

周波数領域における時系列間の因果性の変化の検証

木下 亮*, 大屋 幸輔†

Measurement of Causality Change between Multiple Time Series

Ryo Kinoshita* and Kosuke Oya†

時系列間の因果性の検証には Granger による因果性検定など代表的な方法があるが、本稿では構造変化が因果性の大きさに、どのような変化をもたらしたかを検証する方法を提案する。Hosoya (1991) において定義された周波数領域上での因果性測度を利用し、構造変化の時点を既知とした上で、因果性の変化の程度を測り、有意な変化が生じているかどうかを検証するための Wald 検定統計量を提案した。この検定統計量では各周波数における因果性の変化を検出することが可能であり、誤差修正モデルにおいても応用が可能である。検定統計量の有限標本における特性をモンテカルロ実験によって確認し、応用例として日米の株価指数を用いた実証分析を行った。

Structural change is gauged with the change of parameters in the model. In the case of multiple time series model, the causality between the time series also changes when there is a structural change. However the magnitude of change in causality is not clear in the case of structural change. We explore the measure of causality change between the time series and propose the test statistic whether there is any significance change in the causal relationship using frequency domain causality measure given by Geweke (1982) and Hosoya (1991). These procedures can be applied to error correction model which is non-stationary time series. The properties of the measure and test statistic are examined through the Monte Carlo simulation. As an example of application, the change in causality between United states and Japanese stock indexes is tested.

キーワード：因果性測度、周波数領域、ECM モデル、構造変化

1. はじめに

標本期間の異なる統計的推測に際して、異なる推定結果を得た場合やモデルの特定化が異なる場合、モデルの構造は変化していることになる。一方で、モデルの構造の変化が変数間の因果性に、どの程度の変化をもたらすのかは明らかではない。本稿ではそのような構造変化が、時系列間の因果性をどのように変化させたのかを検証する方法を提案する。

* 大阪大学経済学研究科：〒 560-0043 大阪府豊中市待兼山町 1-7 (E-mail: r-kinoshita@econ.osaka-u.ac.jp).

† 大阪大学経済学研究科：〒 560-0043 大阪府豊中市待兼山町 1-7 (E-mail: oya@econ.osaka-u.ac.jp).

時系列間の因果性の測度は Granger (1963, 1969) によって一期先予測誤差の分散比という形で導入され, Geweke (1982) は Granger 因果性測度の単調変換をスペクトル分解し, 周波数領域における因果性測度を提案した. Geweke (1982) の因果性測度は, 定常な VAR モデル (ベクトル自己回帰モデル) を対象としており, VAR モデルによる表現が可能でない時系列モデルに対して因果性測度は定義されていない. また VAR モデルの中でも特定の仮定を満たさない場合には周波数領域への分解が必ずしも成立していない. その後 Hosoya (1991) で, この問題を克服する因果性測度が新たに導入された. Geweke (1982) と同様に, Hosoya (1991) で定義された因果性測度は Granger 因果性測度の考え方を背景に持っており, Granger (1963, 1969) や Geweke (1982) が対象としていた VAR モデル以外の定常時系列に対しても定義されている. Geweke (1982) と Hosoya (1991) の因果性の測度は特定の仮定の下では一致するが, Hosoya (1991) の方がより一般的な定義となっている. Yao and Hosoya (2000) では Hosoya (1991) を拡張し, 非定常時系列間の因果性測度を定義し, 特に誤差修正モデルにおける因果性測度の推定方法と Wald 検定統計量による検定法を提案している. Breitung and Candelon (2006) では, Geweke (1982) と Hosoya (1991) の因果性測度に基づいて, 因果性測度がゼロであることと同値な時系列モデルへの線形制約とそれに関する検定統計量が導出されている. また Hosoya (2001) では, 第三の確率変数が存在する場合の偏因果性測度を定義している. 国友・山本 (1986a, b) では, Akaike (1968) で導入された RPC (相対的パワー寄与率) を用いた因果性の検定を提案し, 国内マクロ時系列を用いた実証分析を行っている.

本稿では, Hosoya (1991) の因果性測度に基づき, Yao and Hosoya (2000) の方法を応用し, モデルの構造変化の時点を既知とした上で, 因果性測度の変化を検出する為の Wald 検定統計量を提案した.

続く以下第 2 節では, Geweke (1982) と Hosoya (1991) で導入された因果性測度と Yao and Hosoya (2000) で拡張された非定常時系列における因果性測度について概説を与える. 第 3 節では, Yao and Hosoya (2000) で提案された因果性に対する Wald 検定統計量を例示した後, 因果性の変化を検出する為の Wald 検定統計量の導出を行い, 詳細な検定手続きを述べ, 第 4 節において, 導出した検定統計量の性質をモンテカルロ実験によって検討し, 第 5 節では, 日本と米国の株式指数間の因果性に関する応用例を示す.

2. 因果性の測度

本節では, Hosoya (1991) で導入された時系列間の因果性の測度について説明し, 変数の定義を行う. Hosoya (1991) では, 確率変数ベクトル間の因果性測度を定義しているが, ここでは簡単化の為に 2 変数間の因果性測度を説明する. なお, これらの詳細な導出は細谷 (2009) で説明されているため, ここでは簡略的な説明のみを与えることとする.

2.1 定義

$X(t)$ と $Y(t)$ はそれぞれ定常な確率過程であり、それらを $Z(t) = [X(t) \ Y(t)]'$ とする。このとき $Z(t)$ の同時スペクトル密度関数は以下で与えられるものとする。

$$f(\lambda) = \begin{bmatrix} f_{11}(\lambda) & f_{12}(\lambda) \\ f_{21}(\lambda) & f_{22}(\lambda) \end{bmatrix}, \quad -\pi < \lambda \leq \pi. \quad (2.1)$$

スペクトル密度関数 $f(\lambda)$ は

$$\int_{-\pi}^{\pi} \log \det(f(\lambda)) d\lambda > -\infty \quad (2.2)$$

を満たしていると仮定する。このとき $f(\lambda)$ は正準分解によって

$$f(\lambda) = \frac{1}{2\pi} \Lambda(e^{-i\lambda}) \Lambda(e^{-i\lambda})^* \quad (2.3)$$

と書くことができる。ただし、上付き添え字の $*$ は共役転置行列を表す。更に $Z(t)$ の一期先予測誤差、すなわち $Z(t)$ を $\{X(s)\}_{-\infty}^{t-1}$ と $\{Y(s)\}_{-\infty}^{t-1}$ に線形射影した残差の分散共分散行列を

$$\Sigma = \begin{bmatrix} \sigma_1^2 & \rho\sigma_1\sigma_2 \\ \rho\sigma_1\sigma_2 & \sigma_2^2 \end{bmatrix} \quad (2.4)$$

と表す。ここで $\Sigma = \Lambda(0)\Lambda(0)^*$ である。

$Y(t)$ を $\{X(s)\}_{-\infty}^t, \{Y(s)\}_{-\infty}^{t-1}$ に線形射影した残差を $Y_{0,-1}(t)$ と定義する。この $Y_{0,-1}(t)$ は時点 t において $X(t)$ と相関を持たないショックであり、 $Y(t)$ 固有のショックとみなすことができる。また $Y_{0,-1}(t)$ はホワイトノイズとなっている。 $X(t)$ と $Y_{0,-1}(t)$ の同時スペクトル密度関数を以下のように定義する。

$$\tilde{f}(\lambda) = \begin{bmatrix} \tilde{f}_{11}(\lambda) & \tilde{f}_{12}(\lambda) \\ \tilde{f}_{21}(\lambda) & \tilde{f}_{22}(\lambda) \end{bmatrix}, \quad -\pi < \lambda \leq \pi. \quad (2.5)$$

ここで $\tilde{f}_{11}(\lambda) = f_{11}(\lambda)$, $\tilde{f}_{21} = [-(\rho\sigma_1\sigma_2)/\sigma_1^2 \ 1] \Lambda(0)\Lambda(e^{-i\lambda})^{-1}f_{\cdot 1}(\lambda)$, $\tilde{f}_{22} = (1-\rho^2)\sigma_2^2/(2\pi)$ である。ただし $f_{\cdot 1}(\lambda)$ は $f(\lambda)$ の一列目、すなわち $f_{\cdot 1}(\lambda) = [f_{11}(\lambda) \ f_{21}(\lambda)]'$ である。このとき Hosoya (1991) で提案されている因果性測度は

$$M_{Y \rightarrow X} = \log(\sigma_{-1,\cdot}^2 / \tilde{\sigma}_1^2) \quad (2.6)$$

となる。ただし $\sigma_{-1,\cdot}^2$ は $X(t)$ を $\{X(s)\}_{-\infty}^{t-1}$ へ線形射影した残差の分散であり、 $\tilde{\sigma}_1^2$ は $\{X(s)\}_{-\infty}^{t-1}$ と $\{Y_{0,-1}(s)\}_{-\infty}^{t-1}$ に線形射影した残差の分散である。(2.6) では、 $Y(t)$ にのみ与えられたショック $Y_{0,-1}(t)$ の、過去の情報を用いることによる $X(t)$ の一期先予測の分散の対数値での減少を、 $Y(t)$ から $X(t)$ への因果性測度として定義している。 $Y_{0,-1}(t)$ から $X(t)$

への Granger 因果性測度の単調変換を $Y(t)$ から $X(t)$ への因果性測度と読み換えていると言っても良い。この因果性測度は、定常時系列の一期先予測誤差の分散のスペクトル密度関数での分解の公式 $\det(\Sigma) = (2\pi)^2 \exp\{(1/2\pi) \int_{-\pi}^{\pi} \log \det(f(\lambda)) d\lambda\}$ から

$$\sigma_{-1,\cdot}^2 = 2\pi \exp \left\{ \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \log(f_{11}(\lambda)) d\lambda \right\},$$

$$\tilde{\sigma}_1^2 = 2\pi \exp \left\{ \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \log \left(f_{11}(\lambda) - 2\pi \frac{\| \tilde{f}_{12}(\lambda) \|^2}{\tilde{f}_{22}(\lambda)} \right) d\lambda \right\}$$

