

共和分分析に基づく予測とその応用

山本 拓*

Forecasting Based Upon Cointegration Analysis and Its Applications

Taku Yamamoto*

80 年代半ばより共和分分析は、経済分野における非定常時系列の分析手法として主要な役割を演じてきた。本稿は共和分過程の予測に関わる問題、特に予測精度の問題についてのレビューを行う。また応用例としては、生命表に基づく寿命の予測を取り上げ、共和分分析に基づく予測の有用性ならびに今後の課題を示す。

The cointegration analysis has been a major topic in time series analysis in the field of economics since the mid-1980s. This paper gives a brief review on issues associated with forecasting in a cointegrated process, in particular, with forecasting accuracy. As an application, it concerns with forecasting of mortality rate based upon the life table. It discusses merits and problems associated with forecasting based upon cointegration analysis.

キーワード: 共和分分析, 予測, トレンド, 寿命の予測, 生命表

1. はじめに

経済分野における時系列分析においては、1970 年代にデータの非定常性を考慮に入れる必要性が強く認識されるようになった。それは、Box and Jenkins (1970) の著作における 1 変量 ARIMA (autoregressive integrated moving average) モデルの予測力の高さが、データの階差を取ることによって、非定常性を簡単に処理できることを多くの実証例で示した影響だと思われる。同時に 1973 年の石油ショックによる大規模な構造変化によって、従来のマクロ計量経済モデルが無効になってしまったという事情も、時系列モデルの有用性が経済学の分野で認められることに影響した。階差をとることにより定常化することができる非定常性は和分 (integration) とも呼ばれる。非定常性に関しては、データの階差を取るべきか否かが重要な問題となったが、70 年代後半に Fuller (1976) や Dickey and Fuller (1979) が実用性の高い検定法 (すなわち、単位根検定法) を提案して、実証への道を開い

* 日本大学経済学部: 〒 101-8360 東京都千代田区三崎町 1-3-2 (E-mail: yamamoto.taku@nihon-u.ac.jp).

た。そして多くの経済データが、単位根を有している、すなわち非定常なデータであることが確認された。

しかし VAR (vector autoregressive) モデルのように、多変量の時系列データを同時に扱う場合には、それぞれのデータの階差を取ってから分析すれば良いという方法では非定常性は処理できない。その方法では、各データはやがて発散することを前提としていることになるためである。経済データは各変数は非定常である（単位根を持つ）が、変数同士は密接に関係付けられているという特性を持っている。このような特性を記述する共和分 (cointegration) という概念が、Granger (1981) さらには Engle and Granger (1987) によって紹介された。共和分とはいくつかの変数が共通の和分過程に従う性質を意味する（別の見方をすると、変数の線型結合が定常過程になることを意味する）。この概念の誕生は経済の時系列データ分析にとって極めて大きな影響を与え、その後 20 年くらいは経済時系列の研究の大部分は、共和分分析に関することであつたと言っても過言ではない。ここでは、共和分のランクの検定、さらには共和分過程における Granger の因果性の検定などの統計的推論に関心が寄せられ、様々な方向での一般化・精緻化が試みられた¹⁾。しかしながら私の知る限り、共和分過程についての予測に関する研究、特に共和分過程における様々な予測方法の予測精度についての比較研究は、極めて限られている²⁾。

そこで本稿では、共和分過程における予測についてのサーヴェイを行う。特に予測精度の評価を主たる論点とする。共和分過程を含む非定常の時系列データの予測では、定常な時系列の場合と異なり長期予測は過程の平均に速やかに収束することはないので、長期予測が重要な意味を持つことになることが大きな特徴である。本稿でも長期予測についての特徴に主眼がおかれる³⁾。特に (1) 予測に共和分の制約を課することが予測精度の向上に有効か否か、(2) トレンドが存在する共和分過程の予測において、どのような意味でトレンド項が重要な働きを持つか、(3) 共和分過程の次元が高く、標本期間が短い時に、共和分のランクを求めるには実用的にはどのように処理すればよいか、というような論点を取り上げていく。

本稿の構成は以下の通りである。第 2 節において、共和分過程における基本的モデル、ならびにそれに基づく予測、そして本稿で用いられる予測精度の尺度を紹介する。第 3 節においては、共和分分析に基づく予測に関するこれまでの主要な研究結果を整理する。第 4 節では、応用として生命表に基づく寿命の予測を紹介する。ここでは高次元の共和分過

1) これらについての、2005 年ころまでの経済分野における時系列分析の展望は、山本 (2006) を参照されたい。共和分分析についての丁寧な理論的解説は、Johansen (1995) を参照されたい。

2) 予測精度の比較は行われていないが、非定常過程における予測量の特徴を扱った重要な論文として Phillips (1998) と Elliott (2006) をあげておく。

3) 近年の研究についてのサーヴェイは、筆者がこの数年東北大学の千木良弘氏と進めている研究に基づいている。

程の予測をどのように扱うかについての実用的試みが示される。第5節では、まとめを述べる。

2. モデル, 予測, 予測精度の基準

本節では、まず共和分モデル、そのモデルに基づく予測、そして予測精度の基準を紹介する。

2.1 共和分モデル

最も一般的な m 変量の共和分モデルは以下のような無限次元のベクトル移動平均モデル (vector moving-average: VMA) モデルとして与えられる。

$$(1 - L)y_t = \mu + C(L)\varepsilon_t = \mu + \sum_{i=0}^{\infty} C_i \varepsilon_{t-i} \quad (2.1)$$

ここで、 L はラグ・オペレーター、 $y_t = [y_{1t}, y_{2t}, \dots, y_{mt}]'$ 、 μ は定数項ベクトル、 C_i は $m \times m$ 係数行列で、 $\{sC_s\}_{s=0}^{\infty}$ は絶対和可能であるとする。 ε_t は $(m \times 1)$ iid(0, Σ) で有限の4次モーメントが存在する攪乱項である。共和分ランクは r であるとする。すなわち、 β を $m \times r$ の共和分行列とすると、 $\beta' C(1) = 0$ が成立する (これが、 $\{y_t\}$ の確率的部分が共和分制約を満たすことの数学的表現の一つである)。なお上記の階差モデルにおける定数項 μ はドリフト項とも呼ばれ、モデルをレベルで表記する際には線型トレンドの係数ベクトルとなる。トレンドという表現の方が一般になじみがあるので、本稿ではこれ以降、 μ を (一部を除いて) “トレンド項” と呼ぶことにする。

共和分を持つデータの具体例としては、図1に示されている日本人男性の死亡率の対数値を参照されたい。これは1947年から2009年までの、0歳から109歳までについての生命表からのデータをプロットしたものであり、各線は各年齢における死亡率 (対数値) の変化を示している (データは、Mortality Data Base より得た)。この図より明らかなように、各年齢の死亡率は下方のトレンドを持ち、似たような変動をしている。この似たような変動は共和分を表わしていると考えることができる。以下の第4節では、このデータの一部についての共和分分析に基づく予測を応用としてとりあげる。

2.2 h 期先予測についての基本的結果

ここでは、共和分モデルに基づく予測の基本的結果を紹介する。 T 期までの観測値が与えられたとした時、 h 期先、すなわち $T + h$ 期の y_{T+h} のモデルは以下のように表すことができる。

$$y_{T+h} = h\mu + \sum_{t=1}^h \sum_{j=0}^{h-t} C_j \varepsilon_{T+t} + y_T + \sum_{t=1}^T \sum_{j=1}^h C_{T-t+j} \varepsilon_t \quad (2.2)$$

