

## 鞍点の凸性と曲率について

竹内 宏行\*

## On a Convexity of Saddlepoint and its Curvature

Hiroyuki Takeuchi\*

退化していない確率分布が解析的特性関数を有する場合、鞍点と呼ばれる狭義単調増加関数が存在する。鞍点は期待値の近傍における振る舞いによって確率分布と一意に対応し、正規分布である場合に限り直線になるという著しい性質を持つ (竹内 (2013))。本論文では期待値の近傍における鞍点の局所凸性を曲率 (sp-曲率) によって捉え、確率分布が有する情報の多くがこの凸性に含まれていることを示す。例えば sp-曲率は 2 次までのモーメントを伴うことにより確率分布を一意に定め、漸近正規統計量の正規分布からの乖離具合はこの曲率により極めて自然な形で評価される。sp-曲率は密度関数が存在しない場合でも、特に確率分布がパラメータに依存しない場合にも定義することが可能である。

If a non-degenerated probability distribution  $F$  has an analytic characteristic function, there exists a strictly increasing function, so called a saddlepoint. The saddlepoint uniquely determines the distribution by its behavior only in a neighborhood of the expectation, and is being a line if and only if  $F$  is the normal (Takeuchi (2013)). In this paper we shall show that a local convexity of the saddlepoint includes much information of the corresponding distribution, with using sp-curvature which exists even for non-absolutely continuous distributions, and also for non-parametric case. It should be noted that the sp-curvature can determine the corresponding probability distribution uniquely, with moments up to second order, and it naturally explains the performance of the asymptotic normality of a statistics.

キーワード: 鞍点, 解析的特性関数, キュムラント母関数, sp-曲率, 漸近正規性, 凸関数, ルジャンドル変換

## 1. はじめに

竹内 (2013) は解析的特性関数を持つ確率分布  $F$  について、そのキュムラント母関数  $K$  が実効定義域において狭義凸である場合  $K^*(t) = t\alpha(t) - K(\alpha(t))$  を満たす鞍点  $\alpha(t)$  が存在し、 $F$  と一意に対応することを示した。この  $K^*$  は  $K$  のルジャンドル変換を表す。確率分布を鞍点に対応させる写像  $T$  は全単射であり、正規分布のみを次のような直線に移す。

$$T : N(\mu, \sigma^2) \in \mathcal{D} \mapsto \frac{t - \mu}{\sigma^2} \in \mathcal{A} \quad (1.1)$$

\* 東京国際大学経済学部：〒 350-1197 埼玉県川越市の場合北 1-13-1 (E-mail: takeuchi@tiu.ac.jp).

ここで  $\mathcal{P}$  は前述の条件を満たす確率分布の集合,  $\mathcal{A}$  は対応する鞍点の集合である. 鞍点は解析的特性関数によく似た性質を持ち, 期待値の任意の近傍における振る舞いによって対応する確率分布  $F$  を一意に定める (竹内 (2013)). 解析的特性関数に関する基本事項は Laha and Rohatgi (1979), Lukacs (1983) および Lukacs (1970) 等に詳しい.

対応する分布が正規分布である場合を除き, 鞍点は期待値の近傍において凸性をもつことが第3節において示される. 一方で統計量  $T_n$  の鞍点を  $\alpha_n$  とするとき,  $T_n$  の漸近正規性に関する十分条件が  $\sup_{|t|<\delta} |\alpha_n(t) - t| \rightarrow 0$ , すなわち鞍点の局所一様収束として得られている (竹内 (2013) 定理 5.4). ここで  $\alpha_n(t)$  の極限  $\alpha(t) = t$  は標準正規分布の鞍点である. これらの事実と (1.1) より, 期待値の近傍における鞍点の“曲がり具合”は  $T_n$  に対応する確率分布の非正規性を表現するものと考えられるが, 実際にはさらに多くの有益な情報を有している.

本論文では1次元実確率変数の場合について, この曲がり具合を曲率 (sp-曲率) によって捉え, それが確率分布との一意性や統計量の漸近正規性において本質的な役割を果たしていることを示し, sp-曲率が持つ統計的性質を明らかにする.

第2節では鞍点を用いて sp-曲率の定義を行うが, この曲率はキュムラント母関数によって表現することも可能である. 特に指数型分布族の場合にはポテンシャル関数を用いた表現が, キュムラント母関数の場合と形式的に等しくなる. sp-曲率は確率分布に対するノンパラメトリックな曲率であり, 分布の絶対連続性にも依存せず存在する. またこの曲率によって正規分布の必要十分条件を与えるが, 一般に sp-曲率は2次までのモーメントを伴うことで確率分布と一意に対応することが示される. Efron (1975) はフィッシャー情報量を内積とする one-parameter の統計的曲率  $\gamma^{(e)}(\theta)$  を提案したが, これは指数型分布族を直線として捉えている. sp-曲率  $\gamma^{(sp)}(t)$  の引数  $t$  は確率分布関数  $F(x; \theta)$  のパラメータ  $\theta$  とは全く別のものであるため, これら2つの曲率の関係は自明ではない. ここでは sp-曲率の引数に関する1つの意味づけを与える.

第3節では鞍点の凸性が示される. 鞍点を期待値の周りで展開することにより sp-曲率との関係を見るが, 確率分布の非正規性を測る量として sp-曲率が妥当であることを確認する. また特性関数の展開式との比較を通し, 鞍点は確率分布のトータル・マスに関する情報を持たない事が明らかにされる. さらに幾つかの確率分布を例として鞍点と sp-曲率の式, 及びそれらのグラフを示す. これらは鞍点近似において特徴的な性質を有する絶対連続な分布, そして密度関数を持たない分布等である.

第4節では独立な標本による統計量  $S_n = \sqrt{n}(\bar{X}_n - \mu)/\sigma$  に関する正規分布からの乖離具合が,  $S_n$  の sp-曲率  $\gamma_n^{(sp)}(t)$  によって自然な形で評価されることを示す. この際  $\gamma_n^{(sp)}(t)$  の展開式と,  $S_n$  のエッジワース展開における  $1/n^{j/2}$  ( $j = 1, 2$ ) の項には顕著な類似性が見出される. 前節で例として挙げた5つの分布について,  $S_n$  の鞍点とその sp-曲率を計算し

た結果を示す。次に逆ガウス分布の場合につき、それらの収束の様子をグラフから確認する。さらに収束  $\alpha_n(t) \rightarrow t$  につき、 $\{\alpha_n(t)\}_{n \in \mathbb{N}}$  が原点を除く各点  $t$  において狭義単調増加列であることが示される。このことに対応して sp-曲率の単調増加性も導かれる。これらの単調性は、分布関数列や特性関数列の収束において一般には見られない著しい性質であるといえよう。

第5節では一般の統計量の漸近正規性に関する十分条件を sp-曲率によって記述し、これを利用して独立に同一な分布に従う確率変数に関する中心極限定理の証明を与える。これらの結果は竹内 (2013) 定理 5.4 の系として述べられる。

## 2. 鞍点と sp-曲率

竹内 (2013) では鞍点の存在、および対応する確率分布との一意性を示すため、キュムラント母関数  $K$  がその実効定義域  $\text{dom}K$  の全体において狭義凸であることを仮定した。しかしながら、このような存在性や一意性を保証するためには、以下で述べるような狭義凸性を期待値の近傍のみで仮定すれば十分である。