となることを利用して、周波数分解することができる (詳細は Hosoya (1991) Lemma 2.4 参照)。このとき、周波数分解された因果性測度は以下で与えられる。

$$M_{Y \rightarrow X}(\lambda) = \log \left(\frac{f_{11}(\lambda)}{f_{11}(\lambda) - 2\pi \| \tilde{f}_{12}(\lambda) \|^2 / \tilde{f}_{22}(\lambda)} \right), \quad -\pi < \lambda \leq \pi. \quad (2.7)$$

またこの分解の下では

$$M_{Y \rightarrow X} = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} M_{Y \rightarrow X}(\lambda) d\lambda$$

が成立する。ただし、 $\| \tilde{f}_{12}(\lambda) \|^2 = \tilde{f}_{12}(\lambda) \tilde{f}_{21}(\lambda)$ を表す。 $f_{11}(\lambda) - 2\pi \| \tilde{f}_{12}(\lambda) \|^2 / \tilde{f}_{22}(\lambda)$ は $X(t)$ を $\{Y_{0,-1}(t)\}_{-\infty}^{\infty}$ に射影した残差のスペクトル密度関数となっている。この因果性測度を求めるには、スペクトル密度関数 $f(\cdot)$ とスペクトル密度関数の正準分解 $\Lambda(\cdot)$ 、さらに (2.5) で与えられる $\tilde{f}(\cdot)$ を求める必要があるが、導出については次節で与える。Hosoya (1991) では特定の時系列モデルを基にした議論ではなく、スペクトル密度関数を用いて因果性測度を定義しており、Geweke (1982) より一般性のある測度となっている。Hosoya (1991) では、Geweke (1982) では因果性測度が定義されていない例と、因果性測度の周波数分解が成立しない例があげられている。

Hosoya (1991) では、これらの議論を確率変数ベクトルの因果性に一般化して、同時スペクトル密度関数 $f(\lambda)$ と一期先予測誤差の分散共分散行列 $\Sigma = (\Sigma_{ij})$, $(i, j = 1, 2)$ を持つ確率変数ベクトル $X(t)$ と $Y(t)$ 間の因果性測度を

$$M_{Y \rightarrow X} = \log \left(\det(\Sigma_{-1,\cdot}) / \det(\tilde{\Sigma}_{11}) \right) \quad (2.8)$$

として定義している。ただし $\Sigma_{-1,\cdot}$ は $X(t)$ を $\{X(s)\}_{-\infty}^{t-1}$ へ射影した残差の分散共分散行列、 $\tilde{\Sigma}_{11}$ は $X(t)$ を $\{X(s)\}_{-\infty}^{t-1}$ と $\{Y_{0,-1}(s)\}_{-\infty}^{t-1}$ へ射影した残差の分散共分散行列である。周波数分解された因果性測度は

$$M_{Y \rightarrow X}(\lambda) = \log \left(\frac{\det(f_{11}(\lambda))}{\det(f_{11}(\lambda) - 2\pi \tilde{f}_{12}(\lambda) \tilde{f}_{22}(\lambda)^{-1} \tilde{f}_{21}(\lambda))} \right), \quad -\pi < \lambda \leq \pi \quad (2.9)$$

として定義されている。ただし $\tilde{f}_{11}(\lambda) = f_{11}(\lambda)$, $\tilde{f}_{21}(\lambda) = [-\Sigma_{21} \Sigma_{11}^{-1} \ I] \Lambda(0) \Lambda(e^{-i\lambda})^{-1} f_{11}(\lambda)$, $\tilde{f}_{22}(\lambda) = (\Sigma_{22} - \Sigma_{21} \Sigma_{11}^{-1} \Sigma_{12}) / (2\pi)$, $f_{11}(\lambda) = [f_{11}(\lambda) \ f_{21}(\lambda)]'$ である。(2.9) 式から明らか

なように、因果性測度は比率で定義されているため、スペクトル密度関数を定数倍しても因果性測度は不変である。また Hosoya (1991) では、因果性測度の他に相互測度 (measure of reciprocity) と結合測度 (measure of association) を定義している。

2.2 時系列モデルにおける因果性測度

周波数領域における因果性測度を求めるには、スペクトル密度関数とその正準分解の計算が必要である。以下では時系列モデルにおけるスペクトル密度関数と正準分解の計算について説明を与える。 $Z(t) = [X(t) \ Y(t)]'$ は以下で表される時系列とする。

$$A(L)Z(t) = B(L)\epsilon(t), \quad \epsilon(t) \sim N(0, \Sigma) \quad (2.10)$$

L はラグオペレータであり、その多項式 $A(L)$ と $B(L)$ をそれぞれ $A(L) = I - A_1L - A_2L^2 - \dots - A_pL^p$, $B(L) = I + B_1L + B_2L^2 + \dots + B_qL^q$ とする。 $Z(t)$ が定常な時系列であるとき、(2.10) の MA 表現

$$Z(t) = A(L)^{-1}B(L)\epsilon(t) = A(L)^{-1}B(L)\Sigma^{1/2}u(t), \quad u(t) \sim N(0, I)$$

における右辺の $A(L)^{-1}B(L)\Sigma^{1/2}$ はスペクトル密度関数の正準分解に対応するので、 $\Lambda(\cdot) = A(\cdot)^{-1}B(\cdot)\Sigma^{1/2}$ とすればよい。

Geweke (1982) では、 $\det(A(L)^{-1}B(L)) = 0$ の根が単位円上にある場合に因果性測度が定義されていない。また、(2.10) における $X(t)$ が反転可能な MA と反転不可能な MA の和となっている場合には、Geweke (1982) の因果性測度の周波数分解が必ずしも成立しない。特定の仮定が満たされた場合には Geweke (1982) の因果性測度は Hosoya (1991) の因果性測度と一致する。

$Z(t)$ のスペクトル密度関数は

$$f(\lambda) = \frac{1}{2\pi} A(e^{-i\lambda})^{-1} B(e^{-i\lambda}) \Sigma B(e^{-i\lambda})^* A(e^{-i\lambda})^{-1*} \quad (2.11)$$

として計算することができる。また、 $X(t)$ と $Y_{0,-1}(t)$ の同時スペクトル密度関数 $\tilde{f}(\lambda)$ は

$$\tilde{f}(\lambda) = \begin{bmatrix} f_{11}(\lambda) & ([-\Sigma_{21}\Sigma_{11}^{-1} \ I] B(e^{-i\lambda})^{-1} A(e^{-i\lambda}) f_{11}(\lambda))^* \\ [-\Sigma_{21}\Sigma_{11}^{-1} \ I] B(e^{-i\lambda})^{-1} A(e^{-i\lambda}) f_{11}(\lambda) & \frac{1}{2\pi} (\Sigma_{22} - \Sigma_{21}\Sigma_{11}^{-1}\Sigma_{12}) \end{bmatrix}$$

として求められる。これらと (2.9) から Hosoya (1991) の因果性測度をもとめることができる。

$Z(t)$ が非定常時系列である場合は、定常に変換された時系列でのスペクトル密度関数を用い、その上で因果性測度を考える。Yao and Hosoya (2000) では以下のように、非定常時系列における因果性測度を定義している。まず (2.10) 式の両辺から $A(L)$ の転置余因子行列 $\phi(L)$ を掛けることによって

$$\det(A(L))Z(t) = \phi(L)B(L)\epsilon(t) \quad (2.12)$$

と $Z(t)$ を変換する. ただし $\det(A(L))I = \phi(L)A(L)$ である. Yao and Hosoya (2000) では根が全て単位円上か外にあると仮定した上で, 上式の右辺から求めたスペクトル密度関数を使って因果性測度を定義することを提案している. スペクトル密度関数は

$$f(\lambda) = \frac{1}{2\pi} \phi(e^{-i\lambda}) B(e^{-i\lambda}) \Sigma B(e^{-i\lambda})^* \phi(e^{-i\lambda})^* \quad (2.13)$$

であり, その正準分解は $\Lambda(e^{-i\lambda}) = \phi(e^{-i\lambda}) B(e^{-i\lambda}) \Sigma^{1/2}$ となる.

2.3 誤差修正モデルにおける因果性測度

本節では, Yao and Hosoya (2000), Breitung and Candelon (2006) と同様に, 誤差修正モデルにおける因果性測度の計算を説明する. 誤差修正モデルは $Z(t)$ を $p \times 1$ の確率過程, r を共和分のランクとすると

$$\Delta Z(t) = \Pi Z(t-1) + \sum_{j=1}^{a-1} \Psi(j) \Delta Z(t-j) + \Phi P(t) + \epsilon(t), \quad \epsilon(t) \sim N(0, \Omega) \quad (2.14)$$

と書くことができる. ここで Π は $p \times p$ の正方行列であるが, そのランクは $\text{rank}(\Pi) = r$ であり, $p \times r$ の行列 α, β を用いて $\Pi = \alpha\beta'$ と表現できるものとする. $P(t)$ は外生変数であり Φ はその係数行列である. $Z(t)$ は非定常時系列であるから, $\det(A(L))Z(t)$ 上での因果性測度を考える. $\det(A(L))Z(t) = \phi(L)\epsilon(t)$ として MA 表現すると, $\phi(L)$ は

$$A(L)\phi(L) = \left(I - (I + \alpha\beta')L - \sum_{j=1}^{a-1} \Psi(j)(L^j - L^{j+1}) \right) \phi(L) = \det(A(L))I, \quad (2.15)$$

を満たす. このとき $\det(A(L)) = 0$ は単位円上に根を持つが, $\det(\phi(L)) = 0$ は単位円上に根を持たない. すなわち, $\det(A(L))$ には階差を取る変換が含まれている. 変換後の $\det(A(L))Z(t)$ では, 変数間の長期的な関係が除去されているように見えるが, 実際は, (2.14) にある通り, 誤差修正モデルは階差を取った後も長期関係を表すパラメータ $\Pi = \alpha\beta'$ を含んでおり, 共和分ベクトル β は $\det(A(L))Z(t)$ 上のスペクトル密度関数及び因果性測度に影響を与えている.