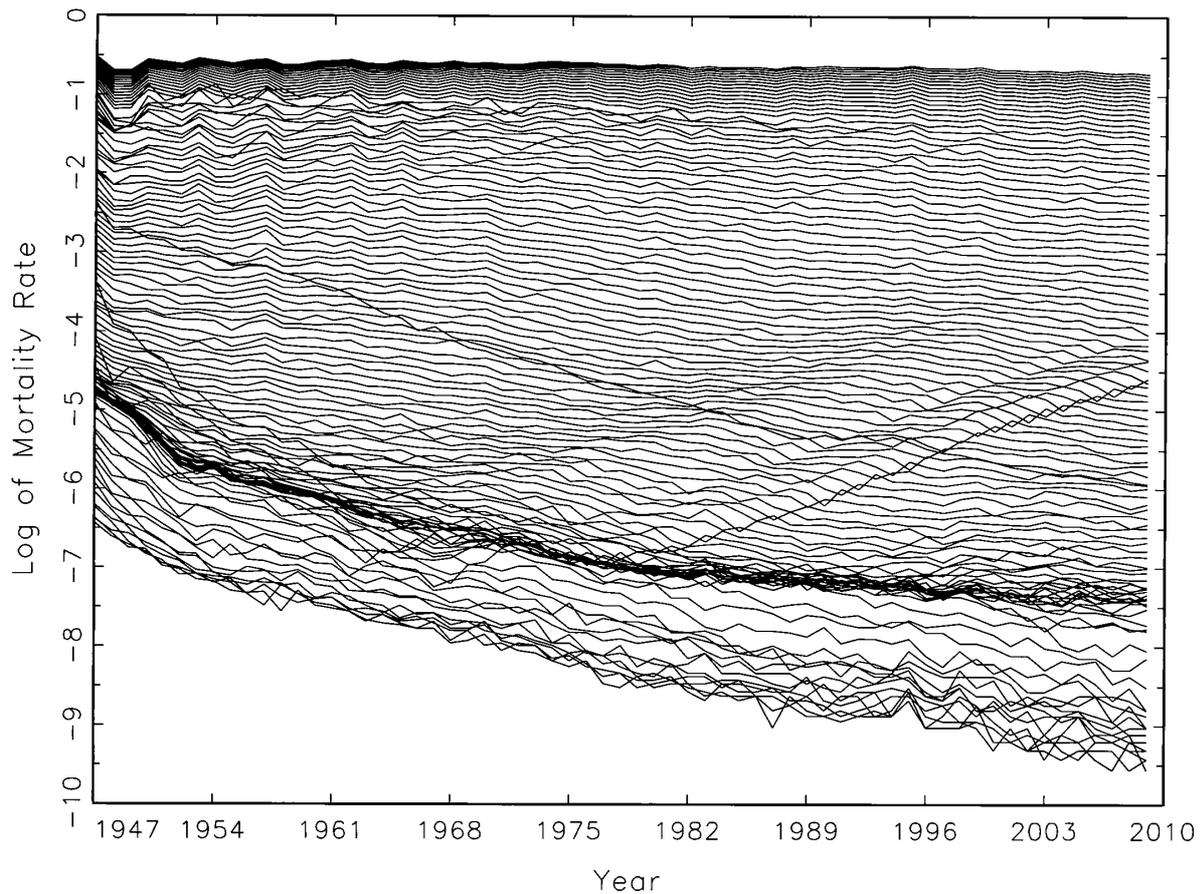


図1 日本人男性の死亡率の対数値 (0歳から109歳)

ここで、上記の右辺の第2項は、時点 T においては未知である将来の誤差のみから成り立っている。したがって、モデルに基づいた最適予測 または最小2乗予測は、上記のモデルより第2項を除いて以下のように与えられる。この予測はモデルについての情報を全て用いているという意味で、以下ではこれを「システム予測」と呼び、 \hat{y}_{T+h}^{SYS} と表すことにする。なお本節の議論では、モデルのトレンド項や係数パラメーターはすべて既知であると想定としている。

$$\hat{y}_{T+h}^{SYS} = h\mu + y_T + \sum_{t=1}^T \sum_{j=1}^h C_{T-t+j} \varepsilon_t \quad (2.3)$$

システム予測の予測誤差 \hat{e}_{T+h}^{SYS} は、対応してモデル (2.2) の右辺の第2項で与えられる。

$$\hat{e}_{T+h}^{SYS} = y_{T+h} - \hat{y}_{T+h}^{SYS} = \sum_{t=1}^h \sum_{j=0}^{h-t} C_j \varepsilon_{T+t} \quad (2.4)$$

この予測誤差が、本論文での予測評価の基準となる。 \hat{e}_{T+h}^{SYS} の平均平方誤差 (Mean Squared Error: MSE) のトレースは予測期間 h が大きくなるにしたがって、予測期間 h のオーダーで発散することが知られている。すなわち、

$$\text{tr MSE}(\hat{e}_{T+h}^{SYS}) \equiv \text{tr}(E(\hat{e}_{T+h}^{SYS} \hat{e}_{T+h}^{SYS'})) = O(h) \quad (2.5)$$

これは、非定常なモデルに基づいた予測の一般的な性質であり、定常なモデルからの予測とは対照的な結果である（定常の場合は、予測誤差の MSE は予測期間が長くなると一定の値に収束することは良く知られている）。

しかしながら、共和分モデルの係数行列については、以下の興味深い結果が知られている。

$$\lim_{h \rightarrow \infty} \sum_{j=0}^{T+h-i} C_j = C(1), \quad (2.6)$$

この性質より、長期のシステム予測については共和分制約が満たされることとなり、以下が成立する（Engle and Yoo (1987) 参照）⁴⁾。

$$\lim_{h \rightarrow \infty} \beta' \{ \hat{y}_{T+h}^{SYS} - (h\mu + y_T) \} = 0 \quad (2.7)$$

上記 (2.7) の結果より、非定常過程であっても共和分モデルからのシステム予測の場合は、 $\beta' \hat{e}_{T+h}^{SYS}$ は定常となり、したがって $\beta' \hat{e}_{T+h}^{SYS}$ の MSE のトレースは、長期予測でも発散しないことになる。

$$\lim_{h \rightarrow \infty} \text{tr MSE}(\beta' \hat{e}_{T+h}^{SYS}) = \beta' Q \beta < \infty$$

ここで、 Q は対応する定数行列である。この結果は、共和分制約を満たした予測が長期において優れた性質をもたらすのではないか、という期待あるいは想像を与えた。この期待が次節で明らかにされるように、初期の研究にミスリーディングな影響を与えることとなった。

2.3 予測精度比較の基準について

予測誤差を評価するにあたっては様々な基準があるが⁵⁾、本論文では最も広く用いられている MSE 行列のトレースで予測精度を評価する。すなわち、予測法 A に基づく予測 \hat{y}_{T+h}^A の予測誤差を $\hat{e}^A = y_{T+h} - \hat{y}_{T+h}^A$ とすると、予測誤差の MSE 行列のトレースは以下で定義される。

$$\text{tr MSE}(\hat{e}^A) = \text{tr}(E(\hat{e}_{T+h}^A \hat{e}_{T+h}^{A'}))$$

2つの予測法を比較する場合は、以下のような“tr MSE 比”で行う。

$$\frac{\text{tr MSE}(\hat{e}_{T+h}^A)}{\text{tr MSE}(\hat{e}_{T+h}^B)}$$

ここで、 \hat{e}_{T+h}^B は予測法 B による予測誤差である。

3. 過去の主要な結果

本節では、共和分過程からの予測（特に長期予測）の予測精度の比較研究についての簡単なサーヴェイを行う。

4) なおここでは、トレンド項に関しては必ずしも共和分制約は満たされていないと想定している。すなわち、 $\beta' \mu \neq 0$ である。

5) 種々の予測基準については、例えば、Christoffersen and Diebold (1998) を参照されたい。

3.1 長期予測に関する実験的結果

ここでは、この分野での最初の研究である、Engle and Yoo (1987) の実験結果を簡単に説明する。彼らは共和分モデル (2.1) の特殊例として、2 変量の簡単な VEC (vector error correction) モデルを考えた。

