日本統計学会誌
第 43 巻, 第 2 号, 2014 年 3 月
335 頁 ～ 358 頁

日本統計学会研究業績賞受賞者特別寄稿論文

確率微分方程式の統計的モデリング

内田　雅之*

Statistical Modeling for Stochastic Differential Equations

Masayuki Uchida*

高頻度データに基づく確率微分方程式モデルのモデル選択およびパラメータの適応的推定法について述べる．具体的には，エルゴード的拡散過程のモデル選択のための赤池型情報量規準を構成し，その数学的正当性を考察する．さらに情報量規準を一般化するために，弱い条件の下で漸近正規性及びモーメント収束性を有する推定量を導出し，その漸近的性質を検証する．

We deal with model selection problem and adaptive estimation of stochastic differential equation based on high frequency data. Akaike type information criterion for ergodic diffusion processes is proposed and its mathematical validity is considered. Furthermore, in order to generalize our information criterion under a weak condition, we obtain adaptive estimators for both drift and volatility parameters with asymptotic normality and moment convergence, and their asymptotic properties are investigated.

キーワード: 拡散過程，モデル選択，情報量規準，適応的推定，高頻度データ

1.　はじめに

確率過程は時間とともにランダムに変化する現象を記述するための数学モデルであり，金融，保険数理，生物学，物理学，工学など様々な分野に広く応用されている．このようなランダムな現象を解析する際には，未知パラメータの統計推測が必要となる場合がある．特に，金融データなどに代表される高頻度データの入手が容易となり，連続時間確率過程の統計推測が益々重要になってきている．本論文では連続時間確率過程の主要なクラスである確率微分方程式を統計モデルと仮定して，そこから得られる高頻度データに基づくモデル選択のための情報量規準の構成およびパラメータの適応型推定法を紹介する．

次の確率微分方程式で定義される d 次元拡散過程を考える．

$$dX_t = a(X_t, \theta_2)dt + \epsilon b(X_t, \theta_1)dw_t, \quad \epsilon \in (0,1], \quad t \in [0,T], \quad X_0 = x_0. \tag{1.1}$$

* 大阪大学大学院基礎工学研究科，大阪大学金融・保険教育研究センター (CSFI)，CREST，JST：〒 560-8531 大阪府豊中市待兼山町 1-3 (E-mail: uchida@sigmath.es.osaka-u.ac.jp).

ここで，w は r 次元標準ウィナー過程，$a:\mathbf{R}^d\times\Theta_2\to\mathbf{R}^d$, $b:\mathbf{R}^d\times\Theta_1\to\mathbf{R}^d\otimes\mathbf{R}^r$ とし，$\theta=(\theta_1,\theta_2)\in\Theta_1\times\Theta_2=\Theta$ で，Θ_1 と Θ_2 は $\mathbf{R}^{p_1}$ と $\mathbf{R}^{q_1}$ の部分集合とする．θ_1 をボラティリティパラメータ，θ_2 をドリフトパラメータとよぶ．統計モデルが連続時間確率過程の場合，次の 2 種類のデータが考えられる．(i) 連続観測データ $\mathbf{X}_T=\{X_t\ ;\ t\in[0,T]\}$, (ii) 離散観測データ $\mathbf{X}_n=\{X_{t_i^n}\ ;\ i=0,1,\ldots,n\}$, ただし，$t_i^n=ih_n$, $t_n^n=T$, h_n は刻み幅で，n はデータ数である．離散観測データに基づくパラメータ推定に関する基本的な結果は次の通りである．

(I) 観測区間 T が固定で，刻み幅 h_n が小さい場合 (T が固定で，$h_n\to 0$). (i) $\epsilon=1$ の統計モデル (1.1) で，Genon-Catalot and Jacod (1993) が θ_1 に対する漸近混合正規性をもつ最尤型推定量を導出した．Gobet (2001) は尤度の局所漸近混合正規性 (LAMN) を証明した．Uchida and Yoshida (2013a) は最尤型推定量とベイズ型推定量の漸近混合正規性及びモーメント収束を示した．(ii) $\epsilon\to 0$ のとき (微小拡散過程の場合)，Sørensen and Uchida (2003) は h_n と ϵ のバランス条件 “$\sqrt{h_n}/\epsilon$ が有界” の下で，θ_1 と θ_2 の最尤型推定量を導出した．Uchida (2008) はバランス条件を仮定せず，近似マルチンゲール推定関数を用いて θ_2 の漸近有効推定量を求めた．Gloter and Sørensen (2009) は “ある $l>0$ が存在して h_n^l/ϵ が有界” というバランス条件の下で，θ_1 と θ_2 の最尤型推定量を導出した．

(II) 観測区間 T が大きく，刻み幅 h_n が固定の場合 ($T\to\infty$ で $h_n=\Delta$ が固定). Bibby and Sørensen (1995) がマルチンゲール推定関数を導入して，$\epsilon=1$ の統計モデル (1.1) で，エルゴード性の下，θ_1 と θ_2 の M-推定量を提案して，その漸近正規性を示した．

(III) 観測区間 T が大きく，刻み幅 h_n が小さい場合 ($T\to\infty$ で $h_n\to 0$). $\epsilon=1$ でエルゴード性をもつ統計モデル (1.1) について，Yoshida (1992) が θ_1 と θ_2 の適応的最尤型推定量を提案し，バランス条件 $nh_n^3\to 0$ の下，漸近正規性および漸近有効性を示した．Kessler (1995, 1997) は，一般のバランス条件 $nh_n^p\to 0$ (p は 2 以上の整数) の下，θ_1 と θ_2 の適応的最尤型推定量および同時最尤型推定量を導出した．Gobet (2002) は尤度の局所漸近正規性 (LAN) を示した．Yoshida (2005, 2011) はバランス条件 $nh_n^2\to 0$ の下，θ_1 と θ_2 の最尤型推定量とベイズ型推定量の漸近正規性及びモーメント収束を証明した．Uchida and Yoshida (2011) は，誤特定されたモデルに対する θ_1 と θ_2 の最尤型推定量の漸近的性質について研究を行った．特に，ボラティリティが誤特定された場合，推定量の収束率が $1/\sqrt{nh_n}$ になることを明らかにした．Uchida and Yoshida (2012, 2013b) はバランス条件 $nh_n^p\to 0$ の下，θ_1 と θ_2 の適応的最尤型推定量と適応的ベイズ型推定量の漸近正規性及びモーメントの収束を証明した．

離散観測に基づく確率微分方程式モデルの統計推測は，多くの研究者によって議論されてきたが，モデル選択のための情報量規準や予測問題に関しては，あまり研究がなされて

いなかった．独立モデルや時系列モデルの情報量規準については，Akaike (1973, 1974) や Konishi and Kitagawa (2008) などを参照．局所漸近混合正規性 (LAMN) を有する特定の確率微分方程式については，Sei and Komaki (2007)，連続観測における確率微分方程式の情報量規準については，Uchida and Yoshida (2001, 2004, 2006) を参照．離散観測における確率微分方程式の統計推測において，尤度関数の基盤となる推移密度関数が陽に表現できないために，尤度解析が直接的に適用不可能であり，これが確率微分方程式の統計的モデリングを難解にしている一つの要因となっている．しかし，局所正規近似を用いて疑似尤度関数を構成することで，それに基づく疑似尤度解析がうまく機能することが上述の研究等で広く知られることとなり，現在の高頻度データ解析の発展に繋がっている．ところが，モデル選択のための情報量規準の数学的正当化については，疑似尤度解析だけでは解決できない．情報量規準が (期待) 平均対数尤度に対する漸近不偏推定量であることを示すためには，対数尤度関数のパラメータ微分のモーメント評価を行う必要があり，推移密度関数が陽に表現できない場合には，その評価が非常に困難となる．Gobet (2001, 2002) は，対数尤度関数のパラメータに関する導関数をマリアバン微分の随伴作用素 (Skorohod integral) を用いて条件付き期待値で表現して，その導関数をマリアバン解析を用いて巧みに評価することで，局所漸近 (混合) 正規性を証明した．Uchida (2010) はマリアバン解析を用いて，対数尤度関数の高次のパラメータ微分のモーメント評価を行うことで，バランス条件 $nh_n^2 \to 0$ の下，エルゴード的拡散過程の赤池型情報量規準の構成およびその数学的正当化を行った．この結果をバランス条件 $nh_n^p \to 0$ $(p \geq 2)$ の場合に一般化するために，漸近正規性及びモーメント収束性を有するドリフトおよびボラティリティ推定量を導出する必要がある．Uchida and Yoshida (2012) は，適応的最尤型推定法を提案し，それらの漸近的性質を証明した．これにより，一般のバランス条件 $nh_n^p \to 0$ $(p \geq 2)$ の下で，赤池型情報量規準を構成することが可能となった (Fujii and Uchida (2013))．

本論文の構成は次の通りである．2 節で，エルゴード的拡散過程のモデル選択のための情報量規準の構成およびその数学的正当化について解説する．3 節では，ドリフトパラメータとボラティリティパラメータの適応的最尤型推定量を提案し，その漸近的性質を調べる．また，数値実験を行い，適応的最尤型推定量の漸近挙動を比較する．4 節では，確率微分方程式の統計的モデリングに関する最近の発展について述べる．最後に，5 節で確率微分方程式の統計に関する他の話題について簡単に説明をする．

2. モデル選択問題

次の確率微分方程式で定義される d 次元拡散過程を考える．

$$dX_t = A(X_t)dt + B(X_t)dw_t,\ t \in [0,T], \quad X_0 = x_0. \tag{2.1}$$

ここで，A は $\mathbf{R}^d$ 上で定義された $\mathbf{R}^d$-値関数, B は $\mathbf{R}^d$ 上で定義された $\mathbf{R}^d \otimes \mathbf{R}^d$-値関数, w は d 次元標準ウィナー過程，x_0 は初期値とする．データは離散観測 $\mathbf{X}_n = (X_{t_i^n})_{0 \le i \le n}$，ここで，$t_i^n = ih_n$, h_n は刻み幅で $nh_n = T$ とする．極限は $h_n \to 0$ かつ $nh_n^2 \to 0$ を考える．さらに，ある $\epsilon_0 \in (0, 1/2)$ が存在して，大きな n に対して，$n^{\epsilon_0} \le nh_n$ とする．離散観測に基づいて，次の M 個のパラメトリックモデルからモデル選択する問題を取り扱う．$m = 1, \ldots, M$ に対して，

$$dX_t = a_m(X_t, \theta_{m,2})dt + b_m(X_t, \theta_{m,1})dw_t,\ t \in [0, T],\ X_0 = x_0. \tag{2.2}$$

ここで，$\theta_m = (\theta_{m,1}, \theta_{m,2}) \in \Theta_{m,1} \times \Theta_{m,2} = \Theta_m$, $\Theta_{m,1}$ と $\Theta_{m,2}$ はそれぞれ，$\mathbf{R}^{p_m}$ と $\mathbf{R}^{q_m}$ の有界開集合とする．簡単のため，本論文を通じて，パラメータ空間は局所リプシッツ境界 (Adams and Fournier (2003)) をもつことを仮定する．a_m は $\mathbf{R}^d \times \Theta_{m,2}$ 上で定義された $\mathbf{R}^d$-値関数, b_m は $\mathbf{R}^d \times \Theta_{m,1}$ 上で定義された $\mathbf{R}^d \otimes \mathbf{R}^d$-値関数, そして，ドリフト関数 a_m とボラティリティ関数 b_m はそれぞれ，パラメータ $\theta_{m,2}$ と $\theta_{m,1}$ 以外は既知とする．すべての θ_m に対して，拡散過程 X はエルゴード的であることを仮定し，その不変分布を μ_{θ_m} とする．拡散過程のエルゴード性と不変分布については，Kutoyants (2004) を参照．また，すべてのパラメトリックモデル (2.2) は真のモデル (2.1) を含んでいるとする．すなわち，$m = 1, \ldots, M$ に対して，$\theta_{m,0} = (\theta_{m,1,0}, \theta_{m,2,0}) \in \Theta_m$ が存在して，すべての x に対して，$a_m(x, \theta_{m,2,0}) = A(x)$ かつ $B_m(x, \theta_{m,1,0}) = [BB^\star](x)$．ここで，$B_m(x, \theta_{m,1}) = [b_m b_m^\star](x, \theta_{m,1})$ で $\star$ は転置を意味する．

m 番目のモデルに対する赤池情報量規準 AIC (Akaike (1973, 1974)) は次の通りである．

$$AIC(\mathbf{X}_n, m) = -2 l_{m,n}(\mathbf{X}_n, \hat{\theta}_m^{(ML)}(\mathbf{X}_n)) + 2\mathrm{dim}(\Theta_m). \tag{2.3}$$