本論文では次の条件を満たす確率分布のクラス  $\mathcal{P}$  を対象に議論を行う。

(条件 1)  $F \in \mathcal{P}$  は解析的特性関数を持つ。

(条件 2)  $F \in \mathcal{P}$  は 1 点に退化しない分布である。

1 点  $x_0$  に退化した分布のモーメント母関数は  $M(\alpha) = \exp[x_0\alpha]$  であり、これは解析的特性関数をもつことを注意しておく (Laha and Rohatgi (1979) p. 254)。以下  $\bar{\mathbb{R}}_+ = (0, \infty]$  とする。(条件 1) により原点を含む開区間  $(-a, b)$  ( $a, b \in \bar{\mathbb{R}}_+$ ) においてキュムラント母関数  $K$  が存在し、(条件 2) より  $K''(0) = \sigma^2 > 0$  であるから  $K(\alpha)$  は原点の適当な近傍で狭義凸な関数であることがわかる。これらの条件下で竹内 (2013) 第 2 節で述べた、期待値を含む定義域全体  $A_{\text{dom}K}$  における鞍点の存在証明は、期待値の近傍のみに限定してもそのまま成り立つ。このように期待値近傍において存在が示された鞍点に対し、同論文の系 4.3 を用いれば確率分布との一意性は成立する。

(条件 1) によりキュムラント母関数  $K$  の原点近傍における振る舞いは、実効定義域  $\text{dom}K$  全体における  $K$  の値を一意的に決定してしまう。これは対応する解析的特性関数の解析接続によってもたらされる性質である (Lukacs (1970))。鞍点が期待値近傍の振る舞いのみで確率分布と一意に対応する事もこの性質による (竹内 (2013))。

以上のことから期待値の近傍における関数としての鞍点を、次のように書くことができる。(条件 2) より  $|\alpha| < h_0$  について  $K''(\alpha) > 0$  であるような正数  $h_0$  が存在する。このとき任意に固定した  $h$  ( $0 < h < h_0$ ) について、期待値を含む開区間を  $A_h = (K'(-h), K'(h))$

のように定めると, 鞍点は

$$\alpha : t \in A_h \mapsto \alpha(t) \in (-h, h) \quad (2.1)$$

なる全単射な写像であり (竹内 (2013) 命題 2.3 を参照のこと),  $A_h$  上の振る舞いのみで確率分布と一意に対応する. ここで  $A_h \subset A_{\text{dom}K}$  が成り立っている.

**定義 2.1** 鞍点  $\alpha(t)$  の曲率を

$$\gamma^{(sp)}(t) = \frac{\alpha''(t)}{\{1 + (\alpha'(t))^2\}^{3/2}} \quad \text{for } t \in A_h \quad (2.2)$$

と書き,  $\gamma^{(sp)}(t)$  を  $\alpha(t)$  の sp-曲率と呼ぶ.

鞍点はキュムラント母関数  $K(\alpha)$  のルジャンドル変換;

$$K^*(t) = \sup_{\alpha \in \text{dom}K} \{t\alpha - K(\alpha)\}$$

における右辺の上限を達成する点  $\alpha(t)$  として定義されるので, 元来  $K(\alpha)$  の引数である. このことは鞍点方程式 (竹内 (2013) 補題 3.6(i)) から確認される. 確率分布関数を信号と考えた場合にはそのフーリエ変換である特性関数  $\varphi(t)$  の引数  $t$ , 従ってキュムラント母関数の引数  $\alpha$  も周波数に相当する. 鞍点  $\alpha(t)$  は狭義単調増加関数であり  $\alpha(\mu) = 0$  を満たすので,  $t$  が  $\mu$  に近い場合, sp-曲率  $\gamma^{(sp)}(t)$  は低い周波数 ( $\alpha \approx 0$ ) に対応する鞍点の曲率を見ていることになる. 一方, 統計量の漸近的な分布を調べる場合には, 特性関数の低周波成分の振る舞いが本質的である. 例えば独立に同一の分布に従う確率変数に関する中心極限定理は連続定理を利用し, 各点  $\alpha \in \mathbb{R}$  において  $\varphi^n(\alpha/\sqrt{n}) \rightarrow e^{-\alpha^2/2}$  を得ることにより証明されるが, これは基準化された標本平均の特性関数における, 低周波成分の挙動を評価している (例えば清水 (1976) pp. 108–109). 鞍点の場合も同様であることが第 4 節および第 5 節において示される.

**命題 2.1** sp-曲率に対応する確率分布  $F$  がパラメータに依存しない場合でも, あるいは絶対連続であるか否かにも拘らず存在する.

**証明 2.1** 以下正数  $h$  を十分小さくとる.  $F$  の鞍点  $\alpha(t)$  は  $t \in A_h$  において鞍点方程式

$$K'(\alpha)|_{\alpha=\alpha(t)} = t \quad (2.3)$$

を満たす (竹内 (2013) 補題 3.6). このとき (2.3) を  $t$  について微分し,  $t \in A_h$  のとき  $K''(\alpha(t)) > 0$  としてよいかから次を得る.

$$\alpha'(t) = 1/K''(\alpha(t)), \quad \alpha''(t) = -K'''(\alpha(t))/\{K''(\alpha(t))\}^3 \quad (2.4)$$

よって (2.2) より sp-曲率は次のように書くことができる.

$$\gamma^{(sp)}(t) = \frac{-K'''(\alpha(t))}{[1 + \{K''(\alpha(t))\}^2]^{3/2}} \quad \text{for } t \in A_h \quad (2.5)$$

キュムラント母関数  $K$  は  $F$  がパラメータに依存しない場合にも, また絶対連続性にも拘らず存在するので題意を得る.

(条件 1) よりキュムラント母関数は  $K \in C^\infty$  である. 従って (2.4) から明らかなように鞍点も十分に滑らかなので, 以降はこの性質を断らずに用いる.

(条件 2) より  $K'(\alpha)$  は原点の近傍において狭義単調増加であるから逆関数  $(K')^{-1}(t)$  が存在するので, (2.3) より鞍点を  $\alpha(t) = (K')^{-1}(t)$  のように書くことができる. 竹内 (2013) より鞍点には逆関数  $t: \alpha \in (-h, h) \mapsto t(\alpha) \in A_h$  が存在し, かつ  $K'(\alpha) = t(\alpha)$  が成り立つので (2.5) は

$$\gamma^{(sp)}(t) = \frac{-t''(\alpha)}{\{1 + (t'(\alpha))^2\}^{3/2}} \Big|_{\alpha=(K')^{-1}(t)} \quad \text{for } t \in A_h$$

のように書くこともできる.

$F$  が指数型分布族の場合は, ポテンシャル関数  $\psi$  を用いて (2.5) と同じ形で書くことができる. これはキュムラント母関数とポテンシャル関数の関係が (2.8) のような形で与えられることによる.