$$\Delta y_t = \alpha \beta' y_{t-1} + m + \varepsilon_t \quad (3.1)$$

ここで、 α は 2×1 の調整ベクトル、 m は 2×1 の定数項ベクトルである。VEC モデルは、多変量共和分の現実的な (すなわち、推定可能な) モデルであり、共和分制約を満たしている。このモデルは、以下のように、VAR モデルとして書き直すことができる。この VAR モデルは、共和分制約は満たしていない。

$$y_t = A y_{t-1} + m + \varepsilon_t$$

ここで、 $A = I_2 + \alpha \beta'$ である。

上記 2 種のモデルについて、Engle and Yoo (1987) は、VEC モデルについては Engle and Granger (1987) の 2 段階法で推定し (この方法に基づく予測はシステム予測となる)、VAR モデルについては無制約で推定し、実験的に 20 期先までの予測期間について予測精度を比較した。そして、予測期間が h が長くなるにしたがって、tr MSE 比

$$\frac{\text{tr MSE}(\hat{e}_{T+h}^{VAR})}{\text{tr MSE}(\hat{e}_{T+h}^{VEC})} \quad (3.2)$$

が、1 を超えてどんどん増大していくことを確認した。これより、Engle and Yoo (1987) は長期の予測において、共和分制約は予測精度の向上に有効である、との結論を導いた。この結果は、Lin and Tsay (1996) などの実験的結果によっても支持された。

3.2 長期予測についての理論的および実験的結果

しかし、上記の結論は Christoffersen and Diebold (1998) によって理論的に否定されることになる。彼らは VEC モデルを想定し、システム予測と 1 変量 ARIMA 予測の比較を行った。 a 番目の系列の 1 変量 ARIMA モデルは以下のように表すことができる (例えば、Granger and Morris (1976) 参照)。

$$(1 - L)y_{a,t} = \mu_a + \sum_{i=0}^{\infty} \theta_{a,i} u_{a,t-i}, \quad (3.3)$$

ここで、 $\{u_{a,t-i}\}$ は系列的に相関のない攪乱項であり、 $\theta_{a,i}$ は対応するパラメーターである。このモデルに基づく各系列の h 期先の予測は以下で与えられる。

$$\begin{aligned} \hat{y}_{a,T+h}^{ARIMA} &= h\mu_a + y_{a,T} + \left(\sum_{j=1}^h \theta_{a,j} \right) u_{a,T} + \left(\sum_{j=2}^{h+1} \theta_{a,j} \right) u_{a,T-1} + \cdots \\ &= h\mu_a + y_{a,T} + \theta_a(L)u_{a,T} \quad (a = 1, 2, \dots, m) \quad (\text{と書く}) \end{aligned}$$

m 系列を以下のようにまとめて、ベクトルとして表すことができる。

$$\hat{y}_{T+h}^{ARIMA} = h\mu + y_T + \Theta(L)u_T \quad (3.4)$$

この予測は和分制約は満たしているが、当然のことながら共和分制約は満たしていない。

1 変量 ARIMA モデルに基づく予測 \hat{y}_{T+h}^{ARIMA} の予測誤差ベクトルを

$$\hat{e}_{T+h}^{ARIMA} = y_{T+h} - \hat{y}_{T+h}^{ARIMA} \quad (3.5)$$

として表すと、Christoffersen and Diebold (1998) は理論的に以下の結果を示した。

命題 3.1

$$\lim_{h \rightarrow \infty} \frac{\text{tr MSE}(\hat{e}_{t+h}^{ARIMA})}{\text{tr MSE}(\hat{e}_{t+h}^{VEC})} = 1 \quad (3.6)$$

この結果より、彼らは長期予測の精度には、和分制約が重要であり共和分制約は重要ではない、という結論を導いた。これは、モデルのパラメーターが既知とした場合の理論的結果であるが、彼らは実験（パラメーターを推定した場合）においても同様な結果を得ている。ただし、彼らの論文では、トレンド項は常に既知として扱っており、トレンド項の存在が予測に与える影響は全く考えていない。次項では、その影響について考える。

3.3 トレンド項の長期予測への影響

Chigira and Yamamoto (2012) は、長期予測におけるトレンド項の影響を明示的に議論した。

(a) モデルのパラメーターが既知の場合

ここでは、モデルの確率的な定式化を完全に無視した以下のような、定式化を誤った (misspecified) モデルに基づく予測, \hat{y}_{t+h}^{MISS} , を考える。ただしここでは、トレンド項 μ は正確に把握されていると想定している。

$$\hat{y}_{T+h}^{MISS} = \mu h + y_T + v_{T+h} \quad (3.7)$$

ここで、 v_{T+h} は $m \times 1$ の確率的ベクトルで、 T 時点での変数に依存している可能性はあるが、重要なことは $\text{tr } E(v_{T+h}v_{T+h}') = O(1)$ という性質を持つことのみが想定されていることである。Chigira and Yamamoto (2012) は以下を示した。

命題 3.2

$$\lim_{h \rightarrow \infty} \frac{\text{tr MSE}(\hat{e}_{T+h}^{MISS})}{\text{tr MSE}(\hat{e}_{T+h}^{SYS})} = 1 \quad (3.8)$$

これは、上記の命題 3.1 より、さらに強い結果を意味している。すなわち、トレンド μh が正確に把握されているかぎり、長期予測に関しては、和分制約も共和分制約も予測精度

の向上に有用ではないことを示している。トレンドさえ正しく予測できていれば、確率的な部分は、適当な予測を行っても長期的には全く影響がないということである。これは、先に紹介した Engle and Yoo (1987) などの実験的結果からもたらされた共和分制約の有用性についての推測を完全に否定するもので、Cristoffersen and Diebold (1998) よりさらに強い理論的結論である⁶⁾。

(b) モデルのパラメーターを推定する場合

実際の予測においては、モデルのパラメーターが既知という状況は非現実的なので、これらを推定する場合の予測への影響を考える必要がある。ここで、ある推定法 A を用いた時のモデル (2.1) のパラメーター μ と C_i ($i = 0, 1, \dots$) の推定量を $\hat{\mu}^A$ と \hat{C}_i^A ($i = 0, 1, \dots$) とする。この時、 $\hat{\mu}^A$ は μ の一致推定量で $\text{Var}(\hat{\mu}^A) = O(1/T)$ であるとする。一方、推定量 \hat{C}_i^A ($i = 0, 1, \dots$) については必ずしも C_i ($i = 0, 1, \dots$) の一致推定量である必要はないが、 $\text{tr MSE}[\hat{C}_i^A - C_i] = O(1)$ であるとする。

これらの推定量を用いた h 期先の予測量は、以下のように与えられる。

$$\hat{y}_{T+h}^A = h\hat{\mu}^A + y_T + \sum_{t=1}^T \sum_{j=1}^h \hat{C}_{T-i-j}^A \varepsilon_i$$

その予測誤差は、以下で与えられる。

$$\begin{aligned} \hat{e}_{T+h}^A = y_{T+h} - \hat{y}_{T+h}^A &= \underbrace{(\mu - \hat{\mu}^A)h}_P \underbrace{\sum_{t=1}^h \sum_{j=0}^{h-t} C_j \varepsilon_{T+t}}_Q + \underbrace{\sum_{t=1}^T \sum_{j=1}^h (C_{T-t+j} - \hat{C}_{T-t+j}^A) \varepsilon_t}_R \\ &= P + Q + R \end{aligned} \quad (3.9)$$