ここで，$l_{m,n}(\mathbf{X}_n, \theta_m) = \sum_{i=1}^n \log p_m(h_n, X_{t_{i-1}^n}, X_{t_i^n} \mid \theta_m)$ は m 番目のモデルの対数尤度関数, $p_m(t, x, y \mid \theta_m)$ を m 番目のモデルの推移密度関数とし，$\hat{\theta}_m^{(ML)}(\mathbf{X}_n)$ は m 番目のモデルの未知パラメータに対する最尤推定量である．ある正則条件の下で，次が成り立つ．

$$E_{\mathbf{X}_n}\left[AIC(\mathbf{X}_n, m) - E_{\mathbf{Z}_n}\left[(-2) l_{m,n}(\mathbf{Z}_n, \hat{\theta}_m^{(ML)}(\mathbf{X}_n))\right]\right] = o(1). \tag{2.4}$$

ここで，$\mathbf{Z}_n$ は $\mathbf{X}_n$ と独立な観測，$E_{\mathbf{Z}_n}$ は $\mathbf{Z}_n$ の分布の下での期待値を表す．

離散観測に基づく確率微分方程式モデルの AIC の数学的正当化 (2.4) を行う上で，次の難題に直面する．

(i) 一般には，離散観測に基づく確率微分方程式の推移密度関数を明示的に表すことができないため，対数尤度関数 $l_{m,n}(\mathbf{X}_n, \theta_m)$ を求めることができない．当然，最尤推定量は導出不可能である．

(ii) AIC の数学的正当化 (2.4) は漸近不偏性に基づいているので，AIC 統計量 (推定量) の期待平均対数尤度へのモーメント収束を証明する必要がある．

なお，(i) については確率微分方程式モデルに関する固有な問題であるが，(ii) については，一般の統計モデルに共通する問題である．詳細は吉田 (2006)，Uchida and Yoshida (2001) を参照．本節では，離散観測に基づく確率微分方程式モデルのモデル選択のための情報量規準を導出する．詳細については Uchida (2010) を参照．

本節で用いる記号を定義しておく．

1. $\partial_x^{\mathbf{n}} = \partial_{x_1}^{n_1} \cdots \partial_{x_d}^{n_d}$, $\partial_{\theta_m}^{\boldsymbol{\nu}} = \partial_{\theta_{m,1}}^{\nu_1} \cdots \partial_{\theta_{m,p_m+q_m}}^{\nu_{p_m+q_m}}$. ここで，$\partial_{x_i} = \partial/\partial x_i$, $\partial_{\theta_{m,j}} = \partial/\partial\theta_{m,j}$ で，$\mathbf{n} = (n_1, \ldots, n_d)$ と $\boldsymbol{\nu} = (\nu_1, \ldots, \nu_{p_m+q_m})$ はマルチインデックスであり，$|\mathbf{n}| = n_1 + \cdots + n_d$, $|\boldsymbol{\nu}| = \nu_1 + \cdots + \nu_{p_m+q_m}$ である．
2. $C_b^{k,l}(\mathbf{R}^d \times \Theta_m; \mathbf{R}^d \otimes \mathbf{R}^d)$ は次を満たす関数 f の空間である．(i) $f(x, \theta_m)$ は $\mathbf{R}^d \times \Theta_m$ 上で定義された $\mathbf{R}^d \otimes \mathbf{R}^d$-値関数で，$x$ に関して k 回連続微分可能であり，$|\mathbf{n}| = 0, 1, \ldots, k$ に対して，$\partial_x^{\mathbf{n}} f(x, \theta_m)$ は θ_m に関して l 回連続微分可能．(ii) $|\mathbf{n}| = 0, 1, \ldots, k$ と $|\boldsymbol{\nu}| = 0, 1, \ldots, l$ に対して，$\sup_{x,\theta_m} |\partial_{\theta_m}^{\boldsymbol{\nu}} \partial_x^{\mathbf{n}} f(x, \theta_m)| < \infty$.
3. $\bar{C}_b^{k,l}(\mathbf{R}^d \times \Theta_m; \mathbf{R}^d)$ は次の条件を満たす関数 f の空間である．(i) $f(x, \theta_m)$ は $\mathbf{R}^d \times \Theta_m$ 上で定義された $\mathbf{R}^d$-値関数で，x に関して k 回連続微分可能であり，$|\mathbf{n}| = 0, 1, \ldots, k$ に対して，$\partial_x^{\mathbf{n}} f(x, \theta_m)$ は θ_m に関して l 回連続微分可能．(ii) $|\mathbf{n}| = 1, \ldots, k$ に対して，$\sup_{x,\theta_m} |\partial_x^{\mathbf{n}} f(x, \theta_m)| < \infty$. (iii) $|\boldsymbol{\nu}| = 1$ に対して，ある定数 $C > 0$ が存在して，すべての x に対して，$\sup_{\theta_m} |\partial_{\theta_m}^{\boldsymbol{\nu}} f(x, \theta_m)| \le C(1 + |x|)$. また，$|\boldsymbol{\nu}| = 2, 3, \ldots, l$ に対して，$\sup_{x,\theta_m} |\partial_{\theta_m}^{\boldsymbol{\nu}} f(x, \theta_m)| < \infty$. (iv) $|\mathbf{n}| = 1, \ldots, k$ と $|\boldsymbol{\nu}| = 1, \ldots, l$ に対して，$\sup_{x,\theta_m} |\partial_{\theta_m}^{\boldsymbol{\nu}} \partial_x^{\mathbf{n}} f(x, \theta_m)| < \infty$.
4. P_{θ^*} と P_{θ_m} はそれぞれ，確率微分方程式 (2.1) と (2.2) によって定義される拡散過程の分布を表す．E_{θ^*} と E_{θ_m} はそれぞれ，P_{θ^*} と P_{θ_m} の下での期待値を表す．ここで，$P_{\theta^*} = P_{\theta_{m,0}}$ と $E_{\theta^*} = E_{\theta_{m,0}}$ に注意する．
5. サイズが同じ行列 A と B に対して，$A^{\otimes 2} = AA^\star$, $B[A] = \mathrm{tr}(BA^\star)$ とする．
6. $I_m(\theta_{m,0})$ は漸近フィッシャー情報行列で，

$$I_m(\theta_{m,0}) = \begin{pmatrix} (I_{b,m}(\theta_{m,0})_{ij})_{i,j=1,\ldots,p_m} & 0 \\ 0 & (I_{a,m}(\theta_{m,0})_{ij})_{i,j=1,\ldots,q_m} \end{pmatrix}$$

である．ここで，

$$\begin{aligned} I_{b,m}(\theta_{m,0})_{ij} &= \frac{1}{2} \int_{\mathbf{R}^d} \mathrm{tr}\left[(\partial_{\theta_{m,1,i}} B_m) B_m^{-1} (\partial_{\theta_{m,1,j}} B_m) B_m^{-1}(x, \theta_{m,1,0}) \right] \mu_{\theta_{m,0}}(dx), \\ I_{a,m}(\theta_{m,0})_{ij} &= \int_{\mathbf{R}^d} (\partial_{\theta_{m,2,i}} a_m)^\star (x, \theta_{m,2,0}) B_m^{-1}(x, \theta_{m,1,0}) \partial_{\theta_{m,2,j}} a_m(x, \theta_{m,2,0}) \mu_{\theta_{m,0}}(dx). \end{aligned}$$

次を仮定する．

$[\mathcal{C}1]$ (i) $a_m(x,\theta_{m,2}) \in \bar{C}_b^{5,5}(\mathbf{R}^d \times \Theta_{m,2}; \mathbf{R}^d)$. (ii) $b_m(x,\theta_{m,1}) \in C_b^{5,5}(\mathbf{R}^d \times \Theta_{m,1}; \mathbf{R}^d \otimes \mathbf{R}^d)$.

$[\mathcal{C}2]$ (i) ある定数 $c_0 > 0$ と $K > 0$ が存在して，任意の $(x,\theta_{m,2}) \in \mathbf{R}^d \times \Theta_{m,2}$ に対して，$x^\star a_m(x,\theta_{m,2}) \leq -c_0|x|^2 + K$ が成り立つ．(ii) $b_m(x,\theta_{m,1})$ は対称で，ある定数 $c_1 \geq 1$ が存在して，任意の $(x,\theta_{m,1},\lambda) \in \mathbf{R}^d \times \Theta_{m,1} \times \mathbf{R}$ に対して，$\frac{1}{c_1}|\lambda|^2 \leq \lambda^\star b_m(x,\theta_{m,1})\lambda \leq c_1|\lambda|^2$ が成り立つ．

$[\mathcal{C}3]$ $I_m(\theta_{m,0})$ は正則．

$[\mathcal{C}4]$ ほとんどすべての x ($\mu_{\theta_{m,0}}$ a.s. x) に対して，$a_m(x,\theta_{m,2}) = a_m(x,\theta_{m,2,0})$ ならば，$\theta_{m,2} = \theta_{m,2,0}$. ほとんどすべての x に対して，$B_m(x,\theta_{m,1}) = B_m(x,\theta_{m,1,0})$ ならば，$\theta_{m,1} = \theta_{m,1,0}$.

確率微分方程式モデルの情報量規準を導出するために，推移密度関数の局所正規近似に基づく擬似尤度関数を用いる．$m \in \{1,2,\ldots,M\}$ に対して，

$$\begin{aligned} g_{m,n}(\theta_m) &= -\frac{nd}{2}\log(2\pi h_n) - \frac{1}{2}\sum_{i=1}^{n}\log\det(B_m(X_{t_{i-1}^n},\theta_{m,1})) \\ &\quad -\frac{1}{2h_n}\sum_{i=1}^{n} B_m^{-1}(X_{t_{i-1}^n},\theta_{m,1})[(X_{t_i^n} - X_{t_{i-1}^n} - h_n a_m(X_{t_{i-1}^n},\theta_{m,2}))^{\otimes 2}]. \end{aligned} \tag{2.5}$$

擬似最尤推定量 $\hat{\theta}_{m,n}$ を次のように定義する．$g_{m,n}(\hat{\theta}_{m,n}) = \sup_{\theta_m} g_{m,n}(\theta_m)$. さらに，擬似対数尤度関数に基づく情報量規準 $IC(\mathbf{X}_n,m)$ と平均対数尤度 $EL(\mathbf{X}_n,m)$ を次のように定義する．

$$\begin{aligned} IC(\mathbf{X}_n,m) &= g_{m,n}(\hat{\theta}_{m,n}(\mathbf{X}_n)) - g_{m,n}(\theta_{m,0}) + E_{\mathbf{Z}_n}\left[l_{m,n}(\mathbf{Z}_n,\theta_{m,0})\right] - \dim(\Theta_m), \\ EL(\mathbf{X}_n,m) &= E_{\mathbf{Z}_n}\left[l_{m,n}(\mathbf{Z}_n,\hat{\theta}_{m,n}(\mathbf{X}_n))\right]. \end{aligned}$$

また，

$$\begin{aligned} \hat{u}_{m,n} &= \begin{pmatrix} \sqrt{n}(\hat{\theta}_{m,1,n} - \theta_{m,1,0}) \\ \sqrt{nh_n}(\hat{\theta}_{m,2,n} - \theta_{m,2,0}) \end{pmatrix}, \\ \partial_{\theta_m}\hat{g}_{m,n}(\theta_{m,0}) &= \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{n}}\partial_{\theta_{m,1}} g_{m,n}(\theta_{m,0}) \\ \frac{1}{\sqrt{nh_n}}\partial_{\theta_{m,2}} g_{m,n}(\theta_{m,0}) \end{pmatrix} \end{aligned}$$

とする．Yoshida (2005, 2011) の結果を援用して，擬似最尤推定量のモーメント収束性に関する次の補題を示すことができる．

補題 2.1 $m \in \{1,2,\ldots,M\}$ とする．$[\mathcal{C}1]$–$[\mathcal{C}4]$ を仮定する．このとき，

(i) 任意の $L > 0$ に対して，ある定数 $C_L > 0$ が存在して，すべての $n \in \mathbf{N}$ と $r > 0$ に対して，

$$P_{\theta^*}[|\hat{u}_{m,n}| > r] \leq \frac{C_L}{r^L}$$

が成り立つ．さらに，すべての $\mu>0$ に対して，$\sup_n E[|\hat{u}_{m,n}|^{\mu}]<\infty$.