$Z(t)$ に対しては, 周波数ゼロ, すなわち $L = 1$ において, $A(L) = I - (I + \alpha\beta')L - \sum_{j=1}^{a-1} \Psi(j)(L^j - L^{j+1})$ は特異となる為, $A(1)^{-1}$ が存在しないことには注意が必要である. このため, 誤差修正モデルにおいて, $Z(t)$ に対する周波数ゼロでの因果性測度は定義されないが, ゼロ近傍における因果性測度に長期因果性測度としての解釈を与えることはできる (詳しくは, Granger and Lin (1995) 参照).

3. 構造変化と因果性の変化

本節では, 時系列モデルにおいて構造変化があった場合の因果性の変化に対する検定統計量を導出する. 特に, Yao and Hosoya (2000), Breitung and Candelon (2006) と同様

に、誤差修正モデルに限定して具体的な検定の手順を述べる。はじめに、Yao and Hosoya (2000) で提案された因果性測度がゼロであることに対する検定統計量について説明をあたえた後に、因果性測度の変化に関する検定統計量について考察する。

3.1 因果性測度がゼロであることに対する検定

Yao and Hosoya (2000) では、最尤推定量の漸近正規性とデルタ法を利用した Wald 検定統計量によって、因果性の有無に関する検定を行うことを提案している。誤差修正モデルの最尤推定に関しては Johansen (1995) の方法を用いる。誤差修正モデルは

$$\Delta Z(t) = \Pi Z(t-1) + \sum_{j=1}^{a-1} \Psi(j) \Delta Z(t-j) + \Phi P(t) + \epsilon(t), \quad \epsilon(t) \sim N(0, \Omega)$$

と書くことができる。ただし $\Pi = \alpha\beta'$ であり、共和分のランクが r のとき、 α と β は $p \times r$ の行列で、 $\text{rank}(\Pi) = p - r$ となる。また $\Psi = [\Psi(1), \Psi(2), \dots, \Psi(a-1)]'$ とする。以降 $\theta = \{\alpha, \Psi, \Phi, \Omega\}$ とし、 β とそれ以外のパラメータを分けて考える。

最尤推定量 $\hat{\beta}$, $\hat{\theta}$ はどちらも一致推定量であるが、前者の収束のスピードは T であり、後者の $\sqrt{T}$ よりも早いものとなっている。 $\hat{\theta}$ に関しては以下の漸近正規性が成立する。

$$\sqrt{T}(\hat{\theta} - \theta) \xrightarrow{d} N(0, V(\theta, \beta)), \quad (3.1)$$

$$V(\theta, \beta) = \begin{bmatrix} \Omega \otimes Q^{-1} & 0 \\ 0 & 2D^+(\Omega \otimes \Omega)D^{+'} \end{bmatrix} \quad (3.2)$$

ただし $Q = \lim_{T \rightarrow \infty} (1/T) \sum_{i=1}^T S(t)S(t)'$, $S(t) = \text{vec}(\beta'Z(t-1), \Delta Z(t-1), \dots, \Delta Z(t-a+1), P(t))$, D^+ は重複行列 (Duplication matrix) の一般化逆行列である (Duplication matrix の定義については Magnus and Neudecker (1988) 参照)。 $\Omega \otimes Q^{-1}$ は推定量 $\{\hat{\alpha}, \hat{\Psi}, \hat{\Phi}\}$ の漸近分散共分散行列であり、 $2D^+(\Omega \otimes \Omega)D^{+'}$ は推定量 $\hat{\Omega}$ の漸近分散共分散行列である。(3.2) に含まれるパラメータを一致推定量で置き換えたものを漸近分散共分散行列の推定量とし、 $V(\hat{\theta}, \hat{\beta})$ と表記する。ただし、 $\hat{Q} = 1/T \sum_{i=1}^T \hat{S}(t)\hat{S}(t)'$, $\hat{S}(t) = \text{vec}(\hat{\beta}'Z(t-1), \Delta Z(t-1), \dots, \Delta Z(t-a+1), P(t))$ である。定義 (2.9) において、因果性測度はスペクトル密度関数の要素を使って表現されているが、スペクトル密度関数自体はモデルのパラメータの関数であり、因果性測度 $M_{Y \rightarrow X}(\lambda; \theta, \beta)$ はパラメータの関数である。パラメータの推定量からスペクトル密度関数を求め、(2.9) に代入することで因果性測度 $M_{Y \rightarrow X}(\lambda; \theta, \beta)$ を推定し、 $M_{Y \rightarrow X}(\lambda; \hat{\theta}, \hat{\beta})$ と表記する。

以下では、最尤推定量の漸近分布と推定された因果性測度から Wald 検定統計量を求める。デルタ法により

$$\sqrt{T} \left(M_{Y \rightarrow X}(\lambda; \hat{\theta}, \hat{\beta}) - M_{Y \rightarrow X}(\lambda; \theta, \beta) \right) \xrightarrow{d} N(0, H(\theta, \beta))$$

となる. ただし $H(\theta, \beta) = (\partial M_{Y \rightarrow X}(\lambda; \theta, \beta) / \partial \theta') V(\theta, \beta) (\partial M_{Y \rightarrow X}(\lambda; \theta, \beta) / \partial \theta)$ である.

さらに, $H(\theta, \beta)$ に含まれる未知パラメータ θ, β は一致推定量で置き換えられ, 以下で定義される $W(\lambda)$ は漸近的に自由度 1 の χ^2 分布に収束する.

$$W(\lambda) = T \left(M_{Y \rightarrow X}(\lambda; \hat{\theta}, \hat{\beta}) - M_{Y \rightarrow X}(\lambda; \theta, \beta) \right)^2 / H(\hat{\theta}, \hat{\beta})$$

例えば特定の周波数 λ において, 帰無仮説及び対立仮説

$$H_0 : M_{Y \rightarrow X}(\lambda; \theta, \beta) = 0,$$

$$H_1 : M_{Y \rightarrow X}(\lambda; \theta, \beta) \neq 0,$$

に対する Wald 検定統計量は以下のように与えられる.

$$W(\lambda) = T \left(M_{Y \rightarrow X}(\lambda; \hat{\theta}, \hat{\beta}) \right)^2 / H(\hat{\theta}, \hat{\beta})$$

また, 微分係数ベクトル $\partial M_{Y \rightarrow X}(\lambda; \hat{\theta}, \hat{\beta}) / \partial \theta$ は (2.9) がパラメータの複雑な関数となっているため, 解析的に求めることが困難であり, Yao and Hosoya (2000) では数値微分が利用されている.

3.2 因果性測度の変化の検定

ここでは, 誤差修正モデルに対して, Yao and Hosoya (2000) で提案された検定統計量を基に因果性測度の変化を検出する為の検定統計量を導出する. まず, 誤差修正モデルにおいて c を定数とし, $T_1 = \lfloor cT \rfloor$ におけるパラメータの変化を仮定する (記号 $\lfloor x \rfloor$ は, 実数 x に対して x の整数部分を表す). $\theta_k = \{\alpha_k, \Psi_k, \Phi_k, \Omega_k\}$, $\theta = \{\theta_1, \theta_2\}$ とすると, T_1 において構造変化がある場合の誤差修正モデルは

$$\Delta Z(t) = \alpha_k \beta_k' Z(t-1) + \sum_{j=1}^{a_k-1} \Psi_k(j) \Delta Z(t-j) + \Phi_k P(t) + \epsilon(t), \quad \epsilon(t) \sim N(0, \Omega_k) \quad (3.3)$$

となる. ただし $t < T_1$ のとき $k = 1$, $T_1 \leq t$ のときは $k = 2$ とする.

パラメータの変化によってモデルは変化しているが, 因果性がどのように変化したかは必ずしも明らかではない. よって以下では, モデルの構造変化が時系列間の因果性にも変化を与えるものであるかどうかを検証する方法を提案する. Yao and Hosoya (2000) と同様に検定統計量は最尤推定とデルタ法により導出される. 対数尤度関数は c を所与として

$$\begin{aligned} l(\beta_1, \beta_2, \theta | Z) &= -\frac{T}{2} p \log(2\pi) + l_1(\beta_1, \theta_1 | Z) + l_2(\beta_2, \theta_2 | Z), \\ l_1(\beta_1, \theta_1 | Z) &= -\frac{cT}{2} \det(\Omega_1) - \frac{1}{2} \sum_{t=0}^{T_1} (\Delta Z(t) - \mu_1(t))' \Omega_1^{-1} (\Delta Z(t) - \mu_1(t)), \\ l_2(\beta_2, \theta_2 | Z) &= -\frac{T-cT}{2} \det(\Omega_2) - \frac{1}{2} \sum_{t=T_1+1}^T (\Delta Z(t) - \mu_2(t))' \Omega_2^{-1} (\Delta Z(t) - \mu_2(t)), \end{aligned}$$

$$\mu_k(t) = \alpha_k \beta'_k Z(t-1) + \sum_{j=1}^{a_k-1} \Psi_k(j) \Delta Z(t-j) + \Phi_k P(t), \quad k = 1, 2$$

となる。以下の最大化問題を解くことで、最尤推定量を得ることができる。

$$\max_{\beta_1, \beta_2, \theta} l(\beta_1, \beta_2, \theta | Z) = \max_{\beta_1, \theta_1} l_1(\beta_1, \theta_1 | Z) + \max_{\beta_2, \theta_2} l_2(\beta_2, \theta_2 | Z).$$