標本期間 T を与えられたものとして、予測期間 h が大きくなる状況においては、以下の結果が成立する。

$$E[PP'] = \text{MSE}[\hat{\mu}^A]h^2 = O(h^2),$$

$$E[QQ'] = E[RR'] = O(h), \quad \text{そして}$$

$$E[PR'] = o(h)$$

このように、(3.9) において右辺の第 1 項、 $P = (\mu - \hat{\mu}^A)h$ の MSE が、 h に関して最も高いオーダーである。したがって予測期間 h が大きくなると、予測誤差 \hat{e}_{T+h}^A の MSE のトレースを h^2 で除したものは、 P 以外の項は無視できることになり、以下のように与えられる。

$$\text{tr MSE}(e_{T+h}^A)/h^2 \equiv \text{tr}(E(\hat{e}_{T+h}^A \hat{e}_{T+h}^{A'}))/h^2 \approx \text{MSE}[\hat{\mu}^A]$$

⁶⁾ 長期予測に関して、Engle and Yoo (1987) のようなミスリーディングな実験結果がなぜ生じたかについての解釈は、Chigira and Yamamoto (2012, p. 358) を参照されたい。

ゆえに、以下が成り立つ。

命題 3.3 $\hat{\mu}^A$ と $\hat{\mu}^B$ を推定法 A と推定法 B に基づくトレンド項 μ の一致推定量とする。対応して \hat{e}_{T+h}^A と \hat{e}_{T+h}^B をそれぞれの h 期先予測の予測誤差とすると、以下が成立する。

$$\lim_{h \rightarrow \infty} \frac{\text{tr MSE}(\hat{e}_{T+h}^A)}{\text{tr MSE}(\hat{e}_{T+h}^B)} = \frac{\text{tr MSE}[\hat{\mu}^A]}{\text{tr MSE}[\hat{\mu}^B]} = \text{定数}$$

この命題は、長期予測ではトレンド項の推定量の精度のみが重要であり、モデル推定の際に共和分制約や和分制約が満たれているかどうかは全く影響がない、ということの意味している。また相対的な長期予測の精度は、0 に収束したり発散したりせずに、定数に収束することになる。一致推定量が用いられている場合には、予測精度に大きな差は生じないことになる。

3.4 短期・中期予測（実験的結果）

ここで、短期とは 1 期から 5 期先程度、中期とは 6 期から 20 期先程度のことを意味している。これらの予測については、長期予測のような理論的結果を導くことは難しいので、実験的結果に依存するしかない。

Chigira and Yamamoto (2012) 等の最近の実験的な結果によると、短期・中期の予測においては、共和分制約を取り入れたモデル（例えば、VEC モデル）からの予測が、そうでないモデルからの予測よりも優れていることが示されている。実はこの評価は、Engle and Yoo (1987) 等の初期の実験結果とは必ずしも整合的ではない。これは初期の結果は、共和分のモデルへの取り入れ方が Engle and Granger (1987) の 2 段階推定法を用いているのに対し、最近の結果は、Johansen (1991) による VEC モデルについての最尤法を用いているためだと思われる。すなわち、初期の実験ではモデル推定の精度が悪かったため、共和分制約を取り入れたモデルの短期・中期的予測があまり良い精度を示さなかったためであると考えることができる。

3.5 本節のまとめ

共和分過程についての予測に関して、現時点における評価は以下のようにまとめられる。

(1) 長期予測に関して、パラメーターが既知の場合、トレンドさえ正しく予測できれば、他の要因（モデルの確率的要因の正しい定式化、あるいは共和分制約など）は予測の精度には影響しないことが理論的に示されている。（ここで長期とは、理論的には予測期間 h を非常に大きく（無限大に）したという極限的な状況のことである。また実験的においては、予測期間を 30 期以上先にした状況を想定している。）

(2) 長期予測に関して、パラメーターを推定する場合、トレンド項の推定の精度によって、予測の優劣が決定されることが理論的に示されている。（やはりモデルの確率的要因の

正しい定式化, 共和分制約などは影響がない。) 以上の2つの結果は, 実験によっても検証されている。

(3) 短期予測および中期予測に関しては, 近年の実験に基づく結果によると, 共和分制約等の制約を取り込んだ正しい定式化に基づくモデルが, より優れた予測精度をもたらすことが示されている。

4. 共和分分析に基づく予測の応用

本節では, 現在進行中である千木良・山本 (2013) の研究の一部を紹介して⁷⁾, 共和分分析に基づく予測の有用性ならびに課題を明らかにする。

4.1 生命表に基づく死亡率モデル

ここでは, 人口統計学の分野で用いられている生命表に基づく寿命の予測に対する応用を考える。具体的には, 先に図1で示したような生命表のデータについての予測を考えている。同図から読み取れるように, 各年齢での対数死亡率は右下がりのトレンドを持ち, その変動はかなり似通っており, 共和分過程を想定することは適当と考えられる。また寿命の予測は, 年金や社会保障政策の観点から長期の予測が重要な問題となっている⁸⁾。

時系列データがトレンドを持ち, かつ長期の予測が重要という意味で, 生命表に基づく寿命の予測は前節で議論した共和分モデルからの予測の重要なポイントが含まれており, 格好の分析対象となっている。なお Bell (1997) や Darkiewicz and Hoedemakers (2004) 等も共和分モデルが生命表の記述に適切であろうとの指摘をしている⁹⁾。ここでは, まず高次元の共和分過程における予測を行うための実際的な方法を紹介し, その後に生命表に基づく予測のベンチ・マークとして知られている Lee and Carter (1992) 法との比較を行う。

共和分モデルとしては, 基本的にモデル (1) を考えるわけであるが, 生命表における t 年の a 歳の人の死亡率を w_{at} ($a = 1, 2, \dots, m, t = 1, 2, \dots, T$) とすると, 実際の分析の際にはその対数を取り, $y_{at} = \log(w_{at})$ について考えることになる。

7) 千木良弘朗氏には, 進行中の共同研究の一部をここで取り上げることを許可していただいたことに対して, 深く感謝する。千木良・山本 (2013) では, 本稿の以下で取り上げる Lee and Carter (1992) 法を時系列理論の枠組みの中で厳密に評価し, 代替案として以下で紹介する MTV 法とその修正案を各種提案し, 予測精度の比較を行っている。

8) 生命表に基づく統計分析のサーヴェイならびにリスクの評価については, 例えば, 木暮・長谷川 (2008) を参照されたい。

9) 実際, Arlt *et al.* (2010) や Carter (2010) では属性の異なる (例えば, 男性と女性の) 死亡率データに共和分を想定し予測の向上を図っている。しかし, ここで紹介するような高次元の本格的な共和分過程を扱っているわけではない。

4.2 MTV 法

ここでは、生命表に基づくモデルを考えるので、 m がかなり大きい高次元のモデルを考えることになるので、通常の VEC モデルの推定を考えることは、標本数に比して推定すべきパラメーターの数が大き過ぎて不可能な場合もある。そこで以下で説明する MTV (multivariate time series variance component) 法の適用を考える。MTV 法はもともと Kariya (1987) により提案された方法であるが、ここで説明する方法は Chigira and Yamamoto (2009) が共和分過程に対応するように修正したものである。