(ii) 任意の多項式増大な連続関数 f に対して，$nh_n^2\to 0$ の下，

$$E_{\theta^*}[f(\hat{u}_{m,n})]\to E[f(G_m)]$$

が成り立つ．ここで，G_m は平均 0 で，共分散行列 $I_m^{-1}(\theta_{m,0})$ となる (p_m+q_m) 次元正規確率変数である．

(iii) $\hat{u}_{m,n}=I_m^{-1}(\theta_{m,0})\partial_{\theta_m}\hat{g}_{m,n}(\theta_{m,0})+R_{m,n}$. ここで，任意の $E_0\in(0,\epsilon_0^2/2)$ と $E_1\geq 1$ に対して，

$$P_{\theta^*}[|R_{m,n}|>n^{-E_0}]=O(1/n^{E_1})$$

が成り立つ．

次に，θ に関する対数尤度関数の微分のモーメント評価についての結果を述べる．$\theta_m=(\theta_{m,1,1},\ldots,\theta_{m,1,p_m},\theta_{m,2,1},\ldots,\theta_{m,2,q_m})^{\star}=:(\bar{\theta}_{m,1},\ldots,\bar{\theta}_{m,p_m+q_m})^{\star}$，$\partial_{m,i}=\partial/\partial_{\bar{\theta}_{m,i}}$，$\partial^2_{m,i,j}=\partial_{m,i}\partial_{m,j}$，$\partial^3_{m,i,j,k}=\partial_{m,i}\partial_{m,j}\partial_{m,k}$ とし．

$$d_{m,l,n}=\begin{cases}\frac{1}{\sqrt{n}} & \text{if } l=1,\ldots,p_m,\\ \frac{1}{\sqrt{nh_n}} & \text{if } l=p_m+1,\ldots,p_m+q_m\end{cases}$$

とする．さらに，$d^2_{m,i,j,n}=d_{m,i,n}d_{m,j,n}$，$d^3_{m,i,j,k,n}=d_{m,i,n}d_{m,j,n}d_{m,k,n}$ とする．Gobet (2001, 2002) と同様にマリアバン解析を用いて，対数尤度関数のパラメータ微分に関するモーメント評価を行うことによって，次を示すことができる．

補題 2.2　$m\in\{1,2,\ldots,M\}$ とする．$[\mathcal{C}1]$–$[\mathcal{C}2]$ を仮定する．このとき，

(i) $i=1\ldots,p_m+q_m$ に対して，

$$E_{\theta^*}\left[\partial_{m,i}l_{m,n}(\theta_{m,0})\right]=0.$$

(ii) $i,j=1\ldots,p_m+q_m$ に対して，$h_n\to 0$ かつ $nh_n\to\infty$ の下，

$$E_{\theta^*}[d^2_{m,i,j,n}\partial^2_{m,i,j}l_{m,n}(\theta_{m,0})]\to -(I_m(\theta_{m,0}))_{ij}.$$

(iii) $i,j,l=1\ldots,p_m+q_m$ とし，任意の $\mu>1$ に対して，$h_n\to 0$ かつ $nh_n\to\infty$ の下，

$$E_{\theta^*}\left[\sup_{\theta_m}\left|d^3_{m,i,j,l,n}\partial^3_{m,i,j,l}l_{m,n}(\theta_m)\right|^{\mu}\right]=o(1).$$

情報量規準 $IC(\mathbf{X}_n,m)$ の漸近的結果は次の通りである．

定理 2.1　$m\in\{1,2,\ldots,M\}$ とする．$[\mathcal{C}1]$–$[\mathcal{C}4]$ を仮定する．このとき，$nh_n^2\to 0$ の下，次が成り立つ．

$$E_{\theta^*}\left[IC(\mathbf{X}_n,m)-EL(\mathbf{X}_n,m)\right]=o(1).$$

定理 2.1 によって，$IC(\mathbf{X}_n, m)$ は平均対数尤度 $EL(\mathbf{X}_n, m)$ の漸近不偏推定量であり，AIC と同様の議論により，競合するモデルの中で最適なモデル m^* は，情報量規準最小化法 $IC(\mathbf{X}_n, m^*) = \max_{m=1,\ldots,M} IC(\mathbf{X}_n, m)$ によって選択される．しかしながら，$g_{m,n}(\theta_{m,0})$ と $E_{\mathbf{Z}_n}[l_{m,n}(\mathbf{Z}_n, \theta_{m,0})]$ は計算不可能であるので，$IC(\mathbf{X}_n, m)$ は実行可能な情報量規準ではない．幸いなことに，統計モデルは真のモデルを含んでいることを仮定しているので，$i, j \in \{1, \ldots, M\}$ に対して，$g_{i,n}(\theta_{i,0}) = g_{j,n}(\theta_{j,0})$ かつ $l_{i,n}(\theta_{i,0}) = l_{j,n}(\theta_{j,0})$ である．こうして，m 番目のモデルに対する，擬似対数尤度関数 (コントラスト関数) に基づく情報量規準を

$$CIC(\mathbf{X}_n, m) = -2g_{m,n}(\hat{\theta}_{m,n}(\mathbf{X}_n)) + 2\mathrm{dim}(\Theta_m)$$

と定義する．$\arg\min_{m=1,\ldots,M} CIC(\mathbf{X}_n, m) = \arg\max_{m=1,\ldots,M} IC(\mathbf{X}_n, m)$ であるので，競合するモデルの中で，最適なモデル m^* は

$$CIC(\mathbf{X}_n, m^*) = \min_{m=1,\ldots,M} CIC(\mathbf{X}_n, m)$$

によって選択される．また，Inagaki and Ogata (1975) と同様にして，真のモデルを含まない競合モデル (誤特定モデル) が存在する場合，その誤特定モデルが CIC によって選択される確率は $nh_n^2 \to 0$ のときに 0 に収束する．

$nh_n^2 \to 0$ の下で，情報量規準の構成を行ったが，データによっては，n と h_n のバランス条件を弱める必要がある．一般に，$p \geq 2$ に対して，$nh_n^p \to 0$ の下での情報量規準を構成する際に重要となるのは，擬似対数尤度関数および補題 2.1 の一般化である．次節では，$nh_n^p \to 0$ の下でモーメント収束性を有する推定量の構成を行う．

3. 適応的最尤型推定

次の確率微分方程式によって定義される d 次元エルゴード的拡散過程を考える．

$$dX_t = a(X_t, \theta_2)dt + b(X_t, \theta_1)dw_t, \quad X_0 = x_0. \tag{3.1}$$

ここで，w は r 次元標準ウィナー過程，$a : \mathbf{R}^d \times \Theta_2 \to \mathbf{R}^d$, $b : \mathbf{R}^d \times \Theta_1 \to \mathbf{R}^d \otimes \mathbf{R}^r$ とし，$\theta = (\theta_1, \theta_2) \in \Theta_1 \times \Theta_2 = \Theta$ で，Θ_1 と Θ_2 はそれぞれ，コンパクトで凸な $\mathbf{R}^{p_1}$ と $\mathbf{R}^{q_1}$ の部分集合とする．$\theta^* = (\theta_1^*, \theta_2^*)$ は θ の真値とし，$\theta^* \in \mathrm{Int}(\Theta)$ を仮定する．データは $\mathbf{X}_n = (X_{t_i^n})_{0 \leq i \leq n}$. ただし，$t_i^n = ih_n$, $t_n^n = nh_n = T_n$ とする．p を 2 以上の整数とする．極限は，$n \to \infty$ のとき，$h_n \to 0$ かつ $nh_n^p \to 0$ であり，さらに，ある定数 $\epsilon_0 \in (0, (p-1)/p)$ が存在して，十分大きな n に対して，$n^{\epsilon_0} \leq nh_n$ が成り立つとする．

連続観測に基づくエルゴード的拡散過程の統計的推測は多くの研究成果があげられている．例えば，Kutoyants (2004) を参照．また，離散観測に基づく統計推測についても盛んに研究が行われている．$nh_n^2 \to 0$ の場合は，Prakasa Rao (1983, 1988), Florens-Zmirou

(1989). $nh_n^3 \to 0$ の場合は，Yoshida (1992), マルチンゲール推定関数については，Bibby and Sørensen (1995), $nh_n^p \to 0$ の場合は，Kessler (1995, 1997) を参照.

記号を用意しておく.

1. $C_{\uparrow}^{k,l}(\mathbf{R}^d \times \Theta; \mathbf{R}^d)$ は，次を満たす関数 f の空間である. (i) $f(x,\theta)$ は $\mathbf{R}^d \times \Theta$ 上で定義された $\mathbf{R}^d$-値関数. (ii) $f(x,\theta)$ は x に関して，k 回連続微分可能で，それらの導関数は θ について一様に，x に関する多項式増大である. (iii) $|\mathbf{n}| = 0, 1, \ldots, k$ に対して，$\partial_x^{\mathbf{n}} f(x,\theta)$ は θ に関して，l 回連続微分可能. さらに，$|\boldsymbol{\nu}| = 1, \ldots, l$ と $|\mathbf{n}| = 0, 1, \ldots, k$ に対して，$\partial_\theta^{\boldsymbol{\nu}} \partial_x^{\mathbf{n}} f(x,\theta)$ は θ について一様に，x に関する多項式増大である.
2. $\mathcal{F}_{\uparrow}(\mathbf{R}^d)$ は $\mathbf{R}^d$ 上で定義された多項式増大な実数値可測関数の空間.
3. $\xrightarrow{p}$ と $\xrightarrow{d}$ は確率収束と分布収束を表す.
4. L_θ は拡散過程 (3.1) の生成作用素，すなわち，

$$L_\theta = \sum_{i=1}^d a_i(x,\theta_2)\partial_{x_i} + \frac{1}{2}\sum_{i,j=1}^d B_{ij}(x,\theta_1)\partial_{x_i}\partial_{x_j}.$$

5. $\Delta X_i = X_{t_i^n} - X_{t_{i-1}^n}$, $B(x,\theta_1) = bb^\star(x,\theta_1)$, $B_{i-1}(\theta_1) = B(X_{t_{i-1}^n}, \theta_1)$, $a_{i-1}(\theta_2) = a(X_{t_{i-1}^n}, \theta_2)$ とする. また

$$\begin{aligned} \mathbb{Y}(\theta_1) &= -\frac{1}{2}\int_{\mathbf{R}^d} \left\{ \mathrm{tr}\left[B(x,\theta_1)^{-1}B(x,\theta_1^*) - I_d\right] + \log\frac{\det(B(x,\theta_1))}{\det(B(x,\theta_1^*))} \right\} \mu_{\theta^*}(dx), \\ \tilde{\mathbb{Y}}(\theta_2) &= -\frac{1}{2}\int_{\mathbf{R}^d} B(x,\theta_1^*)^{-1}[(a(x,\theta_2) - a(x,\theta_2^*))^{\otimes 2}]\mu_{\theta^*}(dx) \end{aligned}$$

とする.

次を仮定する.

[A1] (i) ある定数 $K > 0$ が存在して，すべての $x, y \in \mathbf{R}^d$ に対して，

$$\sup_{\theta_2 \in \Theta_2} |a(x,\theta_2) - a(y,\theta_2)| + \sup_{\theta_1 \in \Theta_1} |b(x,\theta_1) - b(y,\theta_1)| \le K|x - y|.$$

(ii) $\inf_{x,\theta_1} \det(B(x,\theta_1)) > 0$.

(iii) X_t の不変測度 μ_{θ^*} が唯一存在し，さらに，$\int_{\mathbf{R}^d} |f(x)|\mu_{\theta^*}(dx) < \infty$ を満たす任意の $f \in \mathcal{F}_{\uparrow}(\mathbf{R}^d)$ に対して，$T \to \infty$ のときに，

$$\frac{1}{T}\int_0^T f(X_t)dt \xrightarrow{p} \int_{\mathbf{R}^d} f(x)\mu_{\theta^*}(dx)$$

が成り立つ.

(iv) すべての $M > 0$ に対して，$\sup_t E[|X_t|^M] < \infty$.

(v) $\int_{\mathbf{R}^d} g(x)\mu_{\theta^*}(dx) = 0$ を満たす任意の $g \in \mathcal{F}_{\uparrow}(\mathbf{R}^d)$ に対して，ある関数 $G(x)$, $\partial_{x_i}G(x) \in \mathcal{F}_{\uparrow}(\mathbf{R}^d)$ $(i = 1, \ldots, d)$ が存在して，すべての x に対して，

$$L_{\theta^*}G(x) = -g(x).$$

$[A2](k,l)$ $a \in C_{\uparrow}^{k,4}(\mathbf{R}^d \times \Theta_2; \mathbf{R}^d)$. $b \in C_{\uparrow}^{l,4}(\mathbf{R}^d \times \Theta_1; \mathbf{R}^d \otimes \mathbf{R}^r)$.

$[A3]$ ある正定数 χ が存在して，すべての $\theta_1 \in \Theta_1$ に対して，$\mathbb{Y}(\theta_1) \leq -\chi|\theta_1 - \theta_1^*|^2$.

$[A4]$ ある正定数 $\tilde{\chi}$ が存在して，すべての $\theta_2 \in \Theta_2$ に対して，$\tilde{\mathbb{Y}}(\theta_2) \leq -\tilde{\chi}|\theta_2 - \theta_2^*|^2$.