構造変化前と後のそれぞれで、前項と同様に周波数 λ における因果性測度 $M_{Y \rightarrow X}(\lambda; \hat{\theta}_1, \hat{\beta}_1)$, $M_{Y \rightarrow X}(\lambda; \hat{\theta}_2, \hat{\beta}_2)$ を計算し、因果性測度の推定量とする。推定量 $\hat{\theta} = [\hat{\theta}'_1, \hat{\theta}'_2]'$ に関してのみ考慮する。対数尤度関数に関して、 θ についての一階の条件を真のパラメータ周りでテーラー展開すると

$$\frac{1}{\sqrt{T}} \begin{bmatrix} \frac{\partial l_1(\beta_1, \theta_1 | Z)}{\partial \theta_1} \\ \frac{\partial l_2(\beta_2, \theta_2 | Z)}{\partial \theta_2} \end{bmatrix} = \frac{1}{T} \begin{bmatrix} \frac{\partial^2 l_1(\hat{\beta}_1, \hat{\theta}_1 | Z)}{\partial \theta_1 \partial \theta'_1} & 0 \\ 0 & \frac{\partial^2 l_2(\hat{\beta}_2, \hat{\theta}_2 | Z)}{\partial \theta_2 \partial \theta'_2} \end{bmatrix} \sqrt{T} \begin{bmatrix} \hat{\theta}_1 - \theta_1 \\ \hat{\theta}_2 - \theta_2 \end{bmatrix} + o_p(1)$$

となる。対角要素は

$$\begin{aligned} \text{plim}_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{T} \frac{\partial^2 l_1(\hat{\beta}_1, \hat{\theta}_1 | Z)}{\partial \theta_1 \partial \theta'_1} &= cV(\theta_1, \beta_1)^{-1}, \\ \text{plim}_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{T} \frac{\partial^2 l_2(\hat{\beta}_2, \hat{\theta}_2 | Z)}{\partial \theta_2 \partial \theta'_2} &= (1-c)V(\theta_2, \beta_2)^{-1} \end{aligned}$$

となることから

$$\sqrt{T}(\hat{\theta} - \theta) \xrightarrow{d} N \left(0, \begin{bmatrix} \frac{1}{c}V(\theta_1, \beta_1) & 0 \\ 0 & \frac{1}{1-c}V(\theta_2, \beta_2) \end{bmatrix} \right)$$

を得る。 $\hat{\theta}_1$ と $\hat{\theta}_2$ は漸近的に独立であり、その連続関数である $M_{Y \rightarrow X}(\lambda; \hat{\theta}_1, \hat{\beta}_1)$ と $M_{Y \rightarrow X}(\lambda; \hat{\theta}_2, \hat{\beta}_2)$ も独立である。従って、因果性測度の変化を表わす $M_{Y \rightarrow X}(\lambda; \hat{\theta}_1, \hat{\beta}_1) - M_{Y \rightarrow X}(\lambda; \hat{\theta}_2, \hat{\beta}_2)$ の漸近分布は

$$\begin{aligned} &M_{Y \rightarrow X}(\lambda; \hat{\theta}_1, \hat{\beta}_1) - M_{Y \rightarrow X}(\lambda; \hat{\theta}_2, \hat{\beta}_2) \\ &\stackrel{d}{\sim} N \left(M_{Y \rightarrow X}(\lambda; \theta_1, \beta_1) - M_{Y \rightarrow X}(\lambda; \theta_2, \beta_2), \mathcal{V}(\theta, \beta_1, \beta_2) \right) \end{aligned}$$

として与えられる。ただし、

$$\begin{aligned} \mathcal{V}(\theta, \beta_1, \beta_2) &= \frac{1}{cT} \frac{\partial M_{Y \rightarrow X}(\lambda; \theta_1, \beta_1)}{\partial \theta'_1} V(\theta_1, \beta_1) \frac{\partial M_{Y \rightarrow X}(\lambda; \theta_1, \beta_1)}{\partial \theta_1} \\ &\quad + \frac{1}{(1-c)T} \frac{\partial M_{Y \rightarrow X}(\lambda; \theta_2, \beta_2)}{\partial \theta'_2} V(\theta_2, \beta_2) \frac{\partial M_{Y \rightarrow X}(\lambda; \theta_2, \beta_2)}{\partial \theta_2}. \end{aligned}$$

このとき特定の周波数 λ において、因果性測度に有意な差があったかどうかを検証するために、帰無仮説及び対立仮説

$$H_0 : M_{Y \rightarrow X}(\lambda; \theta_1, \beta_1) = M_{Y \rightarrow X}(\lambda; \theta_2, \beta_2)$$

$$H_1 : M_{Y \rightarrow X}(\lambda; \theta_1, \beta_1) \neq M_{Y \rightarrow X}(\lambda; \theta_2, \beta_2)$$

を考える。Wald 検定統計量は $\mathcal{V}(\theta, \beta_1, \beta_2)$ の未知パラメータ θ, β_1, β_2 を推定量で置き換えることによって以下で与えられ、帰無仮説の下で漸近的に自由度 1 の χ^2 分布に従う。

$$W(\lambda) = (M_{Y \rightarrow X}(\lambda; \hat{\theta}_1, \hat{\beta}_1) - M_{Y \rightarrow X}(\lambda; \hat{\theta}_2, \hat{\beta}_2))^2 / \mathcal{V}(\hat{\theta}, \hat{\beta}_1, \hat{\beta}_2) \quad (3.4)$$

本節で与えられている検定統計量は、収束のスピードが $\sqrt{T}$ である推定量の分布に基づいて構成されており、 T のスピードで収束する共和分ベクトルの推定量 $\hat{\beta}$ の分布の影響は考慮されていない。また検定統計量は漸近的には χ^2 分布に従うが、因果性測度のパラメータに関する微分係数は非線形関数であり、真のパラメータ周りでの線形近似の精度が良くない場合には、有限標本では検定のサイズの歪みや検出力に対して影響を与える可能性がある。次節では、ここで導出した検定統計量 (3.4) の有限標本特性についてモンテカルロ実験を用いて検証する。

4. モンテカルロ実験

本節では、モンテカルロ実験による検定統計量の有限標本特性を述べる。本稿における数値計算は全て行列言語 Ox 6 (Doornik (2007)) を用いている。まず、定常 VAR モデルにおける因果性測度の変化に関する実験の結果を述べる。定常 VAR モデルにおけるモンテ

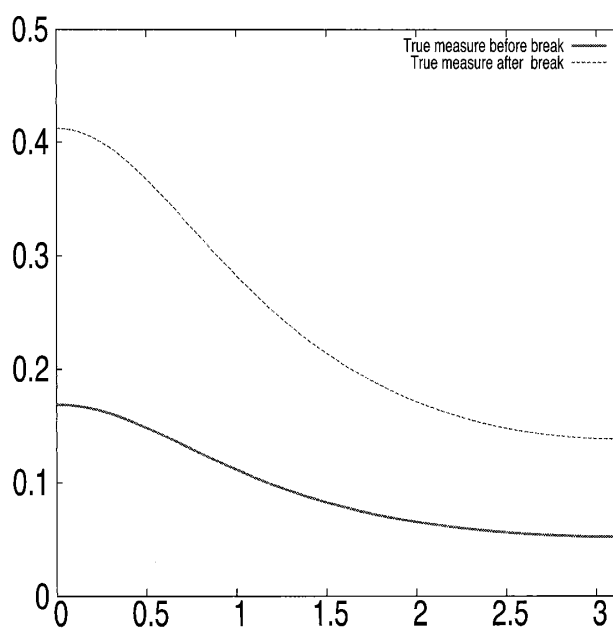


図1 真の因果性測度.

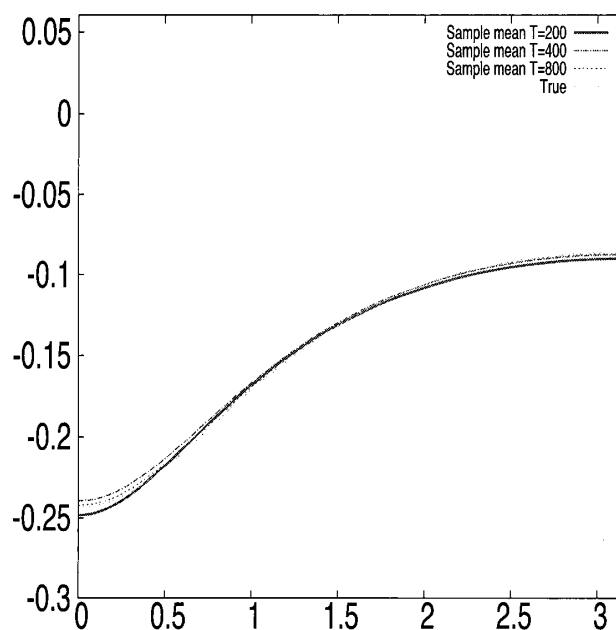


図2 真の因果性測度の差と実験における推定値の算術平均.

