shao and Wu (2007) の結果と整合的であるだろう。しかしながら,  $I(d)$  過程に短記憶定常過程も含まれた時系列であれば, 少し問題は複

雑になる。LM 検定および Lobato-Robinson 検定にサイズの歪みが生じる場合があるからである。そこでノンパラメトリックな検定にも有利な点が出てくる。とりわけ、KPSS 検定と V/S 検定は検定のサイズが安定的であるという点で有用であると考えられる。実現ボラティリティーの対数値に対して検定を行った際に、この利点が活かされた。さらに、パラメトリックな検定はモデルを特定化する必要があるが、セミパラメトリック・ノンパラメトリックの検定ではモデルの特定化が必要ないのも利点と言えよう。また、これらの検定を実現ボラティリティーの対数値に応用したところ長記憶性を持っていると判断された。

さらに、本稿では変化点の検定と 2 標本の長記憶パラメータの比較の検定を説明した。変化点の検定は Whittle 推定を使った検定と CSS 推定を使ったパラメトリックな検定である。一方、2 標本の長記憶パラメータの比較の検定は V/S 検定を応用したノンパラメトリックな検定である。この Lavancier *et al.* (2010) のノンパラメトリックな検定は、2 標本の大きさが同じという制約をもつものの、長期分散を推定すれば良い点、また、2 つの系列に相関がある場合にも使えるという利点がある。これらの検定を簡単な変化点の検定に応用しシミュレーション実験を行った。2 標本の長記憶パラメータの比較の検定を変化点の検定に応用すると検出力は他の 2 検定よりもやや低かった。それはこの検定がノンパラメトリックな検定であるためと考えられた。変化点の検定については最近も研究論文が出ているところであり、こうした分野については今後も研究の進展の可能性があると期待される。

## 謝辞

本稿は西埜 (2004) をベースとして、シミュレーションを行い、新たなトピックも加えて大幅に改稿したものである。また、2 名の査読者には最近の重要な研究についてご教示していただき、数々の貴重なコメントをいただいた。2 名の査読者と編集長には深くお礼を申し上げます。なお、本研究は、財団法人日本証券奨学財団および財団法人野村財団、そして科学研究費補助金基盤研究 (C) #21530194 の助成を受けたものである。記して感謝申し上げます。

## 参 考 文 献

- Abadir, K. M., Distaso, W. and Giraitis, L. (2007). Nonstationarity-extended local Whittle estimation, *J. Econom.*, **141**, 1353–1384.
- Abadir, K. M., Distaso, W. and Giraitis, L. (2009). Two estimators of the long-run variance: Beyond short memory, *J. Econom.*, **150**, 56–70.
- Anderson, T. W. and Darling, D. A. (1952). Theory of certain “Goodness of fit” criteria based on stochastic processes, *Ann. Math. Stat.*, **23**, 193–212.
- Andrews, D. W. K. (1991). Heteroskedasticity and Autocorrelation Consistent Covariance Matrix Estimation, *Econometrica*, **59**, 817–858.
- Bai, J. (1997). Estimation of a change point in multiple regression models, *Rev. Econ. Stat.*, **79**, 551–563.