$k_0 = \left[\frac{p}{2}\right]$ とする．Kessler (1997) と同様にして，擬似対数尤度関数 $U_{p,n}(\theta)$ を次のように定義する．

$$U_{p,n}(\theta) = -\frac{1}{2}\sum_{i=1}^{n}\left\{h_n^{-1}\left\{\sum_{j=0}^{k_0} h_n^j D_{i-1}^{(j)}(\theta)\right\}\left[(X_{t_i^n} - r_{i-1}^{(k_0)}(h_n,\theta))^{\otimes 2}\right] + \sum_{j=0}^{k_0} h_n^j E_{i-1}^{(j)}(\theta)\right\}.$$

ここで，$(r_{i-1}^{(k_0)}(h_n,\theta))_m = \sum_{j=0}^{k_0}\frac{h_n^j}{j!}L_\theta^j f_k(X_{t_{i-1}^n})$, $f_m(x) = x_m$. そして，例えば，$k,l = 1,\ldots,d$ に対して，

$$\begin{aligned} D_{i-1}^{(0)}(\theta) &= B_{i-1}^{-1}(\theta_1), \quad E_{i-1}^{(0)}(\theta) = \log\det(B_{i-1}(\theta_1)), \\ D_{i-1}^{(1)}(\theta) &= -B_{i-1}^{-1}(\theta_1)\gamma^{(2)}(X_{t_{i-1}^n},\theta)B_{i-1}^{-1}(\theta_1), \quad E_{i-1}^{(1)}(\theta) = tr[B_{i-1}^{-1}(\theta_1)\gamma^{(2)}(X_{t_{i-1}^n},\theta)], \\ \gamma_{kl}^{(2)}(x,\theta) &= \frac{1}{2}\Bigg\{L_\theta B_{kl}(x,\theta_1) \\ &\qquad + \sum_{j=1}^{d}\{(\partial_{x_j}a_k(x,\theta_2))B_{jl}(x,\theta_1) + (\partial_{x_j}a_l(x,\theta_2))B_{jk}(x,\theta_1)\}\Bigg\} \end{aligned}$$

となる．擬似対数尤度関数 $U_{p,n}(\theta)$ の詳細は Uchida and Yoshida (2012) を参照.

同時最尤型推定量 $\hat{\theta}_{p,n} = (\hat{\theta}_{1,p,n}, \hat{\theta}_{2,p,n})$ は次のように定義される．

$$U_{p,n}(\hat{\theta}_{1,p,n}, \hat{\theta}_{2,p,n}) = \sup_{\theta} U_{p,n}(\theta_1,\theta_2).$$

Kessler (1997) はある正則条件の下で， $nh_n^p \to 0$ のときに，

$$(\sqrt{n}(\hat{\theta}_{1,p,n} - \theta_1^*), \sqrt{nh_n}(\hat{\theta}_{2,p,n} - \theta_2^*)) \xrightarrow{d} (\zeta_1,\zeta_2) \sim N_{p_1+q_1}(0, I^{-1}(\theta^*))$$

が成り立つことを示した．ここで，

$$\begin{aligned} I(\theta^*) &= \begin{pmatrix} (I_b(\theta^*)_{ij})_{i,j=1,\ldots,p_1} & 0 \\ 0 & (I_a(\theta^*)_{ij})_{i,j=1,\ldots,q_1} \end{pmatrix}, \\ I_b(\theta^*)_{ij} &= \frac{1}{2}\int_{\mathbf{R}^d} \mathrm{tr}\left[(\partial_{\theta_{1,i}}B_m)B_m^{-1}(\partial_{\theta_{1,j}}B_m)B_m^{-1}(x,\theta_1^*)\right]\mu_{\theta^*}(dx), \\ I_a(\theta^*)_{ij} &= \int_{\mathbf{R}^d}(\partial_{\theta_{2,i}}a)^\star(x,\theta_2^*)B_m^{-1}(x,\theta_1^*)\partial_{\theta_{2,j}}a(x,\theta_2^*)\mu_{\theta^*}(dx). \end{aligned}$$

しかしながら，2 節の結果を $nh_n^p \to 0$ の場合に拡張するためには，多項式増大な連続関数 f に対して，$nh_n^p \to 0$ の下で，

$$E_{\theta^*}[f(\sqrt{n}(\hat{\theta}_{1,p,n} - \theta_1^*), \sqrt{nh_n}(\hat{\theta}_{2,p,n} - \theta_2^*))] \to \mathbb{E}[f(\zeta_1,\zeta_2)]$$

を示す必要がある．さらに，数値解析の観点から，パラメータ空間 Θ の次元が大きくなると同時最尤型推定量の挙動は不安定になる．

本節では，モーメント収束性を有する適応的最尤型推定量を提案し，その漸近的性質を述べる．詳細については，Uchida and Yoshida (2012) を参照．

3.1 タイプ I の適応的最尤型推定

最初に θ_1 の初期最尤型推定量 $\hat{\theta}_{1,n}^{(0)}$ を定義する．$U_n^{(0)}(\hat{\theta}_{1,n}^{(0)}) = \sup_{\theta_1\in\Theta_1} U_n^{(0)}(\theta_1)$. ここで，

$$U_n^{(0)}(\theta_1) = -\frac{1}{2}\sum_{i=1}^{n}\left\{h_n^{-1}B_{i-1}^{-1}(\theta_1)[(\Delta X_i)^{\otimes 2}] + \log\det(B_{i-1}(\theta_1))\right\}.$$

命題 3.1 $p \geq 2$ とする．[A1], [A2](2, 2), [A3] を仮定する．このとき，$nh_n^p \to 0$ に対して，次が成り立つ．すべての $M > 0$ に対して，

$$\sup_n E_{\theta^*}\left[\left|n^{\frac{1}{p}}(\hat{\theta}_{1,n}^{(0)} - \theta_1^*)\right|^M\right] < \infty.$$

次に，適応的最尤型推定量について考える．$k_0 = \left[\frac{p}{2}\right]$, $l_0 = \left[\frac{p-1}{2}\right]$ とする．タイプ I の適応的最尤型推定量 $\hat{\theta}_{1,n}^{(l_0)}$ と $\hat{\theta}_{2,n}^{(k_0)}$ は次のように定義される．$k = 1, 2, \ldots, k_0$ に対して，

$$\begin{aligned} U_{p,n}(\hat{\theta}_{1,n}^{(k-1)}, \hat{\theta}_{2,n}^{(k)}) &= \sup_{\theta_2\in\Theta_2} U_{p,n}(\hat{\theta}_{1,n}^{(k-1)}, \theta_2), \\ U_{p,n}(\hat{\theta}_{1,n}^{(k)}, \hat{\theta}_{2,n}^{(k)}) &= \sup_{\theta_1\in\Theta_1} U_{p,n}(\theta_1, \hat{\theta}_{2,n}^{(k)}). \end{aligned}$$

例えば $p = 4$ $(nh_n^4 \to 0)$ の場合を考える．$k_0 = 2$ かつ $l_0 = 1$ であることに注意して，次のように導出される．

Step 0: $U_n^{(0)}(\hat{\theta}_{1,n}^{(0)}) = \sup_{\theta_1\in\Theta_1} U_n^{(0)}(\theta_1)$ を満たす初期最尤型推定量 $\hat{\theta}_{1,n}^{(0)}$ を求める．

Step 1: $U_{p,n}(\hat{\theta}_{1,n}^{(0)}, \hat{\theta}_{2,n}^{(1)}) = \sup_{\theta_2\in\Theta_2} U_{p,n}(\hat{\theta}_{1,n}^{(0)}, \theta_2)$ を満たす θ_2 の 1-step 適応的最尤型推定量 $\hat{\theta}_{2,n}^{(1)}$ を求める．さらに，$U_{p,n}(\hat{\theta}_{1,n}^{(1)}, \hat{\theta}_{2,n}^{(1)}) = \sup_{\theta_1\in\Theta_1} U_{p,n}(\theta_1, \hat{\theta}_{2,n}^{(1)})$ を満たす θ_1 の 1-step 適応的最尤型推定量 $\hat{\theta}_{1,n}^{(1)}$ を求める．これにより，l_0-step 適応的最尤型推定量 $\hat{\theta}_{1,n}^{(l_0)}$ が求められる．

Step 2: $U_{p,n}(\hat{\theta}_{1,n}^{(1)}, \hat{\theta}_{2,n}^{(2)}) = \sup_{\theta_2\in\Theta_2} U_{p,n}(\hat{\theta}_{1,n}^{(1)}, \theta_2)$ を満たす θ_2 の 2-step 適応的最尤型推定量 $\hat{\theta}_{2,n}^{(2)}$ を求める．ここで，k_0-step 適応的最尤型推定量 $\hat{\theta}_{2,n}^{(k_0)}$ が求まる．

命題 3.2 $k \in \mathbf{N}$, $p \geq 2k+1$ とする．[A1], [A2]$(2k_0, 2k_0+1)$, [A3], [A4] を仮定する．このとき，すべての $M > 0$ に対して，$nh_n^p \to 0$ の下で，

$$\sup_n E_{\theta^*}\left[\left|(nh_n)^{\frac{k}{p-1}}(\hat{\theta}_{2,n}^{(k)} - \theta_2^*)\right|^M\right] < \infty.$$

命題 3.3 $k \in \mathbf{N}$, $p \geq 2(k+1)$ とする．[$A1$], [$A2$]$(2k_0, 2k_0+1)$, [$A3$], [$A4$] を仮定する．このとき，すべての $M>0$ に対して，$nh_n^p \to 0$ の下で，

$$\sup_n E_{\theta^*}\left[\left|n^{\frac{k+1}{p}}(\hat{\theta}_{1,n}^{(k)} - \theta_1^*)\right|^M\right] < \infty.$$

命題 3.1 と命題 3.2 そして命題 3.3 を用いて，$p=2k$ のとき，すべての $M>0$ に対して，

$$\sup_n E_{\theta^*}\left[\left|(\sqrt{n}(\hat{\theta}_{1,n}^{(k-1)} - \theta_1^*), \sqrt{nh_n}(\hat{\theta}_{2,n}^{(k)} - \theta_2^*))\right|^M\right] < \infty.$$

また，$p=2k+1$ のとき, すべての $M>0$ に対して,

$$\sup_n E_{\theta^*}\left[\left|(\sqrt{n}(\hat{\theta}_{1,n}^{(k)} - \theta_1^*), \sqrt{nh_n}(\hat{\theta}_{2,n}^{(k)} - \theta_2^*))\right|^M\right] < \infty.$$

ゆえに，すべての $M>0$ に対して,

$$\sup_n E_{\theta^*}\left[\left|(\sqrt{n}(\hat{\theta}_{1,n}^{(l_0)} - \theta_1^*), \sqrt{nh_n}(\hat{\theta}_{2,n}^{(k_0)} - \theta_2^*))\right|^M\right] < \infty$$

が成り立つ.

定理 3.1 $p \geq 2$, $l_0 = \left[\frac{p-1}{2}\right]$, $k_0 = \left[\frac{p}{2}\right]$ とする．[$A1$], [$A2$]$(2k_0, 2k_0+1)$, [$A3$], [$A4$] を仮定する．このとき，$nh_n^p \to 0$ の下で,

$$(\sqrt{n}(\hat{\theta}_{1,n}^{(l_0)} - \theta_1^*), \sqrt{nh_n}(\hat{\theta}_{2,n}^{(k_0)} - \theta_2^*)) \xrightarrow{d} (\zeta_1, \zeta_2) \sim N_{p_1+q_1}(0, I^{-1}(\theta^*)).$$

さらに，すべての多項式増大な連続関数 f に対して,

$$E_{\theta^*}[f(\sqrt{n}(\hat{\theta}_{1,n}^{(l_0)} - \theta_1^*), \sqrt{nh_n}(\hat{\theta}_{2,n}^{(k_0)} - \theta_2^*))] \to \mathbb{E}[f(\zeta_1, \zeta_2)]$$

が成り立つ.