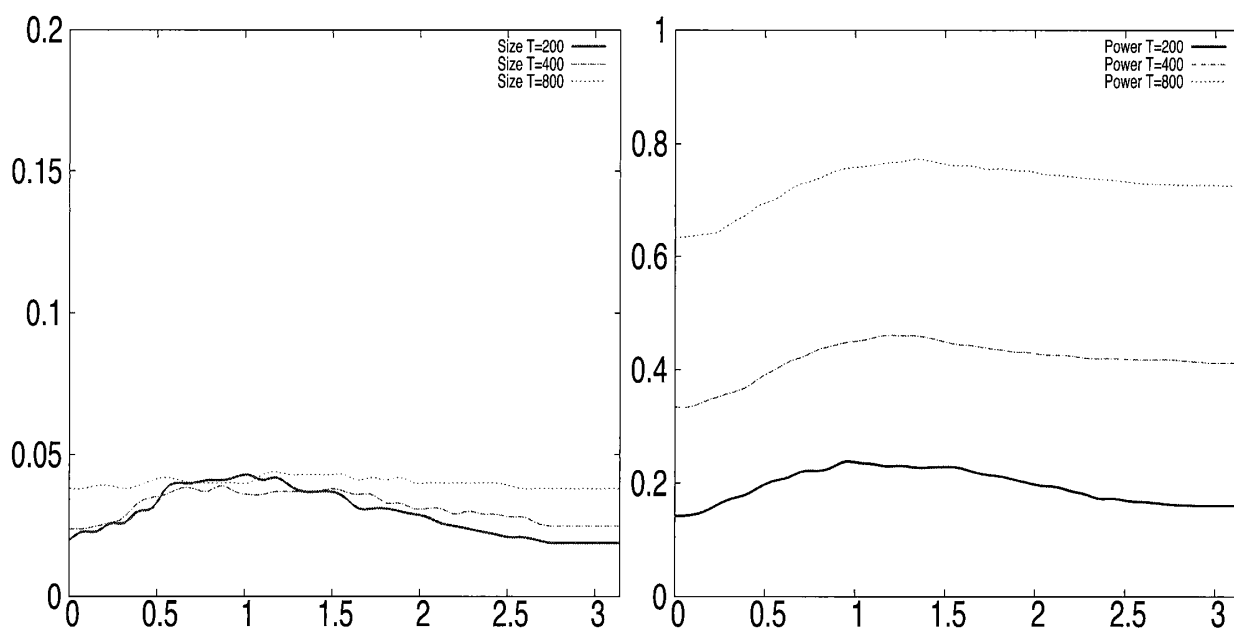


図3 検定統計量の実質サイズと検出力.

カルロ実験は以下の設定の下で行った.

$$\begin{aligned} X(t) &= \rho_1 Y(t-1) + u_1(t), \\ Y(t) &= \rho_2 Y(t-1) + u_2(t). \end{aligned} \quad (4.1)$$

ただし, $[u_1(t) \ u_2(t)]' \sim N(0, I)$ である. 標本サイズは $T = \{200, 400, 800\}$, $T_1 = T/2$ であり, 試行回数は 1000 回である. また, 検定の名目サイズは 5% とする.

表 1 実験における因果性測度の推定値の平均二乗誤差の平方根.

	周波数	$1/8\pi$	$2/8\pi$	$3/8\pi$	$4/8\pi$	$5/8\pi$	$6/8\pi$	$7/8\pi$	π
変化前	T								
	200	0.106	0.081	0.063	0.052	0.044	0.040	0.038	0.037
	400	0.075	0.059	0.046	0.038	0.032	0.029	0.027	0.026
	800	0.051	0.040	0.032	0.026	0.022	0.020	0.018	0.018
変化後	200	0.172	0.126	0.099	0.083	0.075	0.069	0.067	0.066
	400	0.109	0.083	0.066	0.056	0.050	0.046	0.044	0.044
	800	0.081	0.062	0.049	0.042	0.037	0.033	0.032	0.031

検定統計量のサイズに関する実験は、 $\rho_1 = 0.3$ として行った。また、検出力に関しては

$$\rho_1 = \begin{cases} 0.3 & \text{if } t \leq T_1 \\ 0.5 & \text{if } t > T_1 \end{cases}$$

として分析した。以下、複数の ρ_2 の値を試すことで、モデルのパラメータと因果性測度との関係を確認しながら、検定統計量の性質を検討する。

図 1 は、構造変化がある場合において、 $\rho_2 = 0.3$ とした場合の $Y(t)$ から $X(t)$ への真の因果性測度を表している。 $X(t)$ は低周波部分でスペクトル密度が大きい $Y(t)$ と全ての周波数でスペクトル密度が一定であるホワイトノイズ $u_1(t)$ で構成される。 $X(t)$ の $Y(t)$ による予測可能な成分における低周波部分の割合が大きい為、低周波部分における $Y(t)$ から $X(t)$ への因果性測度が他の周波数と比べて大きくなっている。表 1 は実験を行って計算された $t \leq T_1, t > T_1$ それぞれにおける因果性測度の推定値の平均二乗誤差の平方根を表している。平均二乗誤差は周波数に対して単調に減少しているが、これは真の因果性測度の減少と比例している。ここでは明示していないが、相対平均二乗誤差は周波数に対してほぼ一定となることを確認している。また、有限標本において因果性測度の推定量は多少の上方バイアスはあるが不偏推定量に近いものとなっていた。図 2 は構造変化前と変化後の真の因果性測度の差、すなわち

$$M_{Y \rightarrow X}(\lambda; \theta_1) - M_{Y \rightarrow X}(\lambda; \theta_2)$$

と、実験における推定値の算術平均を表している。図 3 は、検定統計量のサイズと検出力を周波数に対してプロットしたものである。本研究における実験の結果では、実質サイズは名目サイズの 5% を下回った。検出力については、周波数 1 から 1.5 の間で大きくなっており、最も因果性測度の差が大きい周波数ゼロ付近の検出力を上回った。これは、周波数ゼロ付近における因果性測度の推定量の分散が過大に推定されている可能性を示唆している。

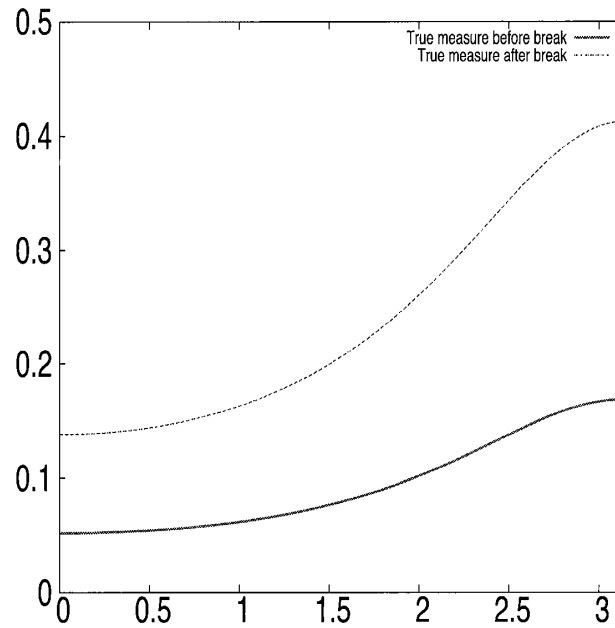


図4 真の因果性測度.

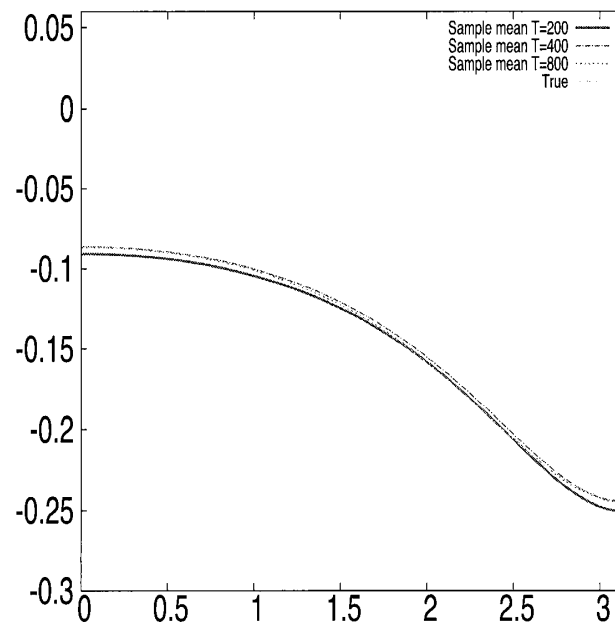


図5 真の因果性測度の差と実験における推定値の算術平均.

次に, (4.1) において, $\rho_2 = -0.3$ とした場合の結果を述べる. 図4は, $Y(t)$ から $X(t)$ への真の因果性測度を表しており, 図5は因果性測度の差を表し, 表2はその平均二乗誤差の平方根を表している. 図6は, 検定統計量のサイズと検出力を表したものである. この例では, $Y(t)$ は高周波部分でスペクトル密度が大きい為, 因果性測度も同様に高周波部分で大きくなっている. $\rho_2 = 0.3$ の場合と同様に実質サイズには下方バイアスが生じている. 検出力については, 周波数 π 付近の高周波部分で最も因果測度の差が大きいにも関わ

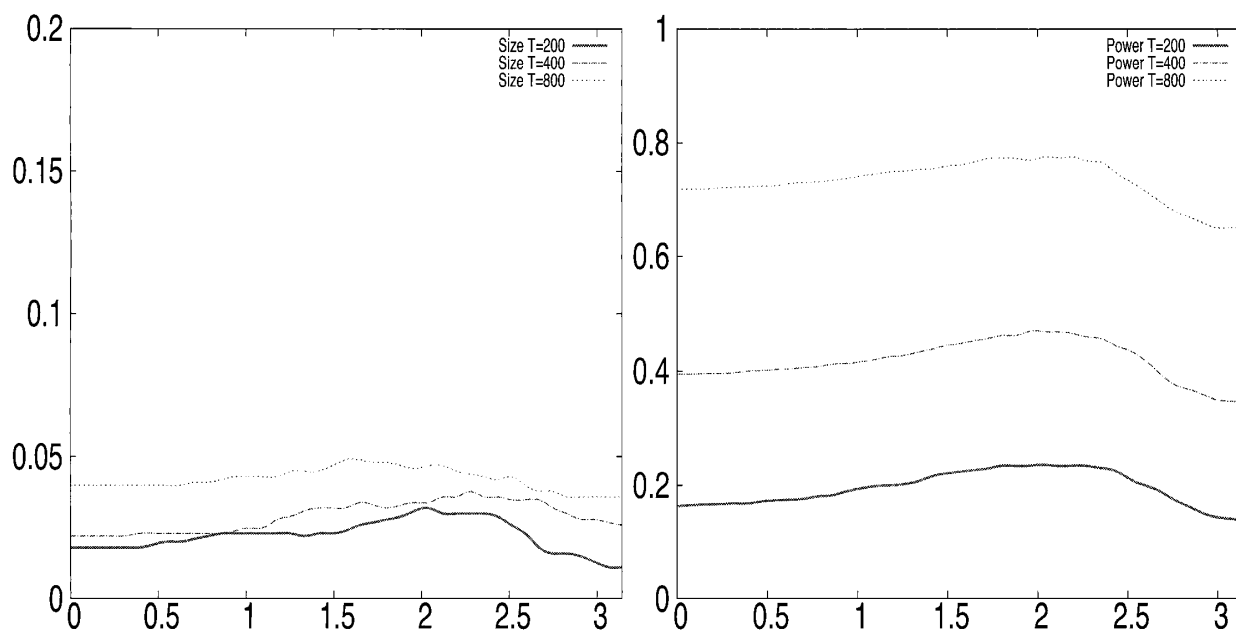


図6 検定統計量の実質サイズと検出力.