**命題 2.2** パラメータを  $\boldsymbol{\theta} = (\theta_1, \dots, \theta_n)$  とする指数型分布族の密度関数

$$p(x; \boldsymbol{\theta}) = \exp \left[ c(x) + \sum_{i=1}^n \theta_i x^i - \psi(\boldsymbol{\theta}) \right] \quad (2.6)$$

の sp-曲率は期待値の近傍において次のように与えられる.

$$\gamma^{(sp)}(t) = -\frac{\partial^3 \psi}{\partial \theta_1^3}(\boldsymbol{\theta}) / \left\{ 1 + \left( \frac{\partial^2 \psi}{\partial \theta_1^2}(\boldsymbol{\theta}) \right)^2 \right\}^{3/2} \Big|_{\theta_1 = \left( \frac{\partial \psi}{\partial \theta_1} \right)^{-1}(t)}. \quad (2.7)$$

**証明 2.2** (2.6) に対応するキュムラント母関数は

$$K(\alpha) = \psi(\theta_1 + \alpha, \theta_2, \dots, \theta_n) - \psi(\theta_1, \theta_2, \dots, \theta_n) \quad (2.8)$$

である. 以下パラメータ  $\theta_2, \dots, \theta_n$  を固定し  $\psi(\theta_1) := \psi(\theta_1, \theta_2, \dots, \theta_n)$  と書く. (2.6) の鞍点を  $\alpha$  とすれば, (2.3) より鞍点方程式は  $\psi'(\theta_1 + \alpha(t)) = t$  であり,  $K(\alpha)$  の凸性より  $\psi'(\theta_1 + \alpha)$  は  $\alpha$  の狭義単調増加関数であることから

$$\alpha(t) = (\psi')^{-1}(t) - \theta_1 \quad (2.9)$$

と書ける. 従って (2.5) と (2.9) より

$$\begin{aligned}\gamma^{(sp)}(t) &= -\frac{\partial^3 K}{\partial \alpha^3}(\alpha) / \left\{ 1 + \left( \frac{\partial^2 K}{\partial \alpha^2}(\alpha) \right)^2 \right\}^{3/2} \Bigg|_{\alpha=\alpha(t)} \\ &= -\frac{\partial^3 \psi}{\partial \alpha^3}(\theta_1 + \alpha) / \left\{ 1 + \left( \frac{\partial^2 \psi}{\partial \alpha^2}(\theta_1 + \alpha) \right)^2 \right\}^{3/2} \Bigg|_{\alpha=\left(\frac{\partial \psi}{\partial \theta_1}\right)^{-1}(t)-\theta_1} \\ &= -\frac{\partial^3 \psi}{\partial \theta_1^3}(\theta_1) / \left\{ 1 + \left( \frac{\partial^2 \psi}{\partial \theta_1^2}(\theta_1) \right)^2 \right\}^{3/2} \Bigg|_{\theta_1=\left(\frac{\partial \psi}{\partial \theta_1}\right)^{-1}(t)}\end{aligned}$$

が成り立つ.

**例 2.1** 命題 2.2 において  $n = 2$  のとき (2.6) は正規分布  $N(\mu, \sigma^2)$  の場合を含む. このとき自然パラメータを  $(\theta_1, \theta_2) = (\mu/\sigma^2, -1/2\sigma^2)$  のようにおくことでポテンシャル関数は

$$\psi(\theta_1, \theta_2) = \frac{1}{2} \log \left( -\frac{1}{2\theta_2} \right) - \frac{(\theta_1)^2}{4\theta_2}$$

である.  $\theta_2$  を固定すれば  $\psi'(\theta_1) = -\theta_1/2\theta_2$  であるから (2.9) より正規分布の鞍点  $\alpha(t) = (t - \mu)/\sigma^2$  を得る. また (2.7) の分子は恒等的に 0 に等しくなるので  $\gamma^{(sp)}(t) \equiv 0$  を得る.

sp-曲率による正規分布の特徴づけを, 次の命題 2.3 および系 2.1 のように与えることができる.

**命題 2.3** 確率分布  $F \in \mathcal{D}$  について次の 2 つの条件は同値である.

- (i)  $F$  は正規分布である.
- (ii)  $F$  の期待値の近傍において鞍点の sp-曲率が 0 に等しい.

**証明 2.3** (i)→(ii) について, (1.1) に示したように正規分布  $N(\mu, \sigma^2)$  の鞍点は直線であり, その sp-曲率は (2.2) より恒等的に 0 に等しい. (ii)→(i) について, 鞍点は期待値の近傍の振る舞いで, 確率分布と一意に対応する (竹内 (2013) 系 4.3). 鞍点は一般に狭義単調増加であるから (竹内 (2013) 補題 3.6(ii)), 仮定より  $\alpha(t) = c_1 t + c_2$  ( $c_1 > 0$ ) と書くことができる. 従って竹内 (2013) 例 4.6 より結論を得る.

**系 2.1**  $F \in \mathcal{D}$  とする. キュムラント母関数が多項式の場合,  $F$  の鞍点の sp-曲率は恒等的に 0 に等しい.

**証明 2.1** Marcinkiewicz の定理 (Lukacs (1970) p. 213) より, この多項式の次数は 2 次以下である. もし 1 次ならば (条件 2) に, 0 次ならばキュムラント母関数の定義にそれぞれ

れ矛盾する. 従って  $F$  は正規分布であり, このとき命題 2.3 より sp-曲率は恒等的に 0 に等しい.

命題 2.3 において, さらに 2 次までのモーメントが分かれば正規分布は一意に定まる. このことを一般化すると定理 2.1 のようになる. 以下, 本論文では確率分布  $F$  の期待値と分散をそれぞれ  $\mu$  および  $\sigma^2$  とするが, 一般に  $\alpha(\mu) = 0$ ,  $\alpha'(\mu) = 1/\sigma^2$  であることを注意しておく (竹内 (2013) 補題 2.5 および証明 3.6).

**定理 2.1** 2 つの確率分布  $F_1, F_2$  に対応する鞍点の曲率を  $\gamma_1^{(sp)}(t), \gamma_2^{(sp)}(t)$  とする. このとき  $F_1$  と  $F_2$  が一致することと, 次の 2 つの条件が共に成り立つことは同値である.

- (i)  $F_1$  と  $F_2$  の期待値と分散はそれぞれ等しい.
- (ii) 期待値の近傍において  $\gamma_1^{(sp)}(t) = \gamma_2^{(sp)}(t)$  である.

**証明 2.1** 必要性については鞍点と分布の一意性を述べた竹内 (2013) 定理 4.3 と, その系より明らか. 十分性について,  $F_1$  と  $F_2$  に対応する鞍点を  $\alpha_1(t)$  および  $\alpha_2(t)$  とする. 一般に曲率の等しい 2 つの平面曲線は, 回転と平行移動によって重ねあわせることができる. いま (i) より  $\alpha_1(\mu) = \alpha_2(\mu) = 0$  かつ  $\alpha_1'(\mu) = \alpha_2'(\mu) = 1/\sigma^2$  であるから, 2 つの曲線  $\alpha_1$  と  $\alpha_2$  は期待値において位置と接線の方向が一致している. 従って (ii) により 2 つの鞍点は平面曲線として, 期待値の近傍において重なっている. このような鞍点に対応する確率分布は一致する (竹内 (2013) 系 4.3) ことから結論を得る.

定理 2.1 より期待値と分散は, 曲線としての鞍点の位置と方向を定めているといえる.

**系 2.2** 確率分布  $F$  の期待値と, 原点の近傍における  $K''(\alpha)$  の振る舞いが分かれば, 鞍点を知ることができる.

**証明 2.2** (2.5) および定理 2.1 より明らか.

### 3. 期待値の近傍における鞍点の凸性

本節では期待値の近傍における鞍点の凸性を明らかにし, そこでの振る舞いを sp-曲率によって詳しく調べる. 鞍点は解析的特性関数に似た性質を有するが, 分布のマスに関する情報は持たない点を命題 3.3 に示す. sp-曲率は鞍点の 2 次の変動を捉えるものであるから, 鞍点が複雑な振る舞いをするならば, その挙動を捉えるには不適切な場合もあろう. しかしながら局所的には素直な性質を持つことが次のように示される.

**命題 3.1**  $K'''(0) \neq 0$  とする. このとき  $\alpha(t)$  が局所的に狭義凸, または狭義凹関数であるような期待値の近傍が存在する. この近傍において  $\alpha(t)$  が狭義凸 (狭義凹) の場合は  $\gamma^{(sp)}(t) > 0$  ( $\gamma^{(sp)}(t) < 0$ ) である.