3.2 タイプ II の適応的最尤型推定

次の擬似対数尤度関数を定義する.

$$\begin{aligned}
\mathcal{U}_n^{(1)}(\theta_1) &= U_n^{(0)}(\theta_1), \\
\mathcal{U}_n^{(2)}(\theta) &= -\frac{1}{2}\sum_{i=1}^n \left\{h_n^{-1}B_{i-1}^{-1}(\theta_1)[(\Delta X_i - h_n a_{i-1}(\theta_2))^{\otimes 2}] + \log\det(B_{i-1}(\theta_1))\right\}, \\
\mathcal{U}_n^{(p)}(\theta_1, \theta_2) &= U_{p,n}(\theta_1, \theta_2), \quad (p \geq 3).
\end{aligned}$$

$k_0 \in \mathbf{N}$ とする．タイプ II の適応的最尤型推定量 $\hat{\vartheta}_{1,n}^{(2k_0-1)}$, $\hat{\vartheta}_{2,n}^{(2k_0)}$, $\hat{\vartheta}_{1,n}^{(2k_0+1)}$ は次で定義される．$k=1,2,\ldots,k_0$ に対して,

$$\begin{aligned}
\mathcal{U}_n^{(2k)}(\hat{\vartheta}_{1,n}^{(2k-1)}, \hat{\vartheta}_{2,n}^{(2k)}) &= \sup_{\theta_2 \in \Theta_2} \mathcal{U}_n^{(2k)}(\hat{\vartheta}_{1,n}^{(2k-1)}, \theta_2), \\
\mathcal{U}_n^{(2k+1)}(\hat{\vartheta}_{1,n}^{(2k+1)}, \hat{\vartheta}_{2,n}^{(2k)}) &= \sup_{\theta_1 \in \Theta_1} \mathcal{U}_n^{(2k+1)}(\theta_1, \hat{\vartheta}_{2,n}^{(2k)}).
\end{aligned}$$

ただし，$\hat{\vartheta}_{1,n}^{(1)}$ は $\mathcal{U}_n^{(1)}(\hat{\vartheta}_{1,n}^{(1)})=\sup_{\theta_1\in\Theta_1}\mathcal{U}_n^{(1)}(\theta_1)$ で定義された θ_1 の初期最尤型推定量である．

例えば $p=5$ $(nh_n^5\to 0)$ のとき，$\hat{\vartheta}_{2,n}^{(4)}$, $\hat{\vartheta}_{1,n}^{(5)}$ は次の手順で求めることができる．

$$\begin{aligned}
\hat{\vartheta}_{1,n}^{(1)} &: \mathcal{U}_n^{(1)}(\hat{\vartheta}_{1,n}^{(1)})=\sup_{\theta_1\in\Theta_1}\mathcal{U}_n^{(1)}(\theta_1),\\
\hat{\vartheta}_{2,n}^{(2)} &: \mathcal{U}_n^{(2)}(\hat{\vartheta}_{1,n}^{(1)},\hat{\vartheta}_{2,n}^{(2)})=\sup_{\theta_2\in\Theta_2}\mathcal{U}_n^{(2)}(\hat{\vartheta}_{1,n}^{(1)},\theta_2),\\
\hat{\vartheta}_{1,n}^{(3)} &: \mathcal{U}_n^{(3)}(\hat{\vartheta}_{1,n}^{(3)},\hat{\vartheta}_{2,n}^{(2)})=\sup_{\theta_1\in\Theta_1}\mathcal{U}_n^{(3)}(\theta_1,\hat{\vartheta}_{2,n}^{(2)}),\\
\hat{\vartheta}_{2,n}^{(4)} &: \mathcal{U}_n^{(4)}(\hat{\vartheta}_{1,n}^{(3)},\hat{\vartheta}_{2,n}^{(4)})=\sup_{\theta_2\in\Theta_2}\mathcal{U}_n^{(4)}(\hat{\vartheta}_{1,n}^{(3)},\theta_2),\\
\hat{\vartheta}_{1,n}^{(5)} &: \mathcal{U}_n^{(5)}(\hat{\vartheta}_{1,n}^{(5)},\hat{\vartheta}_{2,n}^{(4)})=\sup_{\theta_1\in\Theta_1}\mathcal{U}_n^{(5)}(\theta_1,\hat{\vartheta}_{2,n}^{(4)}).
\end{aligned}$$

$\hat{\vartheta}_{2,n}^{(2k)}$ と $\hat{\vartheta}_{1,n}^{(2k+1)}$ はそれぞれ，擬似対数尤度関数 $\mathcal{U}_n^{(2k)}(\theta)$ と $\mathcal{U}_n^{(2k+1)}(\theta)$ を用いて定義されている．さらに，$\hat{\vartheta}_{2,n}^{(2k+2)}$ と $\hat{\vartheta}_{1,n}^{(2k+3)}$ はそれぞれ，アップグレードされた擬似対数尤度関数 $\mathcal{U}_n^{(2k+2)}(\theta)$ と $\mathcal{U}_n^{(2k+3)}(\theta)$ から得られていることがわかる．

定理 3.2 $p\geq 2$, $l_0=\left[\frac{p-1}{2}\right]$, $k_0=\left[\frac{p}{2}\right]$ とする．$[A1]$, $[A2](2k_0,2k_0+1)$, $[A3]$, $[A4]$ とする．このとき，$nh_n^p\to 0$ の下で，

$$(\sqrt{n}(\hat{\vartheta}_{1,n}^{(2l_0+1)}-\theta_1^*),\sqrt{nh_n}(\hat{\vartheta}_{2,n}^{(2k_0)}-\theta_2^*))\xrightarrow{d}(\zeta_1,\zeta_2).$$

さらに，任意の多項式増大な連続関数 f に対して，

$$E_{\theta^*}[f(\sqrt{n}(\hat{\vartheta}_{1,n}^{(2l_0+1)}-\theta_1^*),\sqrt{nh_n}(\hat{\vartheta}_{2,n}^{(2k_0)}-\theta_2^*))]\to\mathbb{E}[f(\zeta_1,\zeta_2)]$$

が成り立つ．

注 1 $nh_n^p\to 0$ $(p\geq 3)$ の場合，タイプ II の適応的最尤型推定量は初期最尤型推定量 $\hat{\vartheta}_{1,n}^{(1)}$ と擬似対数尤度関数 $\mathcal{U}_n^{(2)}(\theta_1,\theta_2),U_{3,n}(\theta_1,\theta_2),\ldots,U_{p,n}(\theta_1,\theta_2)$ を用いて導出される．大まかに言って，$p=2m+1$ $(k_0=m,\ l_0=m)$ の場合は，次のようになる．

タイプ II の適応的最尤型推定量	タイプ I の適応的最尤型推定量
$\hat{\vartheta}_{2,n}^{(2)} \leftarrow \mathcal{U}_n^{(2)}(\hat{\vartheta}_{1,n}^{(1)},\theta_2)$	$\hat{\theta}_{2,n}^{(1)} \leftarrow U_{2m+1,n}(\hat{\theta}_{1,n}^{(0)},\theta_2)$
$\hat{\vartheta}_{1,n}^{(3)} \leftarrow U_{3,n}(\theta_1,\hat{\vartheta}_{2,n}^{(2)})$	$\hat{\theta}_{1,n}^{(1)} \leftarrow U_{2m+1,n}(\theta_1,\hat{\theta}_{2,n}^{(1)})$
$\vdots$	$\vdots$
$\vdots$	$\vdots$
$\hat{\vartheta}_{2,n}^{(2m)} \leftarrow U_{2m,n}(\hat{\vartheta}_{1,n}^{(2m-1)},\theta_2)$	$\hat{\theta}_{2,n}^{(m)} \leftarrow U_{2m+1,n}(\hat{\theta}_{1,n}^{(m-1)},\theta_2)$
$\hat{\vartheta}_{1,n}^{(2m+1)} \leftarrow U_{2m+1,n}(\theta_1,\hat{\vartheta}_{2,n}^{(2m)})$	$\hat{\theta}_{1,n}^{(m)} \leftarrow U_{2m+1,n}(\theta_1,\hat{\theta}_{2,n}^{(m)})$

ここで，擬似対数尤度関数 $\mathcal{U}_n^{(2)}(\theta_1,\theta_2), U_{3,n}(\theta_1,\theta_2),\ldots,U_{2m,n}(\theta_1,\theta_2)$ は $U_{2m+1,n}(\theta_1,\theta_2)$ よりシンプルであることに注意する．タイプIの適応的最尤型推定量 $(\hat{\theta}_{1,n}^{(l_0)},\hat{\theta}_{2,n}^{(k_0)})$ と比較して，タイプIIの適応的最尤型推定量 $(\hat{\vartheta}_{1,n}^{(2l_0+1)},\hat{\vartheta}_{2,n}^{(2k_0)})$ は数値計算上，効率よく導出される．

3.3 タイプIIIの適応的最尤型推定

Kessler (1995) の結果を応用して，タイプIIIの適応的最尤型推定を提案する．$\bar{\theta}=(\bar{\theta}_1,\bar{\theta}_2)$ とする．

$$
\begin{aligned}
\mathcal{V}_n^{(1)}(\theta_1) &= U_n^{(0)}(\theta_1),\\
\mathcal{V}_n^{(2)}(\theta_2 \mid \bar{\theta}) &= -\frac{1}{2}\sum_{i=1}^{n} h_n^{-1}B_{i-1}^{-1}(\bar{\theta}_1)[(X_{t_i^n}-X_{t_{i-1}^n}-h_n a_{i-1}(\theta_2))^{\otimes 2}].
\end{aligned}
$$

そして，$k=1,\ldots,k_0$ に対して，

$$
\begin{aligned}
\mathcal{V}_n^{(2k+1)}(\theta_1 \mid \bar{\theta}) &= -\frac{1}{2}\sum_{i=1}^{n}\left\{ h_n^{-1}B_{i-1}^{-1}(\theta_1)\left[(X_{t_i^n}-X_{t_{i-1}^n})^{\otimes 2}-\sum_{j=2}^{k+1}h_n^j\bar{D}_{i-1}^{(j)}(\bar{\theta})\right]\right.\\
&\qquad\qquad\left. +\log\det B_{i-1}(\theta_1)\right\},\\
\mathcal{V}_n^{(2k+2)}(\theta_2 \mid \bar{\theta}) &= -\frac{1}{2}\sum_{i=1}^{n} h_n^{-1}B_{i-1}^{-1}(\bar{\theta}_1)\\
&\qquad\times\left[\left(X_{t_i^n}-X_{t_{i-1}^n}-h_n a_{i-1}(\theta_2)-\sum_{j=2}^{k+1}h_n^j\bar{r}_{i-1}^{(j)}(\bar{\theta})\right)^{\otimes 2}\right].
\end{aligned}
$$

ここで，$l,m=1,\ldots,d$ に対して，$f_l(x)=x_l$, $h_{lm}(x)=(x-X_{t_{i-1}^n})_l(x-X_{t_{i-1}^n})_m$,

$$
\bar{D}_{i-1}^{(j)}(\bar{\theta})_{lm}=\frac{1}{j!}L_{\bar{\theta}}^j h_{lm}(X_{t_{i-1}^n}),\quad \bar{r}_{i-1}^{(j)}(\bar{\theta})_l=\frac{1}{j!}L_{\bar{\theta}}^j f_l(X_{t_{i-1}^n}).
$$

タイプIIIの適応的最尤型推定量 $\check{\vartheta}_{1,n}^{(2k_0-1)}$，$\check{\vartheta}_{2,n}^{(2k_0)}$，$\check{\vartheta}_{1,n}^{(2k_0+1)}$ は次のように定義される．$k=1,2,\ldots,k_0$ に対して，

$$
\begin{aligned}
\mathcal{V}_n^{(1)}(\check{\vartheta}_{1,n}^{(1)}) &= \sup_{\theta_1\in\Theta_1}\mathcal{V}_n^{(1)}(\theta_1),\\
\mathcal{V}_n^{(2k)}(\check{\vartheta}_{2,n}^{(2k)} \mid \check{\vartheta}_{1,n}^{(2k-1)},\check{\vartheta}_{2,n}^{(2k-2)}) &= \sup_{\theta_2\in\Theta_2}\mathcal{V}_n^{(2k)}(\theta_2 \mid \check{\vartheta}_{1,n}^{(2k-1)},\check{\vartheta}_{2,n}^{(2k-2)}),\\
\mathcal{V}_n^{(2k+1)}(\check{\vartheta}_{1,n}^{(2k+1)} \mid \check{\vartheta}_{1,n}^{(2k-1)},\check{\vartheta}_{2,n}^{(2k)}) &= \sup_{\theta_1\in\Theta_1}\mathcal{V}_n^{(2k+1)}(\theta_1 \mid \check{\vartheta}_{1,n}^{(2k-1)},\check{\vartheta}_{2,n}^{(2k)}).
\end{aligned}
$$

ここで，$\check{\vartheta}_{2,n}^{(0)}=0$ とする．

定理 3.3 $p\geq 2$ とする．$l_0=\left[\frac{p-1}{2}\right]$, $k_0=\left[\frac{p}{2}\right]$ とする．$[A1]$, $[A2](2k_0,2k_0+1)$, $[A3]$, $[A4]$ を仮定する．このとき，$nh_n^p\to 0$ の下で，

$$
(\sqrt{n}(\check{\vartheta}_{1,n}^{(2l_0+1)}-\theta_1^*),\sqrt{nh_n}(\check{\vartheta}_{2,n}^{(2k_0)}-\theta_2^*))\xrightarrow{d}(\zeta_1,\zeta_2).
$$

さらに，任意の多項式増大な連続関数 f に対して，

$$E_{\theta^*}[f(\sqrt{n}(\check{\vartheta}_{1,n}^{(2l_0+1)}-\theta_1^*),\sqrt{nh_n}(\check{\vartheta}_{2,n}^{(2k_0)}-\theta_2^*))]\to\mathbb{E}[f(\zeta_1,\zeta_2)]$$

が成り立つ.