表2 実験における因果性測度の推定値の平均二乗誤差の平方根.

	周波数	$1/8\pi$	$2/8\pi$	$3/8\pi$	$4/8\pi$	$5/8\pi$	$6/8\pi$	$7/8\pi$	π
	T								
変化前	200	0.037	0.039	0.044	0.050	0.061	0.078	0.101	0.116
	400	0.027	0.029	0.032	0.037	0.045	0.057	0.072	0.081
	800	0.018	0.019	0.021	0.025	0.031	0.040	0.051	0.058
変化後	200	0.068	0.070	0.075	0.083	0.096	0.120	0.157	0.183
	400	0.043	0.045	0.049	0.055	0.065	0.083	0.111	0.128
	800	0.032	0.033	0.037	0.041	0.049	0.062	0.079	0.090

らず、周波数 2 から 2.5 の間で検出力が最も大きかった。

最後に、誤差修正モデルにおける検定統計量の有限標本特性について述べる。実験は以下の設定の下で行った。

$$\Delta X(t) = (a - 1)(X(t - 1) - bY(t - 1)) + \epsilon_1(t),$$

$$\Delta Y(t) = \epsilon_2(t).$$

ただし、

$$\epsilon(t) \sim N \left(0, \begin{bmatrix} b^2 + 2v\sigma + \sigma^2 & b + v\sigma \\ b + v\sigma & \sigma^2 \end{bmatrix} \right),$$

$(a, v, \sigma) = (0.5, -0.5, 0.5)$ である。構造変化がない場合 $b = 2.5$ とし、構造変化がある場

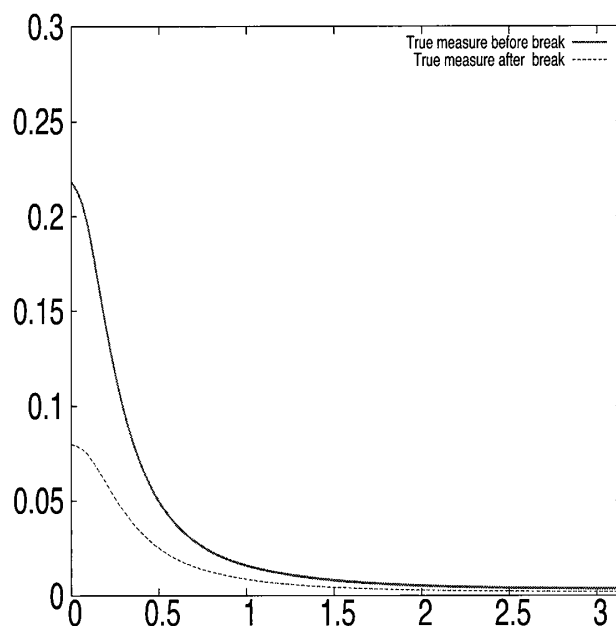


図 7 真の因果性測度.

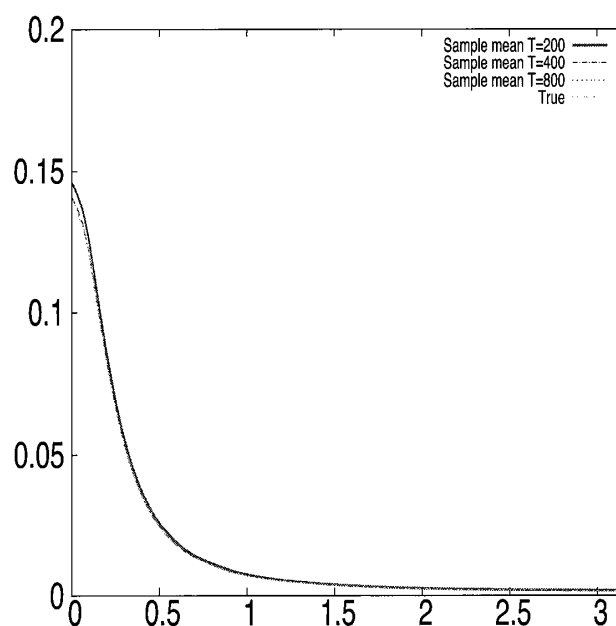


図 8 真の因果性測度の差と実験における推定値の算術平均.

合は

$$b = \begin{cases} 2.5 & \text{if } t \leq T_1 \\ 5 & \text{if } t > T_1 \end{cases}$$

とした. これは, Quintos (1997) と同様の設定である. 図 7 は, $Y(t)$ から $X(t)$ への真の因果性測度を表し, 図 8 は因果性測度の構造変化前と変化後の差を表し, 表 3 はその平均二乗誤差の平方根を表している. 定常 VAR モデルの場合と同様に, 因果性測度の推定量

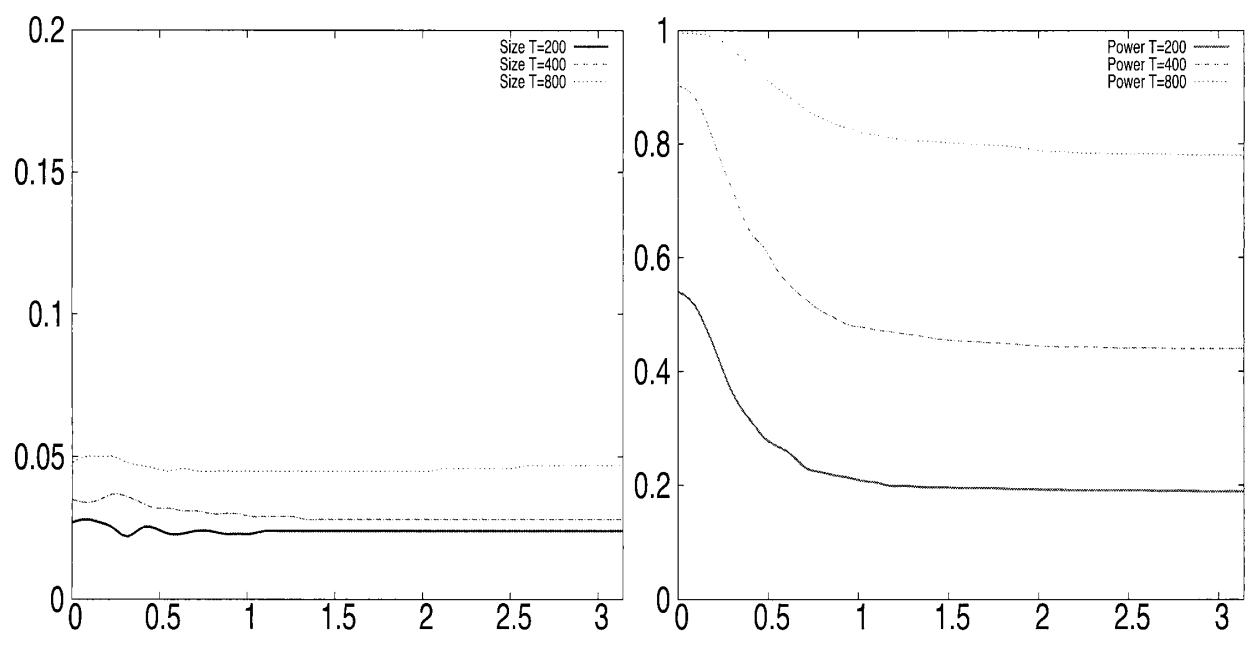


図 9 検定統計量の実質サイズと検出力.

表 3 実験における因果性測度の推定値の平均二乗誤差の平方根.