それは以下のステップから成り立っている。

- (i) まずデータから定数項と線型トレンドを除く。

$$\tilde{y}_t = y_t - \hat{\gamma} - \hat{\mu}_{\text{trend}} t$$

ここで $\hat{\gamma}$ と $\hat{\mu}_{\text{trend}}$ は OLS 推定値である。

- (ii) $\{\tilde{y}_t\}$ に対して特異値分解を行い、固有ベクトルを以下の 2 グループに分割する。

$$B_{(m-r)} = \begin{bmatrix} b_1 & \dots & b_{m-r} \end{bmatrix} \quad B_{(r)} = \begin{bmatrix} b_{m-r+1} & \dots & b_m \end{bmatrix}$$

ここで b_1, \dots, b_m は、固有値 $\pi_1 \geq \dots \geq \pi_m$ に対応する固有ベクトルであり、主成分について以下の分割が可能となる。

$$\begin{cases} B'_{(m-r)} \tilde{y}_t \approx I(1) & \text{非定常な主成分} \\ B'_{(r)} \tilde{y}_t \approx I(0) & \text{定常な主成分} \end{cases} \quad (4.1)$$

このように非定常な主成分と定常な主成分に分けることは、共和分のランクの推定を意味する。具体的な方法は、以下の 4.4 項を参照されたい。

- (iii) 第 1 番目から $(m-r)$ 番目の主成分 $B'_{(m-r)} \tilde{y}_{T+h}$ については、それぞれ ARIMA($p, 1, q$) モデルを当てはめて予測を行い、その予測を $\widehat{B'_{(m-r)} \tilde{y}_{T+h}}$ とする。一方、第 $(m-r+1)$ 番目から m 番目の主成分 $B'_{(r)} \tilde{y}_{T+h}$ については、それぞれ ARMA(p, q) モデルを当てはめて予測を行い、その予測を $\widehat{B'_{(r)} \tilde{y}_{T+h}}$ とする。

- (iv) 上の結果に左から $[B_{(m-r)}, B_{(r)}]$ を掛けて、 \tilde{y}_{T+h} についての予測値を得る。

- (v) 最終的に、定数項とトレンド項を足して、 y_{T+h} についての予測値を得る。

$$\hat{y}_{T+h}^{MTV} = (T+h)\hat{\mu}_{\text{trend}} + \hat{\gamma} + B_{(m-r)} \widehat{B'_{(m-r)} \tilde{y}_{T+h}} + B_{(r)} \widehat{B'_{(r)} \tilde{y}_{T+h}} \quad (4.2)$$

MTV 法の長所は以下の 2 点である。(1) 推定すべきパラメーターの数が、モデルの次元 m に従って $O(m)$ のオーダーでしか増えない。(通常の VEC モデルの場合はパラメーター数が $O(m^2)$ のオーダーで増える。したがって、標本期間 T が短い時は、推定量の精度が著

しく悪くなる。また場合によっては、自由度の関係で推定が不可能となる。) (2) MTV 法による予測は、共和分制約を満たしている。

MTV 法の短所は、以下の点である。(1) 以下で説明する Lee-Carter 法に比べると、かなり複雑である。(2) 予測の信頼区間を求めることは容易ではない。

4.3 Lee-Carter 法

Lee and Carter (1992) (LC) 法は、生命表に基づく死亡率の予測に関してはベンチ・マークと見なされて、広く用いられている代表的な方法である。

この方法は以下のステップから成り立っている。

(i) データを平均周りの偏差に加工する。

$$\tilde{y}_t = y_t - \bar{y}$$

ここで、 $\bar{y} = \sum_{t=1}^T y_t / T$ である。

(ii) $\{\tilde{y}_t\}$ に特異値分解を行い、第 1 番目の固有ベクトルを f_1 とする。第 1 主成分を $\{x_{1t}\}$ とする。

$$x_{1t} = f_1' \tilde{y}_t \quad (t = 1, 2, \dots, T)$$

MTV 法とは異なり、 $\{\tilde{y}_t\}$ にはトレンドが残っていることが特徴である。したがって $\{x_{1t}\}$ にもトレンドが残っている。

(iii) $\{x_{1t}\}$ に対して、ドリフト付きのランダムウォーク・モデルを想定する。

$$x_{1t} = \alpha + x_{1,t-1} + u_t \quad (4.3)$$

第 1 主成分が、このようなドリフト付きランダムウォーク・モデルに従うということが、Lee and Carter (1992) が生命表データについて想定したデータ発生メカニズム (data generation process: DGP) である。

(iv) ドリフト項は、 $\{x_{1t} = f_1' \tilde{y}_t\}$ の階差平均で推定する。

$$\hat{\alpha} = \frac{1}{T-1} \sum_{t=2}^T \Delta x_{1t} = \frac{1}{T-1} \sum_{t=2}^T f_1' \Delta \tilde{y}_t = f_1' \overline{\Delta y}$$

(v) x_{1t} の h 期先の予測は、以下で与えられる。

$$\hat{x}_{1,T+h} = \hat{\alpha} h + x_{1,T} = f_1' \overline{\Delta y} h + f_1' \tilde{y}_T$$

(vi) y_t の h 期先予測は、上記に第 1 固有ベクトル f_1 を掛けてベクトルに戻し、さらに

平均を足して以下のように求める.

$$\begin{aligned}\hat{y}_{T+h}^{LC} &= f_1 \hat{x}_{1,T+h} + \bar{y} \\ &= f_1(\hat{\alpha}h + x_{1,T}) + \bar{y} \\ &= f_1(f_1' \overline{\Delta y} h + f_1' \tilde{y}_T) + \bar{y} \\ &= f_1 f_1' \overline{\Delta y} h + y_T^{LC}\end{aligned}$$

ここで, $y_T^{LC} = f_1 f_1' \tilde{y}_T + \bar{y}$ は, LC 法の予測の出発値である. (これが, 時系列分析にもとづく出発値 y_T と異なることが, 以下で説明するようにこの方法の大きな問題点である.)

LC 法の長期予測の特徴は, 漸近的に以下のように与えられる (千木良・山本 (2013, 命題 2) 参照).

$$\begin{aligned}\hat{y}_{T+h}^{LC} &= f_1 f_1' \overline{\Delta y} h + y_T^{LC} \\ &\approx \mu h + y_T^{LC}\end{aligned}$$

ここで, “ \approx ” は T が大きいときの漸近的な成立を意味する. すなわち, $f_1 f_1' \overline{\Delta y}$ はトレンド項 μ の一致推定量となっている. したがって, 前節の結果より, 長期予測に関してはそれなりの精度を持つと期待される.

LC 法の長所は, 以下の 4 点である. (1) トレンド項 μ については一致推定量を与えている. ゆえに, 長期予測についてはある程度の望ましい性質を持っている. (2) 非常に簡単な方法である. すなわち, 推定するパラメーターは, 第 1 主成分のランダムウォーク・モデル (4.3) のドリフト (トレンド) 項のみであり, 上記のステップ (iv) のように階差データの平均として簡単に求められる. (3) もし第 1 主成分のランダムウォーク・モデル (4.3) が正しいとすると (この想定については, 時系列分析の立場からは疑問が残るが), 予測の信頼区間を簡単に求めることができる.

LC 法は第 1 主成分しか用いていないので, かなりの情報ロスが生じていることは自明である (Girosi and King (2007) 参照). 結果として LC 法の短所は, 以下のようにまとめられる. (1) 予測の出発値 y_T^{LC} が, 時系列分析が示唆する出発値 y_T からズレている. さらに, 標本期間 T が増大すると共に, 出発値のズレが増大し, 短期予測の精度の悪化を招くことになる. 通常の場合は, 標本期間が増大すると, 推定・予測の精度は向上するが, これは LC 法固有の極めて特殊な弱点である. (2) トレンド項の推定量は, 一致性を持つが, 必ずしも効率的ではない (千木良・山本 (2013, 命題 3 参照)). (3) 予測は共和分制約を満たさない. (これは, LC 法は, データ $\{y_t\}$ からトレンドを除かずに主成分分析を行っているために, 第 1 主成分はトレンドを取り出すことになっているためである.)