3.4 数値実験

次の 2 次元拡散過程を考える.

$$dX_t=\begin{pmatrix}-\alpha_1X_{t,1}+\alpha_2(\sin X_{t,2}+2)\\ \alpha_3(\cos X_{t,1}+2)-\alpha_4X_{t,2}\end{pmatrix}dt+\begin{pmatrix}\beta_1 & 1\\ 1 & \beta_2\end{pmatrix}dw_t,$$
$$t\in[0,T],\quad X_0=\begin{pmatrix}100\\ 110\end{pmatrix}. \tag{3.2}$$

ここで，$\theta_1=(\beta_1,\beta_2)$ と $\theta_2=(\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3,\alpha_4)$ は未知パラメータで，真値は $\theta_1^*=(\beta_1^*,\beta_2^*)=(5,4)$, $\theta_2^*=(\alpha_1^*,\alpha_2^*,\alpha_3^*,\alpha_4^*)=(0.5,30,15,0.3)$ である.

数値実験により，$p=2$ ($k_0=1$, $l_0=0$) 及び $p=3$ ($k_0=1$, $l_0=1$) の場合について，提案したタイプ III の適応的推定量のパフォーマンスを検証する．$h_n=1/250$ とし，各 $T=5,10,15,20$ に対して，Milstein スキームによって，1000 本のサンプルパスを発生させて，各推定量の平均と標準偏差を算出した．R 言語を使用し，最適化には Nelder-Mead 法による **optim()** を用いた.

表 1 と表 2 は，初期値 $(\theta_{2,0},\theta_{1,0})=(0.3,40,20,0.4,6,3)$ と $(\theta_{2,0},\theta_{1,0})=(1,100,100,1,10,10)$ を用いた同時最尤型推定量のシミュレーション結果であり, 表 3 は初期値 $(\theta_{2,0},\theta_{1,0})=(1,100,100,1,10,10)$ を用いたタイプ III 適応的最尤型推定量のシミュレーション結果である．真値は $(\theta_2^*,\theta_1^*)=(0.5,30,15,0.3,5,4)$ なので，初期値が真値に近い状況で最適化を行ったシミュレーション結果 (表 1) は，多少のバイアスがあるものの比較的安定している. これは同時最尤型推定量の漸近的な結果を実証している．ところが実際に同時最尤型推定量を導出する場合は，真値に近い初期値を選択できる保障はないので，初期値が真値とかけ離れた場合も検証してみることにする．表 2 からわかるように，$p=2,3$ の同時最尤型推定量 $(\hat{\theta}_{1,n}^{(p)},\hat{\theta}_{2,n}^{(p)})$ はともに，不適切な初期値を用いると最適化に失敗して，推定結果が非常に不安定になっている．一方，表 3 から，$p=2$ のタイプ III 適応的最尤型推定量 $(\hat{\vartheta}_{1,n}^{(1)},\hat{\vartheta}_{2,n}^{(2)})$ は小さいバイアスがあるものの，同時最尤型推定量に比べると断然よいパフォーマンスであると言える．$p=3$ のタイプ III 適応的最尤型推定量 $(\check{\vartheta}_{1,n}^{(3)},\check{\vartheta}_{2,n}^{(2)})$ に関しては，ドリフト推定量に小さなバイアスがあるが，ボラティリティ推定量は $p=2$ の場合より改善していることがわかる．適応的最尤型推定量は，パラメータ空間をドリフトパラメータ空間とボラティリティパラメータ空間に分離することにより，より効率的な最適化および数値計算が行えることがわかる．また，タイプ III 適応的最尤型推定量は，タイプ I, II と比べて計

表 1 $p = 2, 3$ の場合の同時最尤型推定量．ただし，真値は $(\theta_2^*, \theta_1^*) = (0.5, 30, 15, 0.3, 5, 4)$ であり，初期値は $(\theta_{2,0}, \theta_{1,0}) = (0.3, 40, 20, 0.4, 6, 3)$.

T	$\tilde{\alpha}_1^{(2)}$	$\tilde{\alpha}_2^{(2)}$	$\tilde{\alpha}_3^{(2)}$	$\tilde{\alpha}_4^{(2)}$	$\tilde{\beta}_1^{(2)}$	$\tilde{\beta}_2^{(2)}$
5	0.532	31.77	16.48	0.329	4.999	4.002
	(0.081)	(4.42)	(3.53)	(0.069)	(0.100)	(0.082)
10	0.534	31.95	16.12	0.322	5.004	4.002
	(0.071)	(4.00)	(3.21)	(0.063)	(0.076)	(0.060)
15	0.534	31.99	15.87	0.317	5.005	4.003
	(0.067)	(3.87)	(2.98)	(0.059)	(0.066)	(0.051)
20	0.534	31.98	15.77	0.315	5.005	4.002
	(0.065)	(3.80)	(2.84)	(0.057)	(0.059)	(0.046)

T	$\tilde{\alpha}_1^{(3)}$	$\tilde{\alpha}_2^{(3)}$	$\tilde{\alpha}_3^{(3)}$	$\tilde{\alpha}_4^{(3)}$	$\tilde{\beta}_1^{(3)}$	$\tilde{\beta}_2^{(3)}$
5	0.538	32.096	16.76	0.334	4.999	3.999
	(0.079)	(4.27)	(3.48)	(0.069)	(0.098)	(0.081)
10	0.539	32.24	16.38	0.327	5.0027	4.0007
	(0.068)	(3.87)	(3.08)	(0.061)	(0.074)	(0.058)
15	0.539	32.29	16.22	0.324	5.003	4.001
	(0.065)	(3.74)	(2.87)	(0.057)	(0.064)	(0.051)
20	0.538	32.24	16.05	0.321	5.004	4.0004
	(0.063)	(3.64)	(2.76)	(0.055)	(0.057)	(0.045)

表 2 $p = 2, 3$ の場合の同時最尤型推定量．ただし，真値は $(\theta_2^*, \theta_1^*) = (0.5, 30, 15, 0.3, 5, 4)$ であり，初期値は $(\theta_{2,0}, \theta_{1,0}) = (1, 100, 100, 1, 10, 10)$.

T	$\tilde{\alpha}_1^{(2)}$	$\tilde{\alpha}_2^{(2)}$	$\tilde{\alpha}_3^{(2)}$	$\tilde{\alpha}_4^{(2)}$	$\tilde{\beta}_1^{(2)}$	$\tilde{\beta}_2^{(2)}$
5	0.920	53.54	31.29	0.615	5.494	4.344
	(0.68)	(37.90)	(28.07)	(0.55)	(0.805)	(0.64)
10	0.905	53.41	31.049	0.616	5.481	4.335
	(0.64)	(36.78)	(27.36)	(0.54)	(0.79)	(0.62)
15	0.9152	54.37	29.80	0.595	5.515	4.317
	(0.64)	(37.32)	(26.20)	(0.524)	(0.807)	(0.608)
20	0.927	55.17	29.28	0.585	5.526	4.313
	(0.64)	(37.43)	(25.41)	(0.51)	(0.82)	(0.599)

T	$\tilde{\alpha}_1^{(3)}$	$\tilde{\alpha}_2^{(3)}$	$\tilde{\alpha}_3^{(3)}$	$\tilde{\alpha}_4^{(3)}$	$\tilde{\beta}_1^{(3)}$	$\tilde{\beta}_2^{(3)}$
5	0.936	54.34	30.75	0.605	5.509	4.314
	(0.690)	(37.82)	(27.02)	(0.530)	(0.822)	(0.619)
10	0.909	53.61	31.32	0.621	5.493	4.336
	(0.645)	(36.78)	(27.33)	(0.543)	(0.801)	(0.633)
15	0.922	54.70	30.38	0.604	5.518	4.327
	(0.645)	(37.24)	(26.42)	(0.527)	(0.815)	(0.614)
20	0.940	55.85	29.75	0.594	5.521	4.310
	(0.646)	(37.57)	(25.42)	(0.509)	(0.834)	(0.593)

表 3　$p=2,3$ の場合のタイプ III の適応的最尤型推定量．ただし，真値は $(\theta_2^*,\theta_1^*)=(0.5,30,15,0.3,5,4)$ であり，初期値は $(\theta_{2,0},\theta_{1,0})=(1,100,100,1,10,10)$．

T	$\hat{\alpha}_1^{(2)}$	$\hat{\alpha}_2^{(2)}$	$\hat{\alpha}_3^{(2)}$	$\hat{\alpha}_4^{(2)}$	$\hat{\beta}_1^{(1)}$	$\hat{\beta}_2^{(1)}$	$\tilde{\beta}_1^{(3)}$	$\tilde{\beta}_2^{(3)}$
5	0.496	29.75	14.77	0.296	5.188	4.072	4.993	3.997
	(0.056)	(3.00)	(2.35)	(0.048)	(0.097)	(0.077)	(0.092)	(0.076)
10	0.495	29.68	14.74	0.295	5.18	4.070	4.996	3.998
	(0.038)	(2.11)	(1.67)	(0.034)	(0.069	(0.053)	(0.066)	(0.053)
15	0.494	29.65	14.74	0.295	5.185	4.07	4.996	4.000
	(0.041)	(2.35)	(1.47)	(0.030)	(0.056)	(0.044)	(0.108)	(0.110)
20	0.494	29.61	14.73	0.295	5.185	4.069	4.997	3.999
	(0.033)	(1.81)	(1.32)	(0.027)	(0.049)	(0.038)	(0.070)	(0.077)

算速度が速くなることが確認された．これは，タイプ III の擬似対数尤度関数がタイプ I, II よりもシンプルであり，最適化が容易になったことが理由と考えられる．しかしながら，このことから，タイプ I, II の適応的最尤型推定量が不要であるということではない．実際，タイプ I やタイプ II の方がタイプ III よりも漸近挙動が良くなる数値実験結果がある．特に，タイプ I のドリフト推定量は良いパフォーマンスをしており，タイプ II のボラティリティ推定量は安定している．詳細は，Uchida and Yoshida (2012) を参照．

4. 最近の発展

4.1 適応的ベイズ型推定量

連続観測における確率微分方程式モデルのベイズ推測は古くから研究されている (Basawa and Prakasa Rao (1980))．Kutoyants (1984, 1994, 2004) は Ibragimov-Has'minskii アプローチ (Ibragimov-Has'minskii (1981)) を確率過程に一般化して，ベイズ推測を展開した．一方，離散観測における確率微分方程式のベイズ推測については，Yoshida (2005, 2011), Ogihara and Yoshida (2011, 2012), Uchida and Yoshida (2013a) などの先行研究がある．本節では, 3 節と同様の確率微分方程式モデルに対して, 適応的ベイズ型推定量を構成し, その漸近的性質について考察する．詳細については, Uchida and Yoshida (2013b) を参照．$i=1,2$ に対して，θ_i の事前分布 $\pi_i(\theta_i)$ は連続であり，$0<\inf_{\theta_i\in\Theta_i}\pi_i(\theta_i)\le\sup_{\theta_i\in\Theta_i}\pi_i(\theta_i)<\infty$ を満たすとする．$l_0=\left[\frac{p-1}{2}\right]$, $k_0=\left[\frac{p}{2}\right]$ とする．

適応的ベイズ型推定量 $\tilde{\vartheta}_{1,p,n}^{(2l_0+1)}$ と $\tilde{\vartheta}_{2,p,n}^{(2k_0)}$ は次のように定義される．$k=1,\ldots,l_0$ に対して，

$$\begin{aligned}
\tilde{\vartheta}_{1,p,n}^{(2k-1)} &= \frac{\int_{\Theta_1}\theta_1\exp\left\{\mathcal{K}_{p,n}^{(2k-1)}(\theta_1\mid\tilde{\vartheta}_{1,p,n}^{(2k-3)},\tilde{\vartheta}_{2,p,n}^{(2k-2)})\right\}\pi_1(\theta_1)d\theta_1}{\int_{\Theta_1}\exp\left\{\mathcal{K}_{p,n}^{(2k-1)}(\theta_1\mid\tilde{\vartheta}_{1,p,n}^{(2k-3)},\tilde{\vartheta}_{2,p,n}^{(2k-2)})\right\}\pi_1(\theta_1)d\theta_1},\\
\tilde{\vartheta}_{2,p,n}^{(2k)} &= \frac{\int_{\Theta_2}\theta_2\exp\left\{\tilde{\mathcal{K}}_{p,n}^{(2k)}(\theta_2\mid\tilde{\vartheta}_{1,p,n}^{(2k-1)},\tilde{\vartheta}_{2,p,n}^{(2k-2)})\right\}\pi_2(\theta_2)d\theta_2}{\int_{\Theta_2}\exp\left\{\tilde{\mathcal{K}}_{p,n}^{(2k)}(\theta_2\mid\tilde{\vartheta}_{1,p,n}^{(2k-1)},\tilde{\vartheta}_{2,p,n}^{(2k-2)})\right\}\pi_2(\theta_2)d\theta_2}.
\end{aligned}$$