- Beran, J. (1994). *Statistics for Long-Memory Processes*, Chapman & Hall, New York.
- Beran, J. and Terrin, N. (1996). Testing for a change of the long-memory parameter, *Biometrika*, **83**, 627–638.
- Breitung, J. and Hassler, U. (2002). Inference on the cointegration rank in fractionally integrated processes, *J. Econom.*, **110**, 167–185.
- Dickey, D. A. and Fuller, W. A. (1979). Distribution of the estimators for autoregressive time series with unit roots, *J. Am. Stat. Assoc.*, **74**, 427–431.
- Ding, Z., Granger, C. W. J. and Engle, R. F. (1993) A long memory property of stock market returns and a new model *Journal of Empirical Finance*, **1**, 83–106.
- Doornik, J. A. (2008). *Ox: Object Oriented Matrix Programming Language*, Timberlake Consultants Press: London.
- Doukhan, P., Oppenheim, G. and Taqqu, M. S. (eds.) (2003). *Long-Range Dependence: Theory and Applications*, Birkhauser, Boston.
- Giraitis, L., Kokoszka, P., Leipus, R. and Teyssiere, G. (2003). Rescaled variance and related tests for long memory in volatility and levels, *J. Econom.*, **112**, 265–294.
- Granger, C. W. J. and Joyeux, R. (1980). An introduction to long memory time series model and fractional differencing, *J. Time Ser. Anal.*, **1**, 15–39.
- Hansen, P. R. and Lunde, A. (2005). A Comparison of Volatility Models: Does Anything Beat a GARCH(1,1)?, *J. Appl. Econ.*, **20**, 873–889.
- Harris, D., McCabe, M. and Leybourne, S. (2008). Testing for long memory, *Econ. Theory*, **24**, 143–175.
- Hobijn, B., Franses, P. H. and Ooms, M. (2004). Generalizations of the KPSS-test for Stationarity, *Statistica Neerlandica*, **58**, 483–502.
- Horvath, L. (2001). Change-point detection in long-memory processes, *J. Multivar. Anal.*, **78**, 218–234.
- Horvath, L. and Shao, Q.-M. (1999). Limit theorems for quadratic forms with applications to Whittle's estimate, *Ann. Appl. Probab.*, **9**, 146–187.
- Hosking, R. M. J. (1981). Fractional differencing, *Biometrika*, **68**, 165–176.
- Hurvich, C. M. and Ray, B. K. (1995). Estimation of the memory parameter for nonstationary or noninvertible fractionally integrated processes, *J. Time Ser. Anal.*, **16**, 17–42.
- Kwiatkowski, D., Phillips, P. C. B., Schmidt, P. and Shin, Y. (1992). Testing the null hypothesis of stationarity against the alternative of a unit root, *J. Econom.*, **54**, 159–178.
- Lavancier, F., Philippe, A. and Surgailis, D. (2010). A two-sample test for comparison of long memory parameters, *J. Multivar. Anal.*, **101**, 2118–2136.
- Lee, H. S. and Amsler, C. (1997). Consistency of the KPSS unit root test against fractionally integrated alternative, *Econ. Lett.*, **55**, 151–160.
- Lee, D. and Schmidt, P. (1996). On the power of the KPSS test of stationarity against fractionally-integrated alternatives, *J. Econom.*, **73**, 285–302.
- Ling, S. (2007). Testing for change points in time series models and limiting theorems for NED sequences, *Ann. Stat.*, **35**, 1213–1237.
- Lo, A. W. (1991). Long-Term Memory in Stock Market Prices, *Econometrica*, **59**, 1279–1313.
- Lobato, I. N. and Robinson, P. M. (1998). A nonparametric test for  $I(0)$ , *Review of Economic Studies*, **65**, 475–495.
- Lobato, I. N. and Savin, N. E. (1998). Real and Spurious Long-Memory Properties of Stock-Market Data (with discussion), *J. Bus. Econ. Stat.*, **16**, 261–279.
- Marinucci, D. and Robinson, P. M. (1999). Alternative forms of fractional Brownian motion, *J. Stat. Plann. Inference*, **80**, 111–122.
- Newey, W. K. and West, K. D. (1994). Automatic Lag Selection in Covariance Matrix Estimation, *Review of Economic Studies*, **61**, 631–653.
- 西埜晴久 (2004). 「長記憶性をもつ時系列における検定」『千葉大学経済研究』**19**, 319–333.
- Palma, W. (2007). *Long-Memory Time Series: Theory and Methods*, Wiley: New York.

- Robinson, P. M. (1994). Tests of Nonstationary Hypotheses, *J. Am. Stat. Assoc.*, **89**, 1420-1437.
- Robinson, P. M. (1995). Gaussian semiparametric estimation of long range dependence, *Ann. Stat.*, **23**, 1630-1661.
- Robinson, P. M. (ed.) (2003). *Time Series with Long Memory*, Oxford, Oxford.
- Saikkonen, P. and Luukkonen, R. (1993). Testing for a moving average unit root in autoregressive integrated moving average models, *J. Am. Stat. Assoc.*, **88**, 596-601.
- Shao, X. (2010). Nonstationarity-extended Whittle estimation, *Econ. Theory*, **26**, 1060-1087.
- Shao, X. and Wu, W. B. (2007). Local asymptotic powers of nonparametric and semiparametric tests for fractional integration, *Stochastic Processes and their Applications*, **117**, 251-261.
- Shimotsu, K. and Phillips, P. C. B. (2005). Exact local Whittle estimation of fractional integration, *Ann. Stat.*, **33**, 1890-1933.
- Smirnov, N. (1948). Table for estimating the Goodness of fit of empirical distributions, *Ann. Math. Stat.*, **19**, 279-281.
- Sowell, F. (1990). The fractional unit root distribution, *Econometrica*, **58**, 495-505.
- Tanaka, K. (1996). *Time Series Analysis - Nonstationary and Noninvertible Distribution Theory*, Wiley, New York.
- Tanaka, K. (1999). The nonstationary fractional unit root, *Econ. Theory*, **15**, 549-582.
- Teyssiere, G. and Kirman, A. P. (eds.) (2007). *Long Memory in Economics*, Springer, New York.
- Velasco, C. (1999a). Gaussian semiparametric estimation of non-stationary time series, *J. Time Ser. Anal.*, **20**, 87-127.
- Velasco, C. (1999b). Non-stationary log-periodogram regression, *J. Econom.*, **91**, 325-371.
- Velasco, C. and Robinson, P. M. (2000). Whittle pseudo-maximum likelihood estimation for nonstationary time series, *J. Am. Stat. Assoc.*, **95**, 1229-1243.
- 渡部敏明 (2007). 「Realized Volatility サーベイと日本の株式市場への応用」『経済研究』**58**, 352-373.
- Watson, G. S. (1961). Goodness-of-fit tests on a circle, *Biometrika*, **48**, 109-114.
- 矢島美寛 (2003). 「長期記憶をもつ時系列モデル」, 竹内啓編, 『経済時系列の統計—その数理的方法』 岩波書店所収.
- Yamaguchi, K. (2010). Estimating a change point in the long memory parameter, Discussion papers, No. 2010-07, Graduate School of Economics, Hitotsubashi University.