4.4 Monte Carlo 実験

(a) 実験の概要

以下のような VEC (Vector Error Correction) モデルを DGP (data generating process) と考える.

$$\Delta y_t = \alpha\beta'y_{t-1} + \mu + \varepsilon_t, \quad \varepsilon_t \sim NID(0, I_m) \quad (4.4)$$

ここで, α と β は $(m \times r)$ 行列, μ は $(m \times 1)$ ベクトルである. モデルの次元は, $m = 30$, 真の共和分ランクは, $r = 27$, 標本の大きさは, $T = 50, 200$, 予測期間は, $h = 1, 2, \dots, 5, 10, 20, 30, 40, 50$, 実験の繰り返し回数は 5000 とする¹⁰⁾.

(b) 共和分ランクの推定方法

MTV 法を進めるにあたっては, そのステップ (ii) の (4.1) にあるように, 標本平均とトレンドを除いたデータ \tilde{y}_t から計算された主成分について, 第 1 ~ 第 $m - r$ 主成分が $I(1)$ となり, 第 $m - r + 1$ ~ 第 m 主成分が $I(0)$ となるように分ける必要がある. ところが, 通常用いられている Johansen (1991) の共和分ランクの検定法は, 共和分過程の次元が $m = 10$ までであり, ここで考えているような高次元の過程には適用できない. そこで, Chigira and Yamamoto (2009) が提案した各主成分に逐次的に検定を行うという実用的な方法を適用する. この方法を用いれば, 高い次元の過程についても共和分ランクの推定が可能となる.

具体的には, Kwiatkowski *et al.* (KPSS) (1992) の定常性の検定を主成分 $\{b'_i \tilde{y}_t\}$ ($i = 1, 2, \dots, m$) に逐次的に適用して共和分ランクを推定する¹¹⁾. 実際には Kurozumi and Tanaka (2010) の改良版の検定法を用いる. すなわち, 各主成分 $b'_1 \tilde{y}_t, \dots, b'_m \tilde{y}_t$ に対して, 以下のように定常性検定を逐次的に適用する.

(ステップ 1) 第 1 主成分 $b'_1 \tilde{y}_t$ に対して

$$H_0 : b'_1 \tilde{y}_t \text{ が } I(0) \text{ vs. } H_1 : b'_1 \tilde{y}_t \text{ が } I(1) \Leftrightarrow H_0 : r = m \text{ vs. } H_1 : r \leq m - 1$$

なる定常性検定を行い, H_0 を採択したら $r = m$ として逐次プロセスを終了する. H_0 を棄却したらステップ 2 に進む.

(ステップ 2) 第 2 主成分 $b'_2 \tilde{y}_t$ に対して

$$H_0 : b'_2 \tilde{y}_t \text{ が } I(0) \text{ vs. } H_1 : b'_2 \tilde{y}_t \text{ が } I(1) \Leftrightarrow H_0 : r = m - 1 \text{ vs. } H_1 : r \leq m - 2$$

なる定常性検定を行い, H_0 を採択したら $r = m - 1$ として逐次プロセスを終了する. H_0 を棄却したらステップ 3 に進む.

¹⁰⁾ 千木良・山本 (2013) では, $m = 3$, $r = 2$ という小さなモデルの場合についての実験も行われている.

¹¹⁾ 共和分分析に MTV 法を最初に導入した Chigira and Yamamoto (2009) では, 定常性の検定ではなく, Phillips and Perron (1988) の単位根検定を逐次的に適用している.

⋮

(ステップ $m-1$) 第 $m-1$ 主成分 $b'_{m-1}\tilde{y}_t$ に対して

$$H_0: b'_{m-1}\tilde{y}_t \text{が} I(0) \text{ vs. } H_1: b'_{m-1}\tilde{y}_t \text{が} I(1) \Leftrightarrow H_0: r = 2 \text{ vs. } H_1: r \leq 1$$

なる定常性検定を行い, H_0 を採択したら $r = 2$ として逐次プロセスを終了する. H_0 を棄却したらステップ m に進む.

(ステップ m) 第 m 主成分 $b'_m\tilde{y}_t$ に対して

$$H_0: b'_m\tilde{y}_t \text{が} I(0) \text{ vs. } H_1: b'_m\tilde{y}_t \text{が} I(1) \Leftrightarrow H_0: r = 1 \text{ vs. } H_1: r = 0$$

なる定常性検定を行い, H_0 を採択したら $r = 1$ とする. H_0 を棄却したら $r = 0$ とする.

以上のようなプロセスで求められた共和分ランクを \hat{r} と表す. 実際にどのような共和分ランクが選ばれたかについて, その分布は表 1 に示されている.

表 1 求められた共和分ランク (\hat{r}) の分布

(真のランク $r = 27$)											
(a) 無制約						(b) 制約付き ($r \leq 29$)					
$T \setminus \hat{r}$	26	27	28	29	30	$T \setminus \hat{r}$	26	27	28	29	30
50	1.6	24.5	48.7	13.1	12.1	50	2.5	30.3	53.4	13.8	0
100	2	57.3	35.2	2.7	2.8	100	2.1	59.1	36	2.8	0
200	0.9	89.5	9.1	0.5	0	200	0.9	89.5	9.1	0.5	0
500	0.8	93.8	5.2	0.2	0	500	0.8	93.8	5.2	0.2	0

この表より, 標本の大きさ T が小さい時は, 推定される共和分ランク \hat{r} は真のランク 27 より高くなりがちであるが, T が大きくなるにしたがって, \hat{r} の分布は真のランクに収束していく様子を見ることができる.

なおここで用いられている定常性の検定は 1 変量時系列に対して開発されたもので, 多変量時系列から求められた主成分に適用することは必ずしも正当化されているわけではないことに留意する必要がある. しかしながら, 現状において漸近的に正しい方法として提案されている Breitung (2002) のノンパラメトリック法は, その小標本特性が上記の方法に比べて著しく劣ることが明らかとなった¹²⁾. そこで, ここでは小標本でのよい特性を持つ簡便で実用的な方法として上記の逐次的方法を採用している. この主成分に基づく共和分ランクの推定について, 漸近理論的に正当性がありかつ小標本特性に優れた方法を見つけることは今後の重要な課題である.

¹²⁾ 詳しくは, 千木良・山本 (2013) の付録 B を参照されたい.

表2 Trace MSE 比

$T = 50$										
h	1	2	3	4	5	10	20	30	40	50
ratio (MTV)	1.04	0.99	0.96	0.96	0.96	0.98	1.00	1.02	1.04	1.05
ratio (LC)	1.82	1.32	1.16	1.11	1.07	1.03	1.01	1.01	1.01	1.01
$T = 200$										
h	1	2	3	4	5	10	20	30	40	50
ratio (MTV)	0.92	0.88	0.86	0.86	0.87	0.92	0.96	0.99	1.00	1.01
ratio (LC)	4.15	2.59	2.08	1.86	1.70	1.41	1.24	1.17	1.14	1.12

(c) 実験結果

ここでは、3種の子測法を比較する。すなわち、MTV法、LC法、および個別のARIMA法である。具体的には、以下のtrace MSE比を比較の対象とする。

$$\text{ratio(MTV)} = \frac{\text{tr MSE}(\hat{y}_{T+h}^{\text{MTV}})}{\text{tr MSE}(\hat{y}_{T+h}^{\text{ARIMA}})}, \quad \text{ratio(LC)} = \frac{\text{tr MSE}(\hat{y}_{T+h}^{\text{LC}})}{\text{tr MSE}(\hat{y}_{T+h}^{\text{ARIMA}})}$$