周波数		$1/8\pi$	$2/8\pi$	$3/8\pi$	$4/8\pi$	$5/8\pi$	$6/8\pi$	$7/8\pi$	π
T									
変化前	200	0.022	0.008	0.004	0.002	0.002	0.001	0.001	0.001
	400	0.015	0.005	0.003	0.002	0.001	0.001	0.001	0.001
	800	0.011	0.004	0.002	0.001	0.001	0.001	0.001	0.001
変化後	200	0.010	0.004	0.002	0.001	0.001	0.001	0.001	0.001
	400	0.007	0.003	0.001	0.001	0.001	0.001	0.000	0.000
	800	0.005	0.002	0.001	0.001	0.000	0.000	0.000	0.000

は非定常時系列である誤差修正モデルにおいても、十分に不偏推定量に近いものとなっていた。図 8 から共和分に関する構造変化は、低周波領域において大きく表れることが確認できる。実質サイズに $T = 200, 400$ の場合に下方バイアスが生じていたが、 $T = 800$ の場合には名目サイズである 5% に十分に近い値となった。また、因果性測度の差の大きさに比例して、低周波になるほど検出力が大きいことが確認された。

5. 実証例

本節では、実証分析の例を紹介する。実証例で用いたデータは、東証株価指数 (TOPIX) とスタンダード&プアーズ 500 種指数 (S&P 500) の日次データであり、共に対数値を用いた。本研究で用いるデータは、全て日経 NEEDS-Financial Quest から取得したものであ

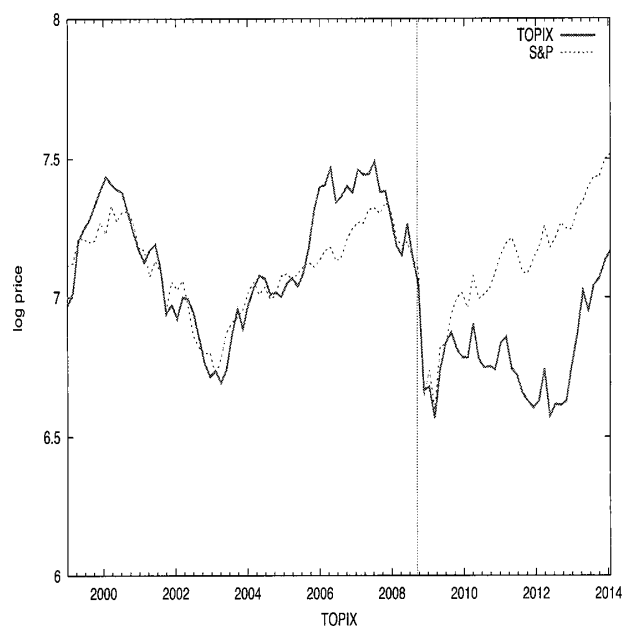


図 10 TOPIX 及び S&P 500 の時系列推移.

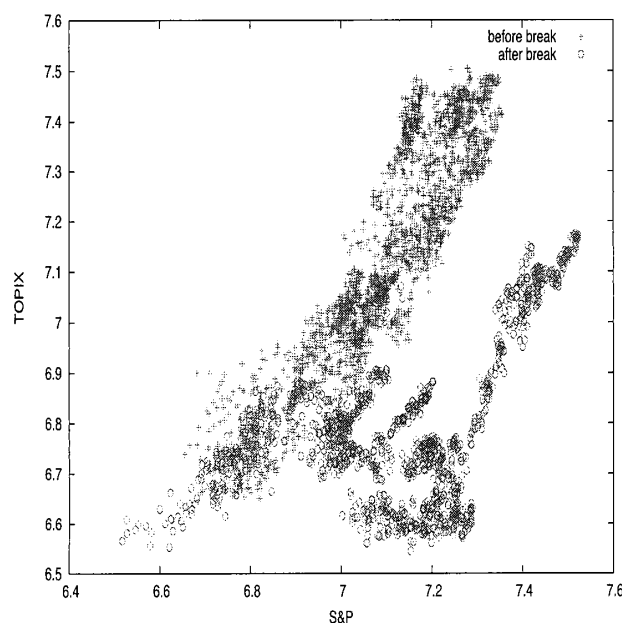


図 11 TOPIX と S&P 500 の散布図.

る。データ期間は1999年1月4日から2012年12月30日であり、構造変化点は、リーマンショックの2008年9月15日とする。図10はTOPIX及びS&P 500の推移を表しており、図11はリーマンショック以前と以後の両者の散布図を重ね合わせたものである。リーマンショック以前ではTOPIXとS&P 500は連動して動いており、相関関係が存在することが推測される。しかしながら、リーマンショックの後では連動性は小さくなっており、構造変化の可能性が示唆される。本研究では、誤差修正モデルを用いてTOPIXとS&P 500の

表4 誤差修正モデルのパラメータの推定値.

1999/1/4~2008/9/15		$\Delta X(t)$: TOPIX, $\Delta Y(t)$: S&P500					
α	β						
-0.00066	10.31365						
0.00049	-15.09482						
Ψ							
	$\Delta X(t-1)$	$\Delta Y(t-1)$	$\Delta X(t-2)$	$\Delta Y(t-2)$	定数項		
$\Delta X(t)$	-0.02652	0.44295	-0.01080	0.06177	-0.02215		
$\Delta Y(t)$	-0.02570	-0.04164	0.00348	-0.01854	0.01643		
Ω							
$\Delta X(t)$	0.00013	0.00002					
$\Delta Y(t)$	0.00002	0.00012					
2008/9/16~2012/12/30							
α	β						
0.00000	0.00000						
0.00000	0.00000						
Ψ							
	$\Delta X(t-1)$	$\Delta Y(t-1)$	$\Delta X(t-2)$	$\Delta Y(t-2)$	$\Delta X(t-3)$	$\Delta Y(t-3)$	定数項
$\Delta X(t)$	-0.14215	0.57783	-0.06924	0.16606	-0.02937	0.07401	-0.00017
$\Delta Y(t)$	0.00114	-0.11479	-0.07252	-0.05336	0.01295	0.05420	0.00035
Ω							
$\Delta X(t)$	0.00017	0.00004					
$\Delta Y(t)$	0.00004	0.00023					

連動性を捉え、モデルの構造変化がもたらす因果性の変化に対する検証を行う。本研究では、誤差修正モデルのモデルの同定を以下の手順で行った。まず、Bruneau and Jondeau (1999) の方法を用いて、HQ (Hannan and Quinn (1979)) 情報量基準を用いてラグ数の選択を行った後に、トレース検定統計量 (Johansen (1995)) を用いて、共和分のランクを決定した。その結果、構造変化前では、共和分ランク 1、ラグ数 3 が選択され、構造変化後では共和分関係は検出されず、ラグ数は 4 が選択された。表 4 は誤差修正モデルの推定結果を表している。モデルの推定結果に基づき、S&P 500 から TOPIX への因果性測度の推定を行った結果が図 12 である。図には因果性測度の推定値とその漸近分散からもとめた 95%信頼区間を描いている。また、ここでは記載していないが TOPIX から S&P 500 への因果性は全ての周波数において有意には検出されなかった。また図 13 は、リーマンショック以前と以降それぞれにおける因果性測度が 0 であることに対する Wald 検定統計量を表している。図中の水平線は 5%有意水準 3.84 を表している。リーマンショック以前と以降のどちらにおいても、ほとんど全ての周波数で因果性は有意に検出されており、特に低周波の部分で因果性が強いことが分かる。構造変化前における検定では、周波数がゼロに近

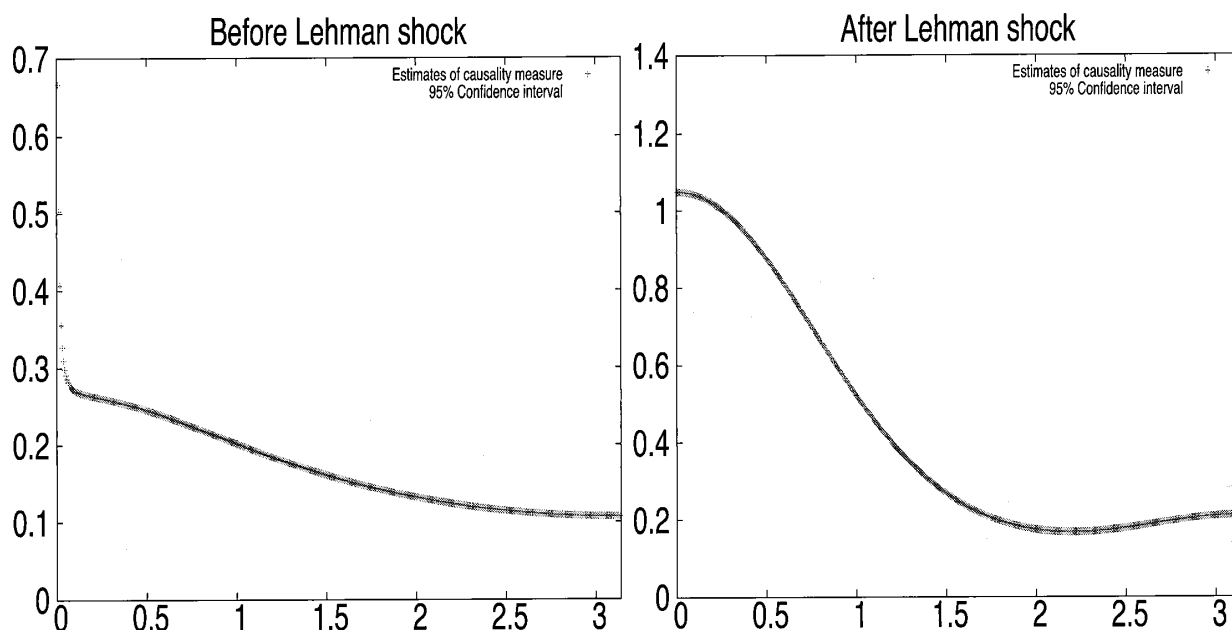


図 12 因果性測度の推定値.