**証明 3.1** 鞍点は (2.1) のように, 期待値  $\mu$  の近傍  $A_h$  上で定義されているものとする. ここで  $\delta_1 = \min\{\mu - K'(-h), K'(h) - \mu\}$  のようにおき, 鞍点の定義域を  $|t - \mu| < \delta_1$  に制限する. 次に (2.4) 第 2 式の符号を期待値の近傍において評価する. 开区間  $A_h$  の定義より  $t \in A_h$  のとき分母は常に正である. また仮定より, ある  $\delta_2 > 0$  が存在して  $|t - \mu| < \delta_2$  のとき  $K'''(\alpha(t)) \neq 0$  が成り立つ. 従って  $\delta = \min\{\delta_1, \delta_2\}$  とすれば  $|t - \mu| < \delta$  において  $K'''(\alpha(t))$  は正值のみ, あるいは負値のみのいずれかとなる. よって (2.4) 第 2 式より  $\alpha''(t)$  の符号も同様である. 後半は (2.2) より明らか.

**命題 3.2** 確率分布  $F$  に対応する鞍点を  $\alpha$ , その sp-曲率を  $\gamma^{(sp)}(t)$  とする. このとき

$$\alpha(t) = \frac{t - \mu}{\sigma^2} + \frac{(\sigma^4 + 1)^{3/2}}{2\sigma^6} \gamma^{(sp)}(\mu) (t - \mu)^2 + o((t - \mu)^2) \quad \text{as } t \rightarrow \mu \quad (3.1)$$

が成り立つ.

**証明 3.2**  $\mu \in A_h$  および  $\alpha'(\mu) = 1/\sigma^2$  であることから (2.2) より

$$\alpha''(\mu) = \frac{(\sigma^4 + 1)^{3/2}}{\sigma^6} \gamma^{(sp)}(\mu) \quad (3.2)$$

が成り立つ.  $\alpha(t)$  の  $t = \mu$  におけるテイラー展開に対し,  $\alpha(\mu) = 0$  および (3.2) を用いて (3.1) を得る.

(3.1) 右辺第 1 項より, 鞍点の一次近似を担っているのは正規分布  $N(\mu, \sigma^2)$  の鞍点そのものであり, そこには  $F$  の期待値と分散の情報が含まれている. sp-曲率は 2 次のオーダーの近似に関わっている. 鞍点が期待値の近傍における振る舞いで確率分布と一意に対応することを考え併せれば, (3.1) より sp-曲率  $\gamma^{(sp)}(t)$  は  $F$  の正規分布からの乖離具合を表しているといえよう.

一方, 鞍点には 0 次のモーメントに関する情報が欠如していることが示される.  $F$  の特性関数  $\varphi(t) = \int e^{itx} dF(x)$  は 3 次の絶対モーメントが存在する条件の下で, 原点の近傍において次のように展開される (清水 (1976) p. 42).

$$\varphi(t) = \varphi(0) + \left( i\mu t - \frac{1}{2}\sigma^2 t^2 \right) + o(t^2) \quad \text{as } t \rightarrow 0 \quad (3.3)$$

(3.1) の右辺第 1 項は正規分布の鞍点であるから, (3.3) の右辺第 2 項に対応していることがわかる. ここで  $\varphi(0) = 1$  は  $F$  のトータル・マスが 1 であることを意味しているが, (3.1) にはこの項に対応するものが存在しない. 実際次の命題が成り立つ.

**命題 3.3** 鞍点是对应する確率分布に関するマスの情報を持たない.

**証明 3.3**  $\alpha_F$  を確率分布  $F$  の鞍点とする. このとき任意に固定した正数  $c$  について  $K_{cF}(\alpha) = K_F(\alpha) + \log c$  であり, そのルジャンドル変換は

$$K_{cF}^*(t) = K_F^*(t) - \log c \quad \text{for } t \in A_h$$

である. この両辺を  $t$  について微分することにより  $\alpha_{cF}(t) = \alpha_F(t)$  を得る (竹内 (2013) 補題 3.6(iii)).

以下, 正規・逆ガウス・ガンマ・2項・ポアソンの各分布に関する鞍点と sp-曲率を示す. はじめの3つの分布は, 基準化定数を除き, その鞍点近似が元の分布と厳密に等しくなる唯一のケースであることが Daniels (1980) によって示されている. これら5つの分布は1点に退化しておらず, かつそのキュムラント母関数の実効定義域は原点を内点として含むので解析的特性関数を有する. 従って (条件 1) と (条件 2) を満たすので, 鞍点と一意に対応している (竹内 (2013)). 以下では  $\mathbb{N}_0 = \mathbb{N} \cup \{0\}$  とする.

**例 3.1** 正規分布  $N(\mu, \sigma^2)$

$$\begin{aligned} f(x) &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma} \exp\left[-\frac{1}{2\sigma^2}(x-\mu)^2\right] & \text{for } x \in \mathbb{R}, \\ K(\alpha) &= \mu\alpha + \frac{1}{2}\sigma^2\alpha^2 & \text{for } \alpha \in \mathbb{R}, \\ \alpha(t) &= \frac{t-\mu}{\sigma^2}, \quad \gamma^{(sp)}(t) = 0 & \text{for } t \in \mathbb{R}. \end{aligned}$$

**例 3.2** 逆ガウス分布  $IG(\mu, \lambda)$

$$\begin{aligned} f(x) &= \sqrt{\frac{\lambda}{2\pi}} x^{-3/2} \exp\left[-\frac{\lambda(x-\mu)^2}{2\mu^2 x}\right] & \text{for } x > 0, \mu > 0, \lambda > 0, \\ K(\alpha) &= \frac{\lambda}{\mu} \left\{ 1 - \left(1 - \frac{2\mu^2\alpha}{\lambda}\right)^{1/2} \right\} & \text{for } \alpha < \frac{\lambda}{2\mu^2}, \\ \alpha(t) &= -\frac{\lambda}{2} \left( \frac{1}{t^2} - \frac{1}{\mu^2} \right), \quad \gamma^{(sp)}(t) = \frac{-3\lambda t^5}{(t^6 + \lambda^2)^{3/2}} & \text{for } t > 0. \end{aligned}$$

**例 3.3** ガンマ分布  $\Gamma(\lambda, r)$

$$\begin{aligned} f(x) &= \frac{1}{\lambda\Gamma(r)} \left(\frac{x}{\lambda}\right)^{r-1} e^{-x/\lambda} & \text{for } x \geq 0, \lambda > 0, r > 0, \\ K(\alpha) &= -r \log(1 - \lambda\alpha) & \text{for } \alpha < \frac{1}{\lambda}, \\ \alpha(t) &= -\frac{r}{t} + \frac{1}{\lambda}, \quad \gamma^{(sp)}(t) = \frac{-2rt^3}{(t^4 + r^2)^{3/2}} & \text{for } t > 0. \end{aligned}$$

例 3.4 2項分布  $B(n, p)$ 

$$p(k) = \binom{n}{k} p^k (1-p)^{n-k} \quad \text{for } k = 0, 1, \dots, n,$$

$$K(\alpha) = n \log(pe^\alpha + 1 - p) \quad \text{for } \alpha \in \mathbb{R},$$

$$\alpha(t) = \log \left[ \frac{(1-p)t}{p(n-t)} \right], \quad \gamma^{(sp)}(t) = -\frac{nt(n-t)(n-2t)}{\{t^2(n-t)^2 + n^2\}^{3/2}} \quad \text{for } 0 < t < n.$$