そして，

$$\tilde{\vartheta}_{1,p,n}^{(2l_0+1)} = \frac{\int_{\Theta_1}\theta_1 \exp\left\{\mathcal{V}_n^{(2l_0+1)}(\theta_1 \mid \tilde{\theta}_{1,p,n}^{(2l_0-1)}, \tilde{\theta}_{2,p,n}^{(2l_0)})\right\}\pi_1(\theta_1)d\theta_1}{\int_{\Theta_1}\exp\left\{\mathcal{V}_n^{(2l_0+1)}(\theta_1 \mid \tilde{\theta}_{1,p,n}^{(2l_0-1)}, \tilde{\theta}_{2,p,n}^{(2l_0)})\right\}\pi_1(\theta_1)d\theta_1},$$

$$\tilde{\vartheta}_{2,p,n}^{(2(l_0+1))} = \frac{\int_{\Theta_2}\theta_2 \exp\left\{\mathcal{V}_n^{(2(l_0+1))}(\theta_2 \mid \tilde{\theta}_{1,p,n}^{(2l_0+1)}, \tilde{\theta}_{2,p,n}^{(2l_0)})\right\}\pi_2(\theta_2)d\theta_2}{\int_{\Theta_2}\exp\left\{\mathcal{V}_n^{(2(l_0+1))}(\theta_2 \mid \tilde{\theta}_{1,p,n}^{(2l_0+1)}, \tilde{\theta}_{2,p,n}^{(2l_0)})\right\}\pi_2(\theta_2)d\theta_2}.$$

ここで，$\tilde{\vartheta}_{1,p,n}^{(-1)} = 0$, $\tilde{\vartheta}_{2,p,n}^{(0)} = 0$ とし，$\mathcal{V}_n^{(2k-1)}$ と $\mathcal{V}_n^{(2k)}$ は 3.3 節で定義された擬似対数尤度関数で，

$$\mathcal{K}_{p,n}^{(2k-1)}(\theta_1 \mid \bar{\theta}) = \frac{1}{n^{1-\frac{2k}{p}}}\mathcal{V}_n^{(2k-1)}(\theta_1 \mid \bar{\theta}),$$

$$\tilde{\mathcal{K}}_{p,n}^{(2k)}(\theta_2 \mid \bar{\theta}) = \frac{1}{(nh_n)^{1-\frac{2k}{p-1}}}\mathcal{V}_n^{(2k)}(\theta_2 \mid \bar{\theta})$$

である．また，$l_0 \le k_0 \le l_0+1$ であることに注意する．

命題 4.1 $p \ge 2$, $l_0 = \left[\frac{p-1}{2}\right]$, $k_0 = \left[\frac{p}{2}\right]$ とする．$[A1]$, $[A2](2k_0, 2k_0+1)$, $[A3]$, $[A4]$ を仮定する．このとき，すべての $M>0$ に対して，$nh_n^p \to 0$ の下，

$$\sup_{n\in\mathbf{N}} E_{\theta^*}\left[\left|(\sqrt{n}(\tilde{\vartheta}_{1,p,n}^{(2l_0+1)} - \theta_1^*), \sqrt{nh_n}(\tilde{\vartheta}_{2,p,n}^{(2k_0)} - \theta_2^*))\right|^M\right] < \infty$$

が成り立つ．

定理 4.1 $p \ge 2$, $l_0 = \left[\frac{p-1}{2}\right]$, $k_0 = \left[\frac{p}{2}\right]$ とする．$[A1]$, $[A2](2k_0, 2k_0+1)$, $[A3]$, $[A4]$ を仮定する．このとき，$nh_n^p \to 0$ の下，

$$(\sqrt{n}(\tilde{\vartheta}_{1,p,n}^{(2l_0+1)} - \theta_1^*), \sqrt{nh_n}(\tilde{\vartheta}_{2,p,n}^{(2k_0)} - \theta_2^*)) \xrightarrow{d} (\zeta_1, \zeta_2).$$

さらに，任意の多項式増大な連続関数 f に対して，

$$E_{\theta^*}[f(\sqrt{n}(\tilde{\vartheta}_{1,p,n}^{(2l_0+1)} - \theta_1^*), \sqrt{nh_n}(\tilde{\vartheta}_{2,p,n}^{(2k_0)} - \theta_2^*))] \to \mathbb{E}[f(\zeta_1, \zeta_2)]$$

が成り立つ．

本節では，タイプ III の適応的ベイズ型推定量の解説を行ったが，3 節と同様の擬似尤度関数を用いて，タイプ I, II の適応的ベイズ型推定量を導出することができ，それらが定理 4.1 と同様の漸近的性質を持つことが証明できる (Uchida and Yoshida (2013b)).

4.2 ハイブリッド・マルチステップ推定量

適応的最尤型推定量 (3 節) は最適化する際に初期値を決める必要がある．これに対し，適応的ベイズ型推定量 (4.1 節) は初期値の問題は回避できるが, 計算コストを無視できない．本節では, 両者の利点を活かした推定法を提案する．確率微分方程式モデルは 3 節と同様である．$l_0=\left[\frac{p-1}{2}\right]$, $m_0=\left[\frac{p-2}{2}\right]$ そして $k_0=\left[\frac{p}{2}\right]$ とする．

ハイブリッド・マルチステップ推定量 $\check\theta_{1,n}^{(l_0)}$ と $\check\theta_{2,n}^{(m_0)}$ を次のように求める．$k=1,\dots,l_0$ に対して，

$$\begin{aligned}
\check\theta_{1,n}^{(0)} &= \tilde\vartheta_{1,p,n}^{(1)}, \quad (\textbf{4.1}\text{ 節で求めた } \theta_1 \text{ の初期ベイズ型推定量}),\\
\check\theta_{2,n}^{(0)} &= \tilde\vartheta_{2,p,n}^{(2)}, \quad (\textbf{4.1}\text{ 節で求めた } \theta_2 \text{ の適応的ベイズ型推定量}),\\
\check\theta_{1,n}^{(k)} &= \check\theta_{1,n}^{(k-1)}-\left[\partial_{\theta_1}^2\mathcal{V}_n^{(2k+1)}(\check\theta_{1,n}^{(k-1)}\,|\,\check\theta_{1,n}^{(k-1)},\check\theta_{2,n}^{(k-1)})\right]^{-1}\left[\partial_{\theta_1}\mathcal{V}_n^{(2k+1)}(\check\theta_{1,n}^{(k-1)}\,|\,\check\theta_{1,n}^{(k-1)},\check\theta_{2,n}^{(k-1)})\right],\\
\check\theta_{2,n}^{(k)} &= \check\theta_{2,n}^{(k-1)}-\left[\partial_{\theta_2}^2\mathcal{V}_n^{(2k+2)}(\check\theta_{2,n}^{(k-1)}\,|\,\check\theta_{1,n}^{(k)},\check\theta_{2,n}^{(k-1)})\right]^{-1}\left[\partial_{\theta_2}\mathcal{V}_n^{(2k+2)}(\check\theta_{2,n}^{(k-1)}\,|\,\check\theta_{1,n}^{(k)},\check\theta_{2,n}^{(k-1)})\right].
\end{aligned}$$

ただし，上記の逆行列が存在しない場合は，単位行列としておく．

定理 4.2 $p\geq 2$, $l_0=\left[\frac{p-1}{2}\right]$, $m_0=\left[\frac{p-2}{2}\right]$, $k_0=\left[\frac{p}{2}\right]$ とする．$[A1]$, $[A2](2k_0,2k_0+1)$, $[A3]$, $[A4]$ を仮定する．このとき，$nh_n^p\to 0$ の下,

$$(\sqrt{n}(\check\theta_{1,n}^{(l_0)}-\theta_1^*),\sqrt{nh_n}(\check\theta_{2,n}^{(m_0)}-\theta_2^*))\xrightarrow{d}(\zeta_1,\zeta_2).$$

さらに，任意の多項式増大な連続関数 f に対して，

$$E_{\theta^*}[f(\sqrt{n}(\check\theta_{1,n}^{(l_0)}-\theta_1^*),\sqrt{nh_n}(\check\theta_{2,n}^{(m_0)}-\theta_2^*))]\to\mathbb{E}[f(\zeta_1,\zeta_2)]$$

が成り立つ．

提案した推定量は，3.3 節で定義された擬似対数尤度関数に基づいて導出されており, タイプ III のハイブリッド・マルチステップ推定量と呼ばれる．初期推定量としては, ベイズ型推定量を用いて, 最適化の代わりにニュートン・ラプソン法を用いて, 効率よく推定量を計算していることがわかる．3 節と同様の擬似尤度関数を用いて, タイプ I, II のハイブリッド・マルチステップ推定量を定義できる．そして, それらは定理 4.2 と同様の漸近的性質をもつ．詳細は，Kamatani and Uchida (2014) を参照．

4.3 情報量規準の一般化

2 節と同様の確率微分方程式モデルを考える．エルゴード的拡散過程のモデル選択のための情報量規準を $nh_n^2\to 0$ から $nh_n^p\to 0$ $(p\geq 2)$ の下で機能するように一般化する．

条件 $[\mathcal{C}1]$ の代わりに新たな条件を仮定する．

$[\mathcal{D}1](k,l)$ (i) $a_m(x,\theta_{m,2})\in\bar{C}_b^{5\vee k,5}(\mathbf{R}^d\times\Theta_{m,2};\mathbf{R}^d)$. (ii) $b_m(x,\theta_{m,1})\in C_b^{5\vee l,5}(\mathbf{R}^d\times\Theta_{m,1};\mathbf{R}^d\otimes\mathbf{R}^d)$.

推定量 $\hat{\theta}_{m,n}=(\hat{\theta}_{m,1,n},\hat{\theta}_{m,2,n})$ は次の条件を満足すると仮定する．任意の多項式増大な連続関数 f に対して，$nh_n^p\to 0$ の下，

$$E_{\theta^*}\left[f\left(\sqrt{n}\left(\hat{\theta}_{m,1,n}-\theta_{m,1,0}\right),\sqrt{nh_n}\left(\hat{\theta}_{m,2,n}-\theta_{m,2,0}\right)\right)\right]\to E[f(G_m)]. \qquad (4.1)$$

ここで，G_m は平均 0 で，共分散行列 $I_m^{-1}(\theta_{m,0})$ となる (p_m+q_m) 次元正規確率変数である．また，$nh_n^p\to 0$ の下，

$$\partial_\theta U_{m,p,n}(\hat{\theta}_{m,n})\left[\hat{\theta}_{m,n}-\theta_m^*\right]\xrightarrow{p} 0. \qquad (4.2)$$

ここで，$U_{m,p,n}(\theta_m)$ はモデル m に対する 2 節で定義した擬似対数尤度関数 $U_{p,n}$ である．

情報量規準 $IC^{(p)}(X_n,m)$ と平均対数尤度 $EL(X_n,m)$ を

$$\begin{aligned} IC^{(p)}(X_n,m) &= U_{m,p,n}(\hat{\theta}_{m,n})-U_{m,p,n}(\theta_m^*)+E_{Z_n}[\ell_{m,n}(Z_n,\theta_m^*)]-\dim(\Theta_m), \\ EL(X_n,m) &= E_{Z_n}[\ell_{m,n}(Z_n,\hat{\theta}_{m,n})] \end{aligned}$$

とする．

定理 4.3 $p\geq 2$, $m\in\{1,\ldots,M\}$ とする．$[\mathcal{D}\text{-}1](2k_0,2k_0+1)$, $[\mathcal{C}\text{-}2]$, $[\mathcal{C}\text{-}3]$ を仮定する．推定量 $\hat{\theta}_{m,n}=(\hat{\theta}_{m,1,n},\hat{\theta}_{m,2,n})$ は (4.1) と (4.2) を満たすとする．このとき，$nh_n^p\to 0$ の下，

$$E_{\theta^*}[IC^{(p)}(X_n,m)-EL(X_n,m)]=o(1)$$

が成り立つ．

2 節と同様に，統計モデルは真のモデルを含んでいることを仮定しているので，$i,j\in\{1,\ldots,M\}$ に対して，$U_{i,p,n}(\theta_{i,0})=U_{j,p,n}(\theta_{j,0})$ かつ $l_{i,n}(\theta_{i,0})=l_{j,n}(\theta_{j,0})$ である．こうして， m 番目のモデルに対する，擬似対数尤度関数に基づく情報量規準を

$$QAIC^{(p)}(X_n,m)=-2\,U_{m,p,n}(\hat{\alpha}_{m,n},\hat{\beta}_{m,n})+2\dim(\Theta_m) \qquad (4.3)$$

と定義して，$QAIC^{(p)}(X_n,m^*)=\min_m QAIC^{(p)}(X_n,m)$ によって，最適なモデル m^* を選択する．また，真のモデルを含まない誤特定モデルが存在する場合，その誤特定モデルが $QAIC^{(p)}$ によって選択される確率は $nh_n^p\to 0$ のとき，0 に収束する．詳細は，Fujii and Uchida (2013) を参照．