個別ARIMAモデルに基づく予測が、最も簡単な予測法として比較の基準となる。もし上記の比が1より小さい時(大きい時)は、分子の予測が個別ARIMA法より精度が良い(悪い)ことになる。

この表より、 $T = 50$ の場合、MTV法の予測精度は、全般的に個別ARIMA法と殆ど同等であることが分かる。一方、LC法の予測は、短期および中期予測において、個別ARIMA法に劣る。 $T = 200$ の場合は、MTV法の予測精度は、短期および中期予測において、個別ARIMA法より優れている。一方、LC法の予測は、短期および中期予測において、 $T = 50$ の場合に比べて個別ARIMA法よりさらに悪くなっている。これはLC法の短所(1)において述べたように、出発値のずれが T と共に増大するための結果であると思われる。

長期の予測については、いずれの方法の場合もtr MSE比は1に収束している。これはいずれの方法もトレンド項の推定量は一致性を持つので、命題3.3が示すように長期予測には大きな差がでないためと考えられる。

結論としては、短期および中期予測において、MTV法はLC法より明白に優れているが、長期予測においては2つの方法はほぼ同等であることが分かった。

4.5 死亡率データへの応用

ここでは、日本人とスウェーデンの男性の死亡率データ(生命表)への応用を取り上げる。

(a) 日本人男性の場合

日本人男性の死亡率(対数値)は、すでに図1で示されているが、ここではその一部について分析を行う。すなわち30歳から59歳までのデータを対象とする。すなわち、時系列

表3 Trace MSE 比 (日本男性, 30 歳 ~ 59 歳)

$m = 30, \hat{r} = 27$					
h	1	2	3	4	5
ratio (MTV)	1.04	0.74	0.73	0.50	0.25
ratio (LC)	3.39	4.08	4.83	3.27	3.00

過程の次元は $m = 30$ である。推定の標本期間は 1947 年から 2004 年までであり ($T = 58$), 予測期間は 2005 年から 2009 年までの 5 期間である¹³⁾。

このデータに基づく結果は表3に示されている。共和分ランクは $\hat{r} = 27$ とかなり高かった。ここでは標本の大きさの制約から、予測精度の比較は短期の予測に限定されている。結果は以下のようにまとめられる。(1) MTV 法は、第1期を除いて、ARIMA 法より顕著に良い。(2) LC 法は ARIMA 法より極めて悪い (trace MSE 比が3を超えている)。(3) 結果として、短期の予測期間において、MTV 法は LC 法よりはるかに良い (前項の実験が示唆するよりも改善の効果は大である)。

(b) スウェーデン男性の場合

次に、最も長期のデータが利用可能なスウェーデンを対象とする。データはやはり Human Mortality Database より得た。これらのデータ (0 歳から 109 歳) は、図2に示されている。日本人男性の場合と同様に、ここでの分析は、30 歳から 59 歳までを対象とする ($m = 30$)。標本期間は、1751 年から 1960 年までとし ($T = 210$)、予測期間は 1961 年から 2010 年までとする (具体的には、 $h = 1, 2, \dots, 10, 20, 30, 40, 50$ とする)¹⁴⁾。

予測精度の比較結果は、表4に与えられている (この表の見方は、表3と同様である)。共和分ランクは $\hat{r} = 26$ であり、日本の場合と同様にかなり高かった。この表からは、日本の場合と同じく、概ね MTV 法が LC 法より予測精度が高いことが解るが、その優位性は

表4 Trace MSE 比 (スウェーデン男性, 30 歳 ~ 59 歳)

$(m = 30, \hat{r} = 26)$										
h	1	2	3	4	5	10	20	30	40	50
ratio (MTV)	0.79	1.07	1.00	1.17	0.94	1.17	1.11	0.88	0.98	0.97
ratio (LC)	2.80	3.34	2.65	3.54	2.26	2.81	1.99	2.13	0.90	0.80

¹³⁾ 千木良・山本 (2013) では、他の年齢層の分析 (すなわち、0 歳から 110+歳のデータ、0 歳から 29 歳のデータ、60 歳から 110+歳のデータ)、さらに全年齢を 5 歳ごとにグループ化したデータについての分析も行われている。また女性のデータについても分析が行われている。

¹⁴⁾ 千木良・山本 (2013) においては、日本のデータの場合と同様に、ここで取り上げた場合以外の、様々なデータセットに対しての分析が行われている。

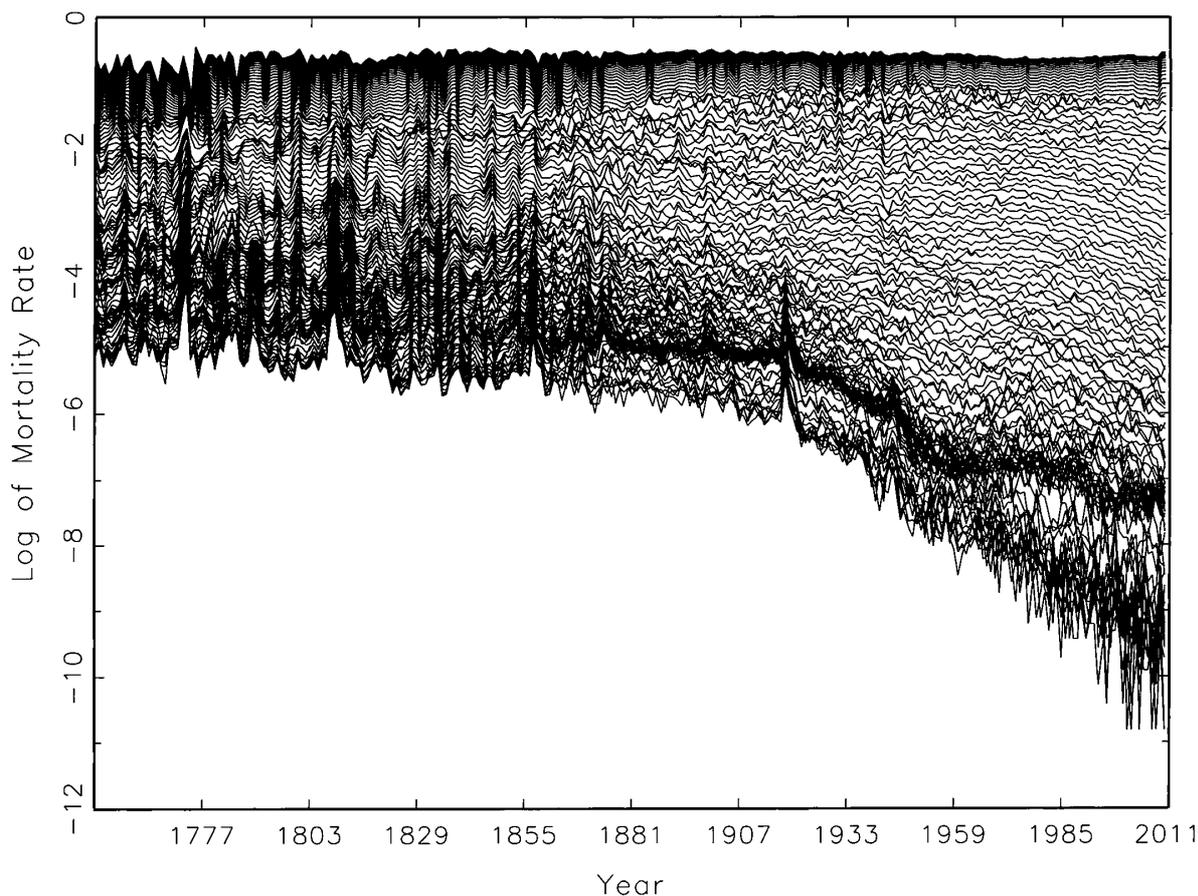


図2 スウェーデン男性の死亡率の対数(0歳から109歳)