例 3.5 ポアソン分布  $Po(\lambda)$ 

$$p(k) = e^{-\lambda} \frac{\lambda^k}{k!} \quad \text{for } k \in \mathbb{N}_0, \lambda > 0,$$

$$K(\alpha) = \lambda(e^\alpha - 1) \quad \text{for } \alpha \in \mathbb{R},$$

$$\alpha(t) = \log \frac{t}{\lambda}, \quad \gamma^{(sp)}(t) = \frac{-t}{(t^2 + 1)^{3/2}} \quad \text{for } t > 0.$$

正規分布とポアソン分布は sp-曲率がパラメータに依存していない。前者の理由は直線の曲率であること、後者は  $K''(\alpha(t)) = K'''(\alpha(t)) = t$  が成り立つことによるものである。正規分布と2項分布を除く3つの分布の鞍点は、定義域の全域 ( $t > 0$ ) において  $\alpha''(t) < 0$  であることから狭義凹である。2項分布の鞍点は  $t = n/2$  において唯一の変曲点を持ち凹から凸へと変化するが、 $p < 1/2$  ( $p > 1/2$ ) の際には期待値の近傍において凹(凸)であることが、 $\alpha''(t) = n(2t - n)/t^2(n - t)^2$  または  $K'''(0) = np(1-p)(1-2p)$  より確認される。

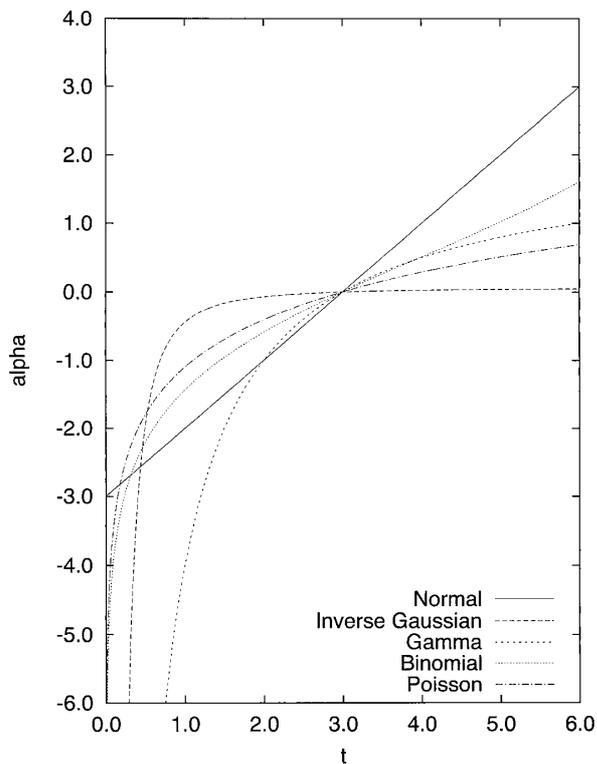


図1 5つの確率分布の鞍点.

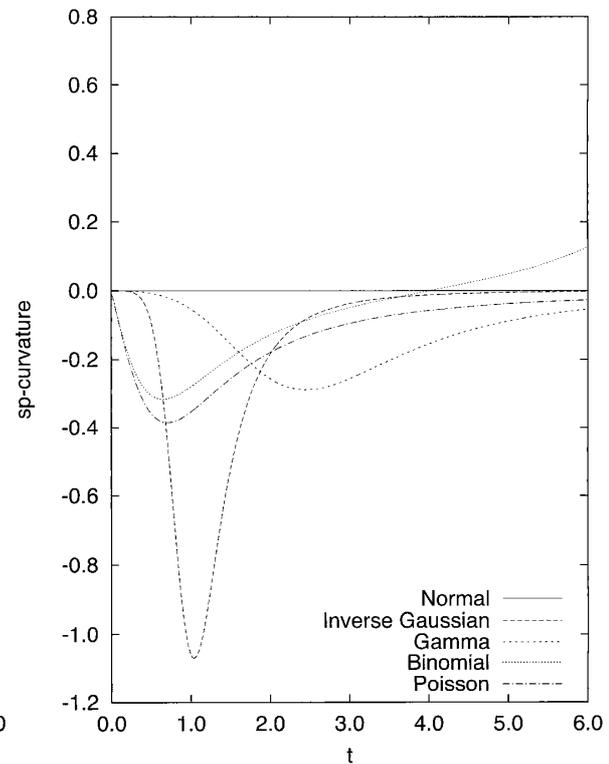


図2 5つの確率分布の sp-曲率.

これら5つの分布の鞍点とsp-曲率のグラフを、それぞれ図1と図2に示す。各分布の期待値を一致させて表示するために、パラメータをそれぞれ  $N(3, 1^2)$ ,  $IG(3, 1)$ ,  $\Gamma(1/2, 6)$ ,  $B(8, 3/8)$ ,  $Po(3)$  とした。前述の理由により2項分布の鞍点は  $4 < t < 8$  において凸であるため、sp-曲率は同じ区間において正の値をとっている。

鞍点とsp-曲率の定義域は分布によって異なり、また各分布のパラメータにも依存する場合があることに注意を要する。

#### 4. 標本平均の鞍点とsp-曲率

本節では統計量  $S_n = \sqrt{n}(\bar{X}_n - \mu)/\sigma$  のsp-曲率  $\gamma_n^{(sp)}(t)$  について、その漸近的な挙動を調べる。竹内 (2013) は  $S_n$  の鞍点が  $\alpha_n$  であるとき、その漸近的正規性の十分条件が

$$\sup_{|t| < \delta} |\alpha_n(t) - t| \rightarrow 0 \quad \text{as } n \rightarrow \infty \quad (4.1)$$

によって与えられることを示したが、 $\alpha(t) = t$  が標準正規分布の鞍点であることから、この収束は  $S_n$  の正規性からの離れかたを測っている。ここでは (4.1) とsp-曲率の関係を明らかにし、この乖離具合を評価するにあたりsp-曲率が本質的な役割りを果たしていることを定理4.1に示す。またsp-曲率を詳しく評価することにより、エッジワース展開との類似性が見出される。さらに鞍点の列  $\{\alpha_n(t)\}_{n \in \mathbb{N}}$  およびsp-曲率の列  $\{\gamma_n^{(sp)}(t)\}_{n \in \mathbb{N}}$  は、 $\alpha(t)$  が狭義凹関数であるとき各点で狭義単調増加列となることが命題4.2に示される。

**定理 4.1** 確率分布  $F$  に対応する鞍点を  $\alpha$  とし、 $X_1, X_2, \dots$  を  $F$  に従う独立な確率変数列とする。また  $S_n = \sqrt{n}(\bar{X}_n - \mu)/\sigma$  に対応する鞍点  $\alpha_n(t)$  のsp-曲率を  $\gamma_n^{(sp)}(t)$  とする。このとき次の2つの評価が成り立つ。

$$\alpha_n(t) - t \sim \sqrt{2} t^2 \gamma_n^{(sp)}(t) \quad \text{as } n \rightarrow \infty, \quad (4.2)$$

$$\gamma_n^{(sp)}(t) \sim -\frac{1}{\sqrt{n}} \frac{\kappa_3}{(\sqrt{2}\sigma)^3} + \frac{1}{n} \frac{3\kappa_3^2 - \sigma^2 \kappa_4}{(\sqrt{2}\sigma^2)^3} t \quad \text{as } n \rightarrow \infty. \quad (4.3)$$

ただし  $\kappa_j$  は  $F$  の  $j$ -次キュムラントである。

**証明 4.1** 竹内 (2013) 補題5.7より鞍点  $\alpha_n$  は

$$\alpha_n(t) = \sigma \sqrt{n} \alpha \left( \mu + \frac{\sigma}{\sqrt{n}} t \right) \quad (4.4)$$