5. おわりに

本論文では，確率微分方程式によって定義されるエルゴード的拡散過程の統計的モデリングについて解説した．確率微分方程式モデルの統計推測に関するテキストは，多数出版され

ており，例えば，Kutoyants (1984, 1994, 2004), Küchler and Sørensen (1997), Prakasa Rao (1999a, b), Iacus (2008), Ait-Sahalia and Hansen (2009a, b), Jacod and Protter (2012), Kessler *et al.* (2012), Fuchs (2013) などがあり，ファイナンス分野だけでなく，生命科学等の分野にも応用されていることがわかる．高頻度データ (同期または非同期観測) に基づくボラティリティ推測については，Barndorff-Nielsen and Shephard (2002), Malliavin and Mancino (2002), Hayashi and Yoshida (2005), Jacod (2008), Ubukata and Oya (2008), Podolskij and Vetter (2009), Fukasawa (2010), Bibinger (2012), Ogihara and Yoshida (2012), Ogihara (2013) などを参照されたい．ジャンプ付確率微分方程式やレヴィ過程の統計に関連する文献については，清水・吉田 (2003), Shimizu and Yoshida (2006), Mancini (2004, 2009), Ait-Sahalia and Jacod (2007, 2009), Masuda (2007, 2013a, b), Shimizu (2010, 2012), Ogihara and Yoshida (2011) などがある．レヴィ過程で駆動される確率微分方程式はジャンプ型確率過程モデル等の解析に有用であり，今後益々発展する分野である．得られるデータは離散的 (高頻度) であるが，統計モデルは連続時間確率過程という設定は，モデルの表現力や解析能力を考慮すると極めて自然であり，データから有益な情報を抜き出す統計推測の本質的な問題に対応していると思われる．

謝辞

谷崎久志編集委員長および査読者から有益なコメントを頂いた．ここに記して感謝の意を表したい．本研究は JSPS 科研費 24300107, 24654024, 25245034 の助成を受けたものである．

参 考 文 献

Adams, R. A. and Fournier, J. J. F. (2003). *Sobolev Spaces*, Second edition, Pure and Applied Mathematics (Amsterdam), 140, Elsevier/Academic Press, Amsterdam.

Ait-Sahalia, Y. and Hansen, L. (eds.) (2009a). *Handbook of Fnancial Econometrics*, Vol. 1, Tools and Techniques (Handbooks in Finance), North Holland.

Ait-Sahalia, Y. and Hansen, L. (eds.) (2009b). *Handbook of Fnancial Econometrics*, Vol. 2, Applications (Handbooks in Finance), North Holland.

Ait-Sahalia, Y. and Jacod, J. (2007). Volatility estimators for discretely sampled Levy processes, *Ann. Stat.*, **35**, 355–392.

Ait-Sahalia, Y. and Jacod, J. (2009). Testing for jumps in a discretely observed process, *Ann. Stat.*, **37**, 184–222.

Akaike, H. (1973). Information theory and an extension of the maximum likelihood principle, *2nd International Symposium in Information Theory*, Petrov, B. N. & Csaki, F. eds., Akademiai Kaido, Budapest, 267–281.

Akaike, H. (1974). A new look at the statistical model identification, *IEEE Trans. Autom. Control*, **AC-19**, 716–723.

Barndorff-Nielsen, O. E. and Shephard, N. (2002). Econometric analysis of realized volatility and its use in estimating stochastic volatility models, *J. R. Stat. Soc. Ser. B*, **64**, 253–280.

Basawa, I. V. and Prakasa Rao, B. L. S. (1980). *Statistical Inference for Stochastic Processes*, Academic Press, London-New York.

Bibby, B. M. and Sørensen, M. (1995). Martingale estimating functions for discretely observed diffusion processes, *Bernoulli*, **1**, 17–39.

Bibinger, M. (2012). An estimator for the quadratic covariation of asynchronously observed Ito processes with noise: Asymptotic distribution theory, *Stoch. Process. Appl.*, **122** 2411–2453.

Florens-Zmirou, D. (1989). Approximate discrete time schemes for statistics of diffusion processes, *Statistics*, **20**, 547–557.

Fuchs, C. (2013). *Inference for Diffusion Processes. With Applications in Life Sciences*, Springer-Verlag, Heidelberg.

Fujii, T. and Uchida, M. (2013). AIC type statistics for discretely observed ergodic diffusion processes, Preprint.

Fukasawa, M. (2010). Realized volatility with stochastic sampling, *Stoch. Process. Appl.*, **120**, 829–852.

Genon-Catalot, V. and Jacod, J. (1993). On the estimation of the diffusion coefficient for multidimensional diffusion processes, *Annales de l'Institut Henri Poincaré, Probabilités et Statistiques*, **29**, 119–151.

Gloter, A. and Sørensen, M. (2009). Estimation for stochastic differential equations with a small diffusion coefficient, *Stoch. Process. Appl.*, **119**, 679–699.

Gobet, E. (2001). Local asymptotic mixed normality property for elliptic diffusion: a Malliavin calculus approach, *Bernoulli*, **7**, 899–912.

Gobet, E. (2002). LAN property for ergodic diffusions with discrete observations, *Annales de l'Institut Henri Poincaré, Probabilités et Statistiques*, **38**, 711–737.

Hayashi, T. and Yoshida, N. (2005). On covariance estimation of non-synchronously observed diffusion processes, *Bernoulli*, **11**, 359–379.

Iacus, S. M. (2008). *Simulation and Inference for Stochastic Differential Equations: With R Examples*, Springer.

Ibragimov, I. A. and Has'minskii, R. Z. (1981). *Statistical Estimation*, Springer Verlag, New York.

Inagaki, N. and Ogata, Y. (1975). The weak convergence of likelihood ratio random fields and its applications, *Ann. Inst. Stat. Math.*, **27**, 391–419.

Jacod, J. (2008). Asymptotic properties of realized power variations and related functionals of semimartingales, *Stoch. Process. Appl.*, **118**, 517–559.

Jacod, J. and Protter, P. (2012). *Discretization of Processes*, Springer-Verlag, Heidelberg.

Kamatani, K. and Uchida, M. (2014). Hybrid multi-step estimators for stochastic differential equations based on sampled data, Preprint.

Kessler, M. (1995). Estimation des paramètres d'une diffusion par des contrastes corrigés, *Comptes Rendus de l'Académie des Sciences—Series I—Mathematics*, **320**, 359–362.

Kessler, M. (1997). Estimation of an ergodic diffusion from discrete observations, *Scand. J. Stat.*, **24**, 211–229.

Kessler, M., Lindner, A. and Sorensen, M. (eds.) (2012). *Statistical Methods for Stochastic Differential Equations*, CRC Press—Chapmann and Hall.

Konishi, S. and Kitagawa, G. (2008). *Information Criteria and Statistical Modeling*, Springer, New York.

Kutoyants, Yu. A. (1984). *Parameter Estimation for Stochastic Processes*, Prakasa Rao, B.L.S. (ed.) Heldermann, Berlin.

Kutoyants, Yu. A. (1994). *Identification of Dynamical Systems with Small Noise*, Kluwer, Dordrecht.

Kutoyants, Yu. A. (2004). *Statistical Inference for Ergodic Diffusion Processes*, Springer-Verlag, London.

Küchler, U. and Sørensen, M. (1997). *Exponential Families of Stochastic Processes*, Springer, New York.

Malliavin, P. and Mancino, E. (2002). Fourier series method for measurement of multivariate volatilities, *Financ. Stoch.*, **6**, 49–61.

Mancini, C. (2004). Estimation of the characteristics of the jumps of a general Poisson-diffusion model, *Scand. Actuar. J.*, **1**, 42–52.

Mancini, C. (2009). Non-parametric Threshold Estimation for Models with Stochastic Diffusion Coefficient and Jumps, *Scand. J. Stat.*, **36**, 270–296.

Masuda, H. (2007). Ergodicity and exponential β-mixing bound for multidimensional diffusions with jumps, *Stoch. Process. Appl.*, **117**, 35–56.

Masuda, H. (2013a). Asymptotics for functionals of self-normalized residuals of discretely observed stochastic processes, *Stoch. Process. Appl.*, **123**, 2752–2778.

Masuda, H. (2013b). Convergence of Gaussian quasi-likelihood random fields for ergodic Levy driven SDE observed at high frequency, *Ann. Stat.*, **41**, 1593–1641.

Ogihara, T. and Yoshida, N. (2011). Quasi-likelihood analysis for the stochastic differential equation with jumps, *Stat. Inference Stoch. Process.*, **14**, 189–229.

Ogihara, T. and Yoshida, N. (2012). Quasi-likelihood analysis for stochastic regression models with nonsynchronous observations, Preprint. arXiv:1212.4911.

Ogihara, T. (2013). Local asymptotic mixed normality property for nonsynchronously observed diffusion processes, Preprint. arXiv:1310.5304.

Podolskij, M. and Vetter M. (2009). Bipower-type estimation in a noisy diffusion setting, *Stoch. Process. Appl.*, **119**, 2803–2831.

Prakasa Rao, B. L. S. (1983). Asymptotic theory for nonlinear least squares estimator for diffusion processes, *Mathematische Operationsforschung und Statistik, Series Statistics*, **14**, 195–209.

Prakasa Rao, B. L. S. (1988). Statistical inference from sampled data for stochastic processes, *Contemp. Math.*, **80**, 249–284, Am. Math. Soc., Providence, RI.

Prakasa Rao, B. L. S. (1999a). *Statistical Inference for Diffusion Type Processes*, London, Arnold.

Prakasa Rao, B. L. S. (1999b). *Semimartingales and Their Statistical Inference*, Chapman & Hall/CRC.

Sei, T. and Komaki, F. (2007). Bayesian prediction and model selection for locally asymptotically mixed normal models, *J. Stat. Plan. Inference*, **137**, 2523–2534.

Shimizu, Y. (2010). Threshold selection in jump-discriminant filter for discretely observed jump processes, *Stat. Methods Appl.*, **19**, 355–378.

Shimizu, Y. (2012). Nonparametric estimation of the Gerber-Shiu function for the Wiener-Poisson risk model, *Scand. Actuar. J.*, **2012**, 56–69.

清水泰隆，吉田朋広 (2003).「ジャンプ型拡散過程の離散観測からの推定について」『日本統計学会講演報告集』**71**, 108–111.

Shimizu, Y. and Yoshida, N. (2006). Estimation of diffusion processes with jumps from discrete observations, *Stat. Inference Stoch. Process.*, **9**, 227–277.

Sørensen, M. and Uchida, M. (2003). Small-diffusion asymptotics for discretely sampled stochastic differential equations, *Bernoulli*, **9**, 1051–1069.

Ubukata, M. and Oya, K. (2008). A test for dependence and covariance estimator of market microstructure noise, *Discuss. Pap. Econ. Bus.*, 07-03, Feb. 2007.

Uchida, M. (2008). Approximate martingale estimating functions for stochastic differential equations with small noises, *Stoch. Process. Appl.*, **118**, 1706–1721.

Uchida, M. (2010). Contrast-based information criterion for ergodic diffusion processes from discrete observations, *Ann. Inst. Stat. Math.*, **62**, 161–187.

Uchida, M. and Yoshida, N. (2001). Information criteria in model selection for mixing processes, *Stat. Inference Stoch. Process.*, **4**, 73–98.

Uchida, M. and Yoshida, N. (2004). Information criteria for small diffusions via the theory of Malliavin-Watanabe, *Stat. Inference Stoch. Process.*, **7**, 35–67.

Uchida, M. and Yoshida, N. (2006). Asymptotic expansion and information criteria, *SUT J. Math.*, **42**, 31–58.

Uchida, M. and Yoshida, N. (2011). Estimation for misspecified ergodic diffusion processes from discrete observations, *Eur. Ser. Appl. Ind. Math. Probab. Stat.*, **15**, 270–290.

Uchida, M. and Yoshida, N. (2012). Adaptive estimation of an ergodic diffusion process based on sampled data, *Stoch. Process. Appl.*, **122**, 2885–2924.

Uchida, M. and Yoshida, N. (2013a). Quasi likelihood analysis of volatility and nondegeneracy of statistical random field, *Stoch. Process. Appl.*, **123**, 2851–2876.

Uchida, M. and Yoshida, N. (2013b). Adaptive Bayes type estimators of ergodic diffusion processes from discrete observations, to appear in *Stat. Inference Stoch. Process.*.

Yoshida, N. (1992). Estimation for diffusion processes from discrete observation, *J. Multivar. Anal.*, **41**, 220–242.

Yoshida, N. (2005). Polynomial type large deviation inequality and its applications, Preprint.

吉田朋広 (2006). 『数理統計学』朝倉書店.

Yoshida, N. (2011). Polynomial type large deviation inequalities and quasi-likelihood analysis for stochastic differential equations, *Ann. Inst. Stat. Math.*, **63**, 431–479.