

## Fully Conservative Higher Order Finite Difference Schemes for Incompressible Flow

○森西 洋平 (名工大)

Youhei MORINISHI

Dept. of Mechanical Engineering, Nagoya Institute of Technology, Japan

This presentation outlines the research of RYUMON-Prize in 1999, "Fully Conservative Higher Order Finite Difference Schemes for Incompressible Flow"<sup>1)</sup>. The purpose of the research was to construct accurate finite difference schemes for incompressible unsteady turbulent flow simulations such as large eddy simulation (LES) or direct numerical simulation (DNS). Conservative properties of the mass, momentum, and kinetic energy equations for incompressible flow were specified as analytical requirements for a proper set of discrete equations. A family of fully conservative fourth order accurate finite difference schemes for staggered grid system is introduced in this presentation, while existing finite difference schemes in regular, staggered and collocated grid systems were checked for violations of the conservative properties in the original paper.

## 1. 緒論

ここでは、1999 年度竜門賞受賞論文 "Fully Conservative Higher Order Finite Difference Schemes for Incompressible Flow"<sup>1)</sup> (以下文献 1)) の解説を行わせて頂きます。

本研究は乱流のラージ・エディ・シミュレーション (LES) のための数値計算手法の開発を目的として始められました。非圧縮性流体の LES の基礎式は質量保存則 (連続の式) および運動量保存則 (ナビエ・ストークス方程式) のそれぞれに空間的なフィルターを課したものであり、次式のように表現されます。

$$\frac{\partial \bar{u}_i}{\partial x_i} = 0 \quad (1)$$

$$\frac{\partial \bar{u}_i}{\partial t} + \frac{\partial \bar{u}_j \bar{u}_i}{\partial x_j} + \frac{\partial \tau_{ji}}{\partial x_j} = -\frac{1}{\rho} \frac{\partial \bar{p}}{\partial x_i} + \nu \frac{\partial^2 \bar{u}_i}{\partial x_j \partial x_j} \quad (2)$$

上式中、 $t$  は時間、 $u_i$  ( $i = 1, 2, 3$ ) は速度の  $x_i$  方向成分、 $p$  は圧力、 $\rho$  は密度、 $\nu$  は動粘度です。 $\rho$  と  $\nu$  は定数として扱います。式中に現れるイタリック ( $i, j$  等) の繰り返し添字については 1, 2, 3 の総和をとるものとします (総和規約)。また、上付き-の付いた量は変数のフィルター化量 (GS 成分と呼ばれる) で、LES では通常式 (1) および式 (2) を解いて  $\bar{u}_i$  および  $\bar{p}$  が求められます。その際、方程式系を閉じさせるためには式 (2) 中の SGS 応力 (この場合は応力/密度の次元を持つ) 、

$$\tau_{ji} = \overline{u_j u_i} - \bar{u}_j \bar{u}_i \quad (3)$$

に対するモデルを与える必要が生じます。ここで、テイラー展開の結果から  $\tau_{ji}$  はフィルター幅の 2 乗のオーダーを持つことが示されます<sup>2),3)</sup>。また、式 (2) 中の対流項  $\partial \bar{u}_j \bar{u}_i / \partial x_j$  を 2 次精度中心差分法により近似すると、その打ち切り誤差の初項は差分格子幅の 2 乗のオーダーで

かつその関数形は SGS 応力をテイラー展開したものに類似することが示されます<sup>3)</sup>。

$$\underbrace{\frac{\delta \bar{u}_j \bar{u}_i}{\delta x_j}}_{\text{対流項差分}} - \frac{\partial \tau_{ji}}{\partial x_j} \Rightarrow \frac{\partial \bar{u}_j \bar{u}_i}{\partial x_j} + \underbrace{O(h^2)}_{\text{打ち切り誤差}} - \underbrace{\frac{\partial \tau_{ji}}{\partial x_j}}_{O(\Delta^2)} \quad (4)$$

LES においてフィルター幅  $\bar{\Delta}_i$  が通常差分格子幅  $h_i$  と同程度に設定されること ( $\bar{\Delta} \sim h$ ) を考えると、対流項に 2 次精度中心差分を用いたのでは SGS 応力の効果が差分の打ち切り誤差に埋もれてしまうことが解ります。