である。 $t = 0$  におけるテイラー展開により、ある  $0 < \theta < 1$  について

$$\alpha_n(t) - t = \frac{\sigma^3}{2\sqrt{n}} t^2 \alpha'' \left( \mu + \frac{\sigma}{\sqrt{n}} \theta t \right) \quad (4.5)$$

が成り立つ (竹内 (2013) 証明 5.5). 一方  $\alpha'(\mu) = 1/\sigma^2$  であること, および  $\gamma_n^{(sp)}(t)$  に関して (2.2) より

$$\begin{aligned} \frac{\sigma^3}{\sqrt{n}} \alpha''\left(\mu + \frac{\sigma}{\sqrt{n}} t\right) &= \gamma_n^{(sp)}(t) \left[ 1 + \sigma^4 \left\{ \alpha'\left(\mu + \frac{\sigma}{\sqrt{n}} t\right) \right\}^2 \right]^{3/2} \\ &\sim 2^{3/2} \gamma_n^{(sp)}(t) \quad \text{as } n \rightarrow \infty \end{aligned} \quad (4.6)$$

が成り立つ. よって (4.5) と (4.6) より (4.2) を得る. 次に (4.6) の左辺を  $t = 0$  においてテイラー展開することにより

$$2^{3/2} \gamma_n^{(sp)}(t) \sim \frac{\sigma^3}{\sqrt{n}} \alpha''(\mu) + \frac{\sigma^4}{n} \alpha'''(\mu) t \quad \text{as } n \rightarrow \infty,$$

および  $\alpha''(\mu) = -\kappa_3/\sigma^6$ ,  $\alpha'''(\mu) = (3\kappa_3^2 - \sigma^2\kappa_4)/\sigma^{10}$  であることから (4.3) を得る.

(4.2) と (4.3) より

$$\alpha_n(t) \sim t - \frac{1}{\sqrt{n}} \frac{\kappa_3}{2\sigma^3} t^2 + \frac{1}{n} \frac{3\kappa_3^2 - \sigma^2\kappa_4}{2\sigma^6} t^3 \quad \text{as } n \rightarrow \infty$$

が成り立つ. この式において分散  $\sigma^2$  を除けば, 右辺第 1 項における係数は  $\kappa_3$  のみに, 第 2 項は  $\kappa_3$  と  $\kappa_4$  に依存している. このことはエッジワース展開と形式的に同じである (Hall (1992) p. 45 を参照のこと).

例 3.1 から例 3.5 に挙げた確率分布について, 統計量  $S_n$  に関する鞍点  $\alpha_n(t)$  とその sp-曲率  $\gamma_n^{(sp)}(t)$  を以下に示す. これらは, まず (4.4) を直接計算し, その結果に基づき (2.2) を求めることによって得られる.

**例 4.1** 正規分布  $N(\mu, \sigma^2)$

$$\alpha_n(t) = t, \quad \gamma_n^{(sp)}(t) = 0 \quad \text{for } t \in \mathbb{R}.$$

**例 4.2** 逆ガウス分布  $IG(\mu, \lambda)$

$$\begin{aligned} \alpha_n(t) &= \frac{\sqrt{n\lambda}}{2\sqrt{\mu}} \left\{ 1 - \frac{n\lambda}{(\sqrt{\mu}t + \sqrt{n\lambda})^2} \right\}, \quad \gamma_n^{(sp)}(t) = \frac{-3\sqrt{\mu}(n\lambda)^{3/2} (\sqrt{\mu}t + \sqrt{n\lambda})^5}{\{(\sqrt{\mu}t + \sqrt{n\lambda})^6 + (n\lambda)^3\}^{3/2}} \\ &\quad \text{for } t > -\left(\frac{n\lambda}{\mu}\right)^{1/2}. \end{aligned}$$

**例 4.3** ガンマ分布  $\Gamma(\lambda, r)$

$$\begin{aligned} \alpha_n(t) &= \frac{\sqrt{nr}t}{\sqrt{nr} + t}, \quad \gamma_n^{(sp)}(t) = \frac{-2nr(\sqrt{nr} + t)^3}{\{(\sqrt{nr} + t)^4 + (nr)^2\}^{3/2}} \\ &\quad \text{for } t > -\sqrt{nr}. \end{aligned}$$

例 4.4 2項分布  $B(m, p)$ 

$$\alpha_n(t) = \sqrt{nm pq} \log \left[ \frac{q(\sqrt{nm} p + \sqrt{mpq} t)}{p(\sqrt{nm} q - \sqrt{mpq} t)} \right],$$

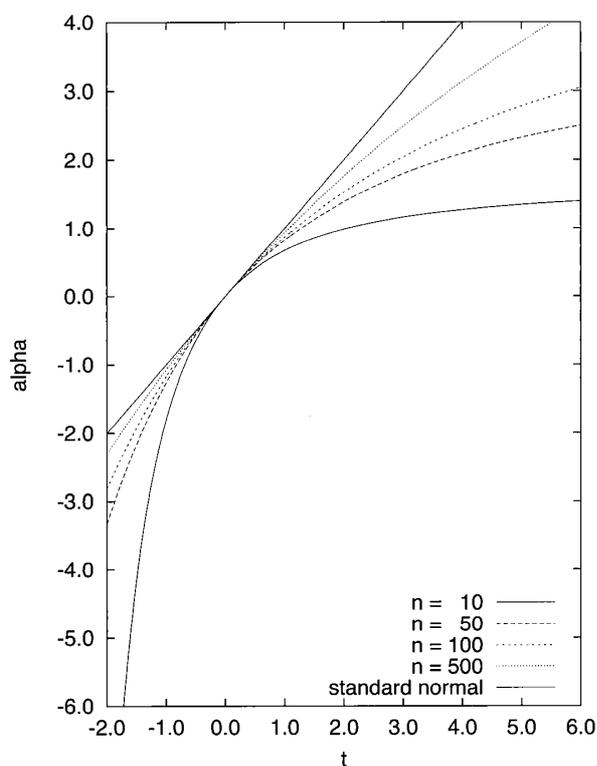
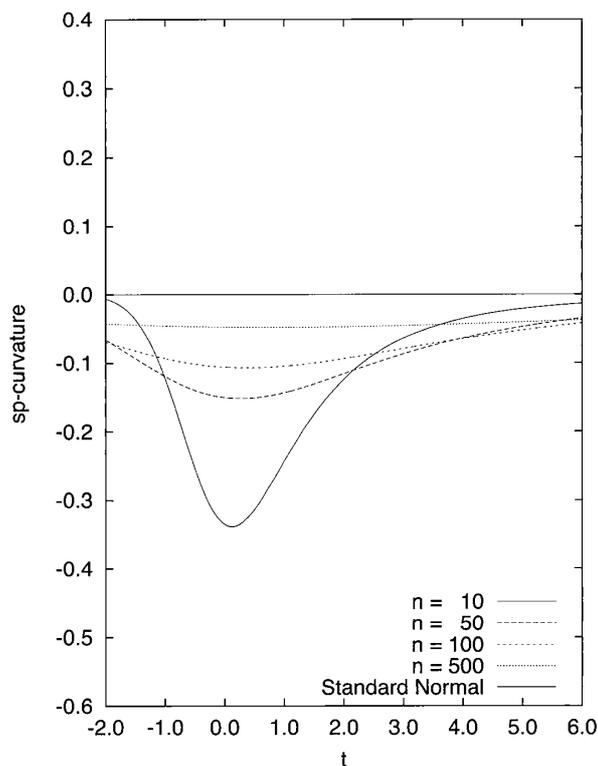
$$\gamma_n^{(sp)}(t) = -\frac{nm\sqrt{pq}(\sqrt{q}t + \sqrt{nm}p)(\sqrt{p}t - \sqrt{nm}q)\{2\sqrt{pq}t + (p-q)\sqrt{nm}\}}{\{(\sqrt{q}t + \sqrt{nm}p)^2(\sqrt{p}t - \sqrt{nm}q)^2 + n^2 m^2 pq\}^{3/2}}$$

for  $-\sqrt{\frac{nm p}{q}} < t < \sqrt{\frac{nm q}{p}}$ , where  $q = 1 - p$ .