日本の場合より低い。この理由としては図2よりうかがえるように、1900年頃を境にトレンドの傾きに構造変化が疑われること、第1次・第2次世界大戦で死亡率が大きく上がるという外れ値があることが考えられる¹⁵⁾。これを全期間共通の線型トレンドで記述している現在の方法には限界があると思われる。また、Human Mortality Databaseで述べられているように、スウェーデンは1751年～1860年のデータの質が悪く、それが影響している可能性もある。LC法に基づく予測は短期予測では精度がかなり悪いが、長期予測では精度が明白に向上している。

5. まとめ

本稿では、共和分分析に基づく予測についての考察を行った。まずは、その特徴に関する理論的・実験的研究についてのサーヴェイを行った。共和分過程についての予測においては長期予測の性質が大きな焦点となるが、共和分制約がその予測精度の向上に貢献するか否かが重要な論点となってきた。長期予測においては、当初の期待（ならびに実験結果）

¹⁵⁾ 本稿の予測法はいずれもトレンドに構造変化が無いことが前提となっている。また、今回の分析では両世界大戦時のデータに何も処置をせずそのまま使っている。

に反して、近年の研究では共和分制約は予測精度に貢献しないということが明らかになった。またトレンドを持つ共和分過程においては、トレンド項の正確な扱い、あるいはトレンド項の精度の高い推定が長期予測にとって最も重要であることが明らかになった。短期ならびに中期の予測については、実験的結果であるが、長期の場合と異なり、共和分制約が予測精度の向上に有用であることが明らかになった。

次に応用例としては、生命表に基づく寿命の予測を紹介した。ここでは、共和分分析に基づく MTV 法による予測が、寿命の予測としての標準的に用いられている Lee-Carter 法より予測精度がかなり優れていることが明らかにされた。しかし、MTV 法にも改善すべき重要な課題が残されている。第 1 は、高次元の共和分過程における共和分ランクの推定についてのより進んだ方法（漸近理論的に正しく、かつ小標本特性の優れた方法）の開発である。第 2 は、トレンドの扱いである。スエーデンの例でも明らかにされたように、長期のデータが利用可能な場合にはトレンドに構造変化が生じている可能性も高く、全期間共通の線型トレンドを想定するのは無理な場合もあり、構造変化を織り込んだトレンドを取り入れる必要がある。

謝辞

本稿は、2013 年度の統計関連学会連合大会（大阪大学、2013 年 9 月 9 日）における日本統計学会賞受賞記念講演に基づいている。本稿の改善につながった多くのコメントに関して、レフェリーに感謝する。

参考文献

- Arlt, J., Arltova, M., Basta, M. and Langhamrova, J. (2010). Cointegrated Lee-Carter mortality forecasting method, *COMPSTAT 2010*, 713–720.
- Bell, W. R. (1997). Comparing and assessing time series methods for forecasting age specific demographic rates, *J. Off. Stat.*, **13**, 279–303.
- Box, G. E. P. and Jenkins, G. M. (1970). *Time Series Analysis: Forecasting and Control*, Holden-Day, San Francisco.
- Breitung, J. (2002). Nonparametric tests for unit roots and cointegration, *J. Econom.*, **108**, 343–363.
- Carter, L. R. (2010). Long-run relationships in differential U.S. mortality forecasts by race and sex: Tests for co-integration, in *Ageing in Advanced Industrial States: Riding the Age Waves—Volume 3*, Tuljapurkar, S., Ogawa, N. and Gauthier, A. H. eds., Springer, 47–75.
- Chigira, H. and Yamamoto, T. (2009). Forecasting in large cointegrated processes, *J. Forecast.*, **28**, 631–650.
- Chigira, H. and Yamamoto, T. (2012). The effect of estimating parameters on long-term forecasts for cointegrated systems, *J. Forecast.*, **31**, 344–360.
- 千木良弘朗, 山本拓 (2013). Lee-Carter 予測に関する時系列分析の理論的視点からの評価と代替案 (未定稿).
- Christoffersen, P. F. and Diebold, F. X. (1998). Cointegration and long-horizon forecasting, *J. Bus. Econ. Stat.*, **16**, 450–458.
- Darkiewicz, G. and Hoedemakers, T. (2004). How the co-integration analysis can help in mortality forecasting, manuscript, Actuarial Science Research Group, Catholic University of Leuven.
- Dickey, D. A. and Fuller, W. A. (1979). Distribution of the estimators for autoregressive time series with a unit root, *J. Am. Stat. Assoc.*, **74**, 427–431.

- Elliott, G. (2006). Forecasting with trending data, in *Handbook of Economic Forecasting*, Chapter 11 in Elliott, G. et al. eds., North-Holland.
- Engle, R. F. and Granger, C. W. J. (1987). Co-integration and error correction: Representation, estimation and testing, *Econometrica*, **55**, 251–276.
- Engle, R. F. and Yoo, S. (1987). Forecasting and testing in cointegrated systems, *J. Econom.*, **35**, 143–159.
- Fuller, W. A. (1976). *Introduction to Statistical Time Series*, John Wiley & Sons.
- Girosi, F. and King, G. (2007). Understanding the Lee-Carter mortality forecasting method, unpublished manuscript, Center for Basic Research in the Social Sciences, Harvard University.
- Granger, C. W. J. (1981). Some properties of time series data and their use in econometric model specification, *J. Econom.*, **16**, 121–130.
- Granger, C. W. J. and Morris, M. J. (1976). Time series modelling and interpretation, *J. R. Stat. Soc., Ser. A*, **139**, 246–257.
- Human Mortality Database*. University of California, Berkeley (USA), and Max Planck Institute for Demographic Research (Germany). Available at www.mortality.org or www.humanmortality.de (data downloaded on 22/08/2012).
- Johansen, S. (1991). Estimation and hypothesis testing of cointegration vectors in Gaussian vector autoregressive models, *Econometrica*, **59**, 1551–1580.
- Johansen, S. (1995). *Likelihood-Based Inference in Cointegrated Vector Autoregressive Models*, Oxford University Press.
- Kariya, T. (1987). MTV model and its application to the prediction of stock prices, *Proceedings of the Second International Tampere Conference in Statistics*, 161–176.
- 木暮厚之, 長谷川知弘 (2008). 「生命表の統計学」国友直人, 山本拓編『21世紀の統計科学 I 第8章』東京大学出版会.
- Kurozumi, E. and Tanaka, S. (2010). Reducing the size distortion of the KPSS test, *J. Time Ser. Anal.*, **31**, 415–426.
- Kwiatkowski, D., Phillips, P. C. B., Schmidt, P. and Shin, Y. (1992). Testing the null hypothesis of stationarity against the alternative of a unit root, *J. Econom.*, **54**, 159–178.
- Lee, R. D. and Carter, L. A. (1992). Modeling and forecasting U.S. mortality, *J. Am. Stat. Assoc.*, **87**, 659–671.
- Lin, J. L. and Tsay, R. (1996). Co-integration constraint and forecasting: An empirical examination, *J. Appl. Econom.*, **11**, 519–538.
- Phillips, P. C. B. (1998). Impulse response and forecast error variance asymptotics in nonstationary VARs, *J. Econom.*, **83**, 21–56.
- Phillips, P. C. B. and Perron, P. (1988). Testing for a unit root in time series regression, *Biometrika*, **75**, 335–346.
- 山本拓 (2006). 「経済における時系列分析：概観と展望」『日本統計学会雑誌』**35**, 81–101.