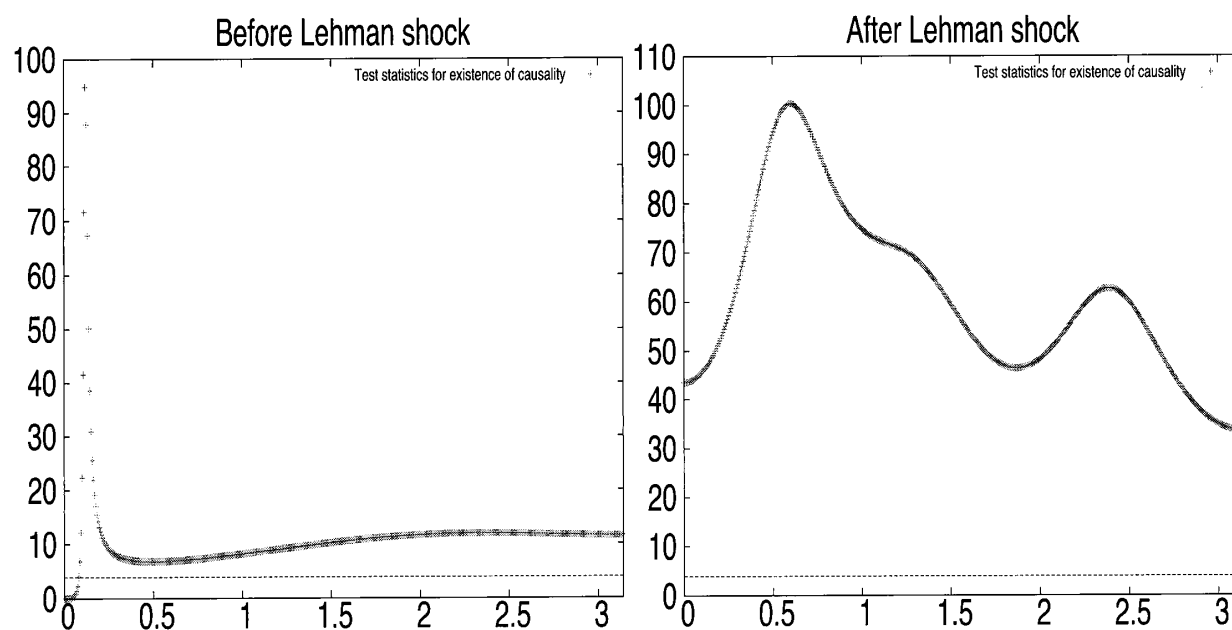


図 13 因果性測度がゼロであることに対する Wald 検定統計量.

くなるにつれて検定統計量が極端に小さくなっている。このことは周波数がゼロに近いところではパラメータの非線形関数である因果性測度の推定量の分散が、正確に計算できていない可能性を示唆している。前節で述べた単純な誤差修正モデルにおける実験では、検定は良好な振る舞いを見せていたが、AR 項を含む複雑な誤差修正モデルを用いる場合には低周波部分における検定を行う際には注意が必要だと考えられる。なお、同様の理由から図 12 において周波数ゼロ付近における信頼区間は記載していない。また、図 14 はリー

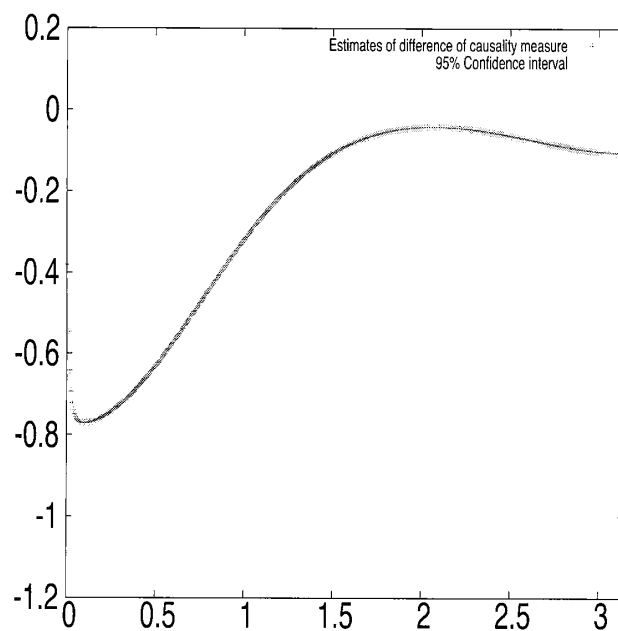


図 14 因果性測度の差の推定値.

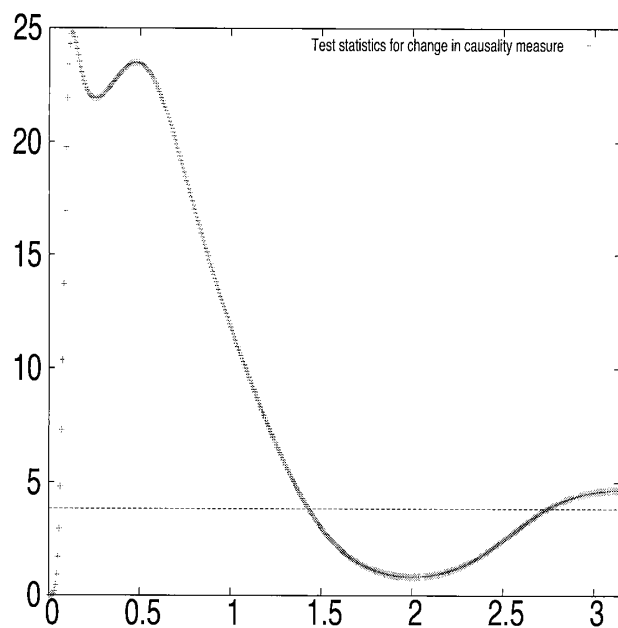


図 15 因果性測度の変化に対する Wald 検定統計量.

マンショック以前と以降での因果性測度の差の推定値であり、図 15 は因果性測度に変化があったことに対する Wald 検定統計量を表している。図 14 における因果性測度の変化を見ると、例えば周波数 0.1 から 0.5 の間、周期 12 営業日から 62 営業日程度の波において因果性の変化が負の値として大きく検出されている。これは、日本市場で活動する投資家がリーマンショック以降、2 週間から 12 週間程度の間隔で米国市場の動向をそれまで以上に意識して意思決定を行っている可能性を示唆している。

6. 結語

本稿では、Hosoya (1991) で導入された周波数領域における因果性測度に基づいて、モデルの構造変化がもたらす因果性の変化を検出するための Wald 検定統計量を導出した。また Yao and Hosoya (2000) における議論を踏襲することで、誤差修正モデルにおける因果性の変化に関する検証を行うことが可能であることが示された。

また、導出された検定統計量の有限標本特性のモンテカルロ実験による検証を行った。その結果、定常 VAR モデルと誤差修正モデルにおいて、標本サイズが小さい場合に検定のサイズに下方バイアスが生じる事が確認された。また、応用例として日米の株価指数である TOPIX と S&P 500 を用いた実証分析を行い、リーマンショックの前後を比較して、S&P 500 から TOPIX への因果性が強くなっていることが統計的に有意に確認された。

本稿で導出した検定統計量は、構造変化点を所与としているが、複数の特定の期間における因果性の程度の違いを検証目的とするような実際の分析においても、ここで示された検証方法が適用可能である。一方で、構造変化点が未知の場合には、モデルの構造変化点の検出と同時に因果性測度に有意な変化が生じているかどうかを検定することが必要になるが、その点に関しては、今後の課題としたい。

謝辞

本稿を作成するに当たり、一橋大学黒住英司先生をはじめとして、2013 年度関西計量経済学研究会の参加者及び匿名のレフリーから有益なコメントをいただいた。ここに記して感謝の意を表したい。なお本研究は、科学研究費補助金（課題番号 25245034、代表：大屋幸輔）の助成を受けたものである。

参 考 文 献

- Akaike, H. (1968). On the use of a linear model for the identification of feedback systems, *Ann. Inst. Stat. Math.*, **20**, 425–439.
- Breitung, J. and Candelon, B. (2006). Testing for short- and long-run causality: A frequency-domain approach, *J. Econom.*, **132**, 363–378.
- Bruneau, C. and Jondeau, E. (1999). Long-run causality, with an application to international links between long-term interest rates, *Oxf. Bull. Econ. Stat.*, **61**, 545–568.
- Doornik, J. A. (2007). *Object-Oriented Matrix Programming Using Ox*, 3rd ed., London, Timberlake Consultants Press.
- Geweke, J. (1982). Measurement of linear dependence and feedback between multiple time series, *J. Am. Stat. Soc.*, **77**, 304–314.
- Granger, C. W. J. (1963). Economic processes involving feedback, *Information and Control*, **6**, 28–48.
- Granger, C. W. J. (1969). Investigating causal relations by econometric models and cross-spectral methods, *Econometrica*, **37**, 424–438.
- Granger, C. W. J. and Lin, J. L. (1995). Causality in the long run, *Econ. Theory*, **11**, 530–536.
- Hannan, E. J. and Quinn, B. G. (1979). The determination of the order of an autoregression, *J. R. Stat. Soc. Ser. B*, **41**, 190–195.

- Hosoya, Y. (1991). The decomposition and measurement of the interdependency between second-order stationary processes, *Probab. Theory Relat. Felds*, **88**, 429–444.
- Hosoya, Y. (2001). Elimination of third-series effect and defining partial measures of causality, *J. Time Ser. Anal.*, **22**, 537–554.
- 細谷雄三 (2009). 「スペクトル正準分解と因果諸測度の構成」『日本統計学会誌』**38**(2), 251–279.
- Johansen, S. (1991). Estimation and hypothesis testing of cointegrating vectors in Gaussian vector autoregressive models, *Econometrica*, **59**, 1551–1580.
- Johansen, S. (1995). *Likelihood Based Inference in Cointegrated Auto-Regressive Models*, Oxford University Press, Oxford.
- 国友直人, 山本 拓 (1986a). 「多変量時系列における因果序列と仮説検定及びマクロ計量分析への応用 (1)」東京大学経済学部『経済学論集』**51**(4), 15–27.
- 国友直人, 山本 拓 (1986b). 「多変量時系列における因果序列と仮説検定及びマクロ計量分析への応用 (2・完)」東京大学経済学部『経済学論集』**52**(1), 30–50.
- Magnus, J. R. and Neudecker, H. (1988). *Matrix Differeitil Calculus with Applications in Statistics and Econometrics*, Wiely, New York.
- Quintos, C. E. (1997). Stability tests in error correction models, *J. Econom.*, **82**, 289–315.
- Yao, F. and Hosoya, Y. (2000). Inference on one-way effect and evidence in Japanese macroeconomic data, *J. Econom.*, **98**, 225–255.