例 4.5 ポアソン分布  $Po(\lambda)$ 

$$\alpha_n(t) = \lambda\sqrt{n} \log \left( 1 + \frac{t}{\sqrt{n}} \right), \quad \gamma_n^{(sp)}(t) = \frac{-\sqrt{n}\lambda(\sqrt{n} + \lambda)}{\{(\sqrt{n} + t)^2 + n\lambda^2\}^{3/2}}$$

for  $t > -\sqrt{n}$ .

図3 統計量  $S_n$  鞍点の収束— $IG(1,1)$ —.図4 統計量  $S_n$  sp-曲率の収束— $IG(1,1)$ —.

例 4.2 の逆ガウス分布の場合について統計量  $S_n$  の鞍点と sp-曲率を、それぞれ図 3 と図 4 に示す。サンプルサイズが増すに従い  $\alpha_n(t)$  は標準正規分布の鞍点  $\alpha(t) = t$  に近づき、これに応じて sp-曲率も 0 へと近づいてゆく。この収束によって  $S_n$  に関する中心極限定理が証明される (系 5.1 および系 5.2)。またこの分布では鞍点が凹関数；

$$\alpha_n''(t) = \frac{-3\sqrt{\mu}(n\lambda)^{3/2}}{(\sqrt{\mu}t + \sqrt{n\lambda})^4} < 0 \quad \text{for } t > -\left(\frac{n\lambda}{\mu}\right)^{1/2}, \quad n \in \mathbb{N}$$

である。従って鞍点を曲線と考えた場合、この上にある動点の運動は進行方向右側へ常に正の加速度が生じることから、図4のように曲率の値は全て負値となる。

これまでの議論より統計量  $S_n$  の sp-曲率も原点の近傍における振る舞いが重要であるが、異なる確率分布に関する sp-曲率を比較する場合、例えば  $\max_{|t|<\delta} |\gamma_n^{(sp)}(t)|$  を用いることが自然であろう。図3や図4より原点  $t=0$  は  $|\gamma_n^{(sp)}(t)|$  の最大値を与える点のように見受けられるが、一般には違う。

**命題 4.1**  $F$  に独立に従う確率変数を  $X_1, \dots, X_n$  とする。統計量  $S_n = \sqrt{n}(\bar{X}_n - \mu)/\sigma$  に対応する鞍点を  $\alpha_n(t)$ 、その sp-曲率を  $\gamma_n^{(sp)}(t)$  とする。このとき  $|\gamma_n^{(sp)}(t)|$  が  $t = t_n$  において最大値となるための必要条件は

$$\mu + \frac{\sigma}{\sqrt{n}} t_n \in A_h, \quad (4.7)$$

$$\alpha_n'''(t_n) \{1 + (\alpha_n'(t_n))^2\} - 3\alpha_n'(t_n)(\alpha_n''(t_n))^2 = 0 \quad (4.8)$$

を共に満たすことである。

**証明 4.1**  $F$  に対応するキュムラント母関数と鞍点を  $K$  および  $\alpha$  とする。このとき  $\alpha_n(t)$  は (4.4) で与えられ  $\{t : \mu + (\sigma/\sqrt{n})t \in A_h\}$  において定義される。従って題意を満たすような  $t_n$  が存在するならば (4.7) を満たさなければならない。(4.8) は停留点を与える条件として  $\gamma_n^{(sp)}(t)$  の導関数より直接得られる。

**例 4.6** 逆ガウス分布  $IG(\mu, \lambda)$  において (4.8) を解くことにより、sp-曲率の最大値は  $t_n = \{(5/4)^{1/2} - 1\} \sqrt{n\lambda/\mu}$  によって与えられる。

$S_n$  の法則収束は、分布関数列の弱収束や特性関数列の各点収束によって得られるが、これらの収束は必ずしも単調ではない。これに対し鞍点の各点収束  $\alpha_n(t) \rightarrow t$  は命題 4.2 のような単調性をもつ。ここでは鞍点列  $\{\alpha_n(t)\}_{n \in \mathbb{N}}$  の収束を大域的に見ることを目的とし、 $\alpha(t)$  がその定義域全体  $A_{\text{dom}K}$  において狭義凹 (または狭義凸) である場合の証明を示す。これにより  $\{\alpha_n(t)\}_{n \in \mathbb{N}}$  の単調性が期待値の近傍のみならず、その定義域である开区間全体において成り立つことが示される。

命題 4.2 では  $\{\alpha_n(t)\}_{n \in \mathbb{N}}$  の収束を大域的に見るために、キュムラント母関数  $K(\alpha)$  が実効定義域  $\text{dom}K = (-a, b)$  ( $a, b \in \bar{\mathbb{R}}_+$ ) において狭義凸であるとする。この仮定は特に強いものではなく、例 3.1 から例 3.5 に挙げたキュムラント母関数は、いずれも実効定義域において狭義凸である。この仮定の下では  $K$  の鞍点；

$$\alpha : t \in A_{\text{dom}K} \mapsto \alpha(t) \in \text{dom}K, \quad \text{where } A_{\text{dom}K} = (K'(-a+0), K'(b-0))$$

は同型写像となる (竹内 (2013) 命題 2.3, 補題 3.6)。

**命題 4.2** 統計量  $S_n$  の鞍点 (4.4) について,  $\alpha(t)$  は  $A_{\text{dom}K}$  において狭義凹関数であるとする. 开区間  $I_n$  を次のようにおく.

$$I_n = \left( \frac{\sqrt{n}}{\sigma}(K'(-a+0) - \mu), \frac{\sqrt{n}}{\sigma}(K'(b-0) - \mu) \right) \quad \text{for } n \in \mathbb{N} \quad (4.9)$$

このとき次が成り立つ.

- (i) 任意に固定した  $n \in \mathbb{N}$  について,  $\alpha_n(u) = u$  であることと  $u = 0$  は同値である.
- (ii) 任意に固定した  $n \in \mathbb{N}$  について,  $u \in I_n \setminus \{0\}$  のとき  $\alpha_n(u) < u$  である.
- (iii)  $n \in \mathbb{N}$  を任意に固定する.  $u \in I_n \setminus \{0\}$  なる各点  $u$  について,  $\{\alpha_m(u)\}_{m=n+1, \dots}$  は狭義単調増加列である.
- (iv) 原点に十分近い  $u$  について  $\{\gamma_n^{(sp)}(u)\}_{n \geq 2}$  は狭義単調増加列である.

ただし  $\alpha(t)$  が狭義凸の場合には (ii) の不等式は逆向きに, (iii) および (iv) は狭義単調減少列となる.

**証明 4.2** (4.9) は  $\alpha_n(u)$  の定義域であり,  $t = \mu + \sigma u / \sqrt{n}$  が  $A_{\text{dom}K}$  の全体を動くとき  $u$  は  $I_n$  の全体を動き, その逆も成り立つ.

(i) と (ii) について,  $g_n(u) = \alpha_n(u) - u$  とおく.  $K(\alpha)$  の狭義凸性より, 任意に固定した  $n \in \mathbb{N}$  について  $0 \in I_n$  である. このとき  $g_n(0) = g'_n(0) = 0$ , および  $\alpha(t)$  の狭義凹性より  $g''_n(u) < 0$  が  $u \in I_n$  において成り立つことより明らか.

(iii) について,  $u \in \mathbb{N}$  を任意に固定し  $u \in I_n \setminus \{0\}$  とする.  $\alpha_{x^2}(u) = \sigma x \alpha(\mu + \sigma u/x)$  とおき, これを  $x \geq \sqrt{n}$  について微分することで

$$\frac{1}{\sigma} \frac{\partial}{\partial x} \alpha_{x^2}(u) = \alpha\left(\mu + \frac{\sigma u}{x}\right) - \frac{\sigma u}{x} \alpha'\left(\mu + \frac{\sigma u}{x}\right) \quad (4.10)$$

を得る.  $\alpha(t)$  が狭義凹であることから  $K'(-a+0) < \mu + h < K'(b-0)$  であるような  $h \neq 0$  について

$$\alpha(\mu + h) - \alpha(\mu) > h \alpha'(\mu + h)$$

が成り立つ. 従って  $h = \sigma u/x$  とおけば (4.10) の右辺が正であることを得る. よって  $\alpha_{x^2}(u)$  は  $x$  について狭義単調増加関数であるから,  $m > n > 1$  なる任意の自然数について  $\alpha_m(u) > \alpha_n(u)$  が成り立つ.

(iv) について, (2.2) と (4.4) より

$$\gamma_n^{(sp)}(u) = \frac{\sigma^3}{\sqrt{n}} \alpha''\left(\mu + \frac{\sigma}{\sqrt{n}} u\right) / \left\{ 1 + \sigma^4 \left( \alpha'\left(\mu + \frac{\sigma}{\sqrt{n}} u\right) \right)^2 \right\}^{3/2}$$

である. ここで  $\sqrt{n}$  を  $x$  とおいて

$$\frac{\partial}{\partial x} \gamma_{x^2}^{(sp)}(0) = -\frac{\sigma^3}{2^{3/2}x^2} \alpha''(\mu) > 0$$

を得る. このとき  $\frac{\partial}{\partial x} \gamma_{x^2}^{(sp)}(u)$  は  $u$  について十分滑らかであるから原点の近傍において正値をとる. よって  $\{\gamma_n^{(sp)}(u)\}_{n \geq 2}$  はこの近傍において狭義単調増加列である.

**例 4.7** 例 3.1 から例 3.5 のうち正規および 2 項を除く分布が, 命題 4.2 の条件を満たしている. 従って逆ガウス分布の場合も  $\alpha_n(u)$  が狭義凹であり, 原点以外の各点  $u$  において  $\{\alpha_n(u)\}_{n \in \mathbb{N}}$  は狭義単調増加列となるが, この事実は図 3 から確認される. 図 4 は原点の近傍における sp-曲率の狭義単調増加性を示している.

## 5. sp-曲率と漸近正規性

次の結果は竹内 (2013) 定理 5.4 の系であり, 一般の統計量の漸近正規性の十分条件を sp-曲率によって与えたものである. 統計量  $T_n$  のキウムラント母関数を  $K_n$  とし, その鞍点と sp-曲率をそれぞれ  $\alpha_n, \gamma_n^{(sp)}(t)$  とする. また  $N$  は標準正規分布に従う確率変数である.

**系 5.1** キウムラント母関数  $K_n$  は原点を含む開区間  $I$  上で, 全ての  $n \in \mathbb{N}$  について狭義凸であるとする. また次の 2 つの条件が満たされているとする.

- (i)  $\alpha_n(0) \rightarrow 0, \alpha'_n(0) \rightarrow 1$  as  $n \rightarrow \infty$ .
- (ii) ある正数  $\delta$  が存在し  $\sup_{|t| < \delta} |\gamma_n^{(sp)}(t)| \rightarrow 0$  as  $n \rightarrow \infty$ .

このとき  $T_n \xrightarrow{\mathcal{L}} N$  が成り立つ.

**証明 5.1** sp-曲率の定義 (2.2) および (i) より

$$\alpha''_n(t) \sim \left(1 + \frac{1}{\sigma^4}\right)^{3/2} \gamma_n^{(sp)}(t) \quad \text{as } t \rightarrow 0, n \rightarrow \infty$$

である. 一方  $t=0$  におけるテイラー展開より, ある  $0 < \theta < 1$  について

$$\alpha_n(t) - t = \alpha_n(0) + (\alpha'_n(0) - 1)t + \frac{1}{2} \alpha''_n(\theta t) t^2$$

が成り立つ. よって (i) および (ii) より  $n \rightarrow \infty$  のとき  $\sup_{|t| < \delta} |\alpha_n(t) - t| \rightarrow 0$  を得ることから竹内 (2013) 定理 5.4 より結論を得る.

sp-曲率を用いて法則収束を述べる場合, 系 5.1 の条件 (i) のような 1 次および 2 次モーメント列に関する収束条件を要するが, これは定理 2.1 の主張からも明らかである. 系 5.1 を利用し, 独立に同一な分布に従う確率変数に関する中心極限定理の証明を次のように与えることができる.

**系 5.2** 確率変数  $X_1, X_2, \dots$  は独立に確率分布  $F$  に従っているとす。統計量  $S_n = \sqrt{n}(\bar{X}_n - \mu)/\sigma$  のキムラント母関数  $K_n$  が系 5.1 と同じ条件を満たすとき  $S_n \xrightarrow{\mathcal{L}} N$  が成り立つ。

**証明 5.2**  $S_n$  の鞍点を  $\alpha_n$ , sp-曲率を  $\gamma_n^{(sp)}(t)$  とす。  $F$  の鞍点を  $\alpha$  とすれば (4.4) より任意の  $n \in \mathbb{N}$  について  $\alpha_n(0) = 0$  および  $\alpha'_n(0) = 1$  である。一方 (4.6) および  $\alpha$  の滑らかさより, 十分小さな正数  $\delta$  と定数  $M > 1$  について

$$\sup_{|t| < \delta} |\gamma_n^{(sp)}(t)| \leq M \frac{\sigma^3}{\sqrt{n}} \sup_{|t| \leq \delta} |\alpha''(\mu + \sigma t)| \rightarrow 0 \quad \text{as } n \rightarrow \infty$$

が成り立つ。よって系 5.1 より結論を得る。

## 謝辞

査読者の的確なコメントにより論文を改善できましたことを感謝致します。

## 参考文献

- Daniels, H. E. (1980). Exact saddlepoint approximations, *Biometrika*, **67**, 59–63.  
 Efron, B. (1975). Defining the curvature of a statistical problem, *Ann. Statist.*, **3**, 1189–1242.  
 Hall, P. (1992). *The Bootstrap and Edgeworth Expansion*, Springer-Verlag, New York.  
 Laha, R. G. and Rohatgi, V. K. (1979). *Probability Theory*, John Wiley & Sons, New York.  
 Lukacs, E. (1970). *Characteristic Functions*, 2nd ed., Charles Griffin, London.  
 Lukacs, E. (1983). *Developments in Characteristic Function Theory*, Macmillan, New York.  
 清水良一 (1976). 『中心極限定理』教育出版。  
 竹内宏行 (2013). 「鞍点と確率分布の対応について」『日本統計学会誌』 **42**(2), 185–208.