この問題点を解決するためには差分の近似精度を向上すれば良いことがすぐに理解されます。しかし単に精度の向上を図るのみでは十分な結果は得られません。従来の 4 次精度中心差分法<sup>4)</sup>を用いた平板チャネル乱流の数値計算では、高レイノルズ数において不安定で非物理的な計算結果<sup>5)</sup>が与えられてしまいます。これまでその重要性は唱えられていながら LES に対する対流項差分法の高次精度化が進まなかったのはこのような不安定性の存在によるものと考えられます。解の安定性を確保するのみであれば高次精度の風上差分を導入することも考えられますが、対流項の高次精度風上差分法は一般的にエネルギー・カスケードに関して散逸的な誤差を与えるので、特に格子解像度が低い場合 (DNS が実行できるほどの格子解像度が確保できない場合に LES が使用される) には LES の計算結果に大きな影響を与えてしまいます。また、乱流の数値計算手法としての LES に対する共通認識は、SGS 応力に対しては物理的な考察に基づくモデルを与え、格子で捉えられる部分つまり GS 成分については基礎方程式をできるだけ忠実に解く、ということにあると考えられます。この場合に GS 成分から SGS 成分 (格子スケール以下の成分) へのエネルギー・カスケード (あるいは逆カスケード) は SGS モデルのみによって表現されるのが理想的です。そこで、LES に対してはエネルギー・カス

ケードに関して誤差が中立で高精度かつ数値的に安定な対流項の離散化手法の使用が望まれます。エネルギー・カスケードに関して誤差が中立という条件は、非圧縮性流体の基礎方程式は非粘性の条件下で運動エネルギーが保存されることに対応します。さらに、式 (2) 中の対流項の離散化を考えているので運動量の保存性も満足されることが望まれます。

以上をまとめると、LES の数値計算において対流項の離散式に望まれる条件は以下となります。

- 1) 運動量が保存される
- 2) 非粘性の極限で運動エネルギーが保存される
- 3) 高精度である

タイトルにある完全保存とは、上記の 1) および 2) を同時に満足することを意味します (しばしば自乗量保存あるいはエネルギー保存とも表現されます)。2 次精度中心差分による数値計算では、結果の信頼性は十分ではありませんが、適切に離散化が行われていれば比較的高いレイノルズ数でも安定な解が得られることが知られております。これは、スタガード格子における従来の 2 次精度差分法が上記 1) および 2) を満足していることによります。特に上記 2) が満足されていれば非線形不安定性は除去されます。では、完全保存形の高次精度対流項差分スキームは存在するのでしょうか？

文献 1) では、非圧縮性流体の運動の支配方程式を持つ解析的な保存特性が整理された後、代表的な差分格子 (レギュラー、スタガードおよびコロケート格子) における従来の差分スキームの吟味およびその問題点が指摘された後、完全保存形の高次精度対流項差分スキームが示されております。特に、非圧縮性流体の解析において有用なスタガード格子に対し、初めて 4 次精度以上の完全保存形差分スキームが示されました。

## 2. 対流項が持つ解析的な保存特性

これまでの話は LES の数値計算に対するものでしたが、ここでの議論は LES の基礎方程式 ((1),(2)) のみならずフィルター化前の質量および運動量の保存則に対してもそのまま成立するので、以下ではフィルター化を表現する上付きを取った変数に対して議論を進めます (つまり本研究の成果は LES のみならず DNS に対しても有効です)。また、文献 1) では運動方程式中の全ての項についてその保存特性が考察されておりますが、ここでは乱流の数値計算を実行する上で特に重要な運動方程式中の対流項の保存特性のみについて簡単に紹介させていただきます。まず対流項の型としては、

$$\text{発散型の対流項} \quad \frac{\partial u_j u_i}{\partial x_j}, \quad (5)$$

$$\text{勾配型の対流項} \quad u_j \frac{\partial u_i}{\partial x_j}, \quad (6)$$

$$\text{混合型の対流項} \quad \frac{1}{2} \left( \frac{\partial u_j u_i}{\partial x_j} + u_j \frac{\partial u_i}{\partial x_j} \right), \quad (7)$$

を用いることが出来ます。勾配型の対流項 (式 (6)) は

$$u_j \frac{\partial u_i}{\partial x_j} = \frac{\partial u_j u_i}{\partial x_j} - u_i \frac{\partial u_j}{\partial x_j} \quad (8)$$

と変形できるので、質量保存則、

$$\frac{\partial u_j}{\partial x_j} = 0, \quad (9)$$

が満足される場合に式 (5) の発散型と式 (6) の勾配型には互換性が成立します。混合型は発散型と勾配型の平均なので次のようにも変形できます。

$$\begin{aligned} \frac{1}{2} \left( \frac{\partial u_j u_i}{\partial x_j} + u_j \frac{\partial u_i}{\partial x_j} \right) &= \frac{\partial u_j u_i}{\partial x_j} - \frac{1}{2} u_i \frac{\partial u_j}{\partial x_j} \\ &= u_j \frac{\partial u_i}{\partial x_j} + \frac{1}{2} u_i \frac{\partial u_j}{\partial x_j} \end{aligned} \quad (10)$$

ここで  $\partial()/\partial x_j$  で整理される項を保存形と呼びます。物理的な保存量の輸送方程式においては時間項以外の項は全て保存形で表現されます。式 (5) の発散型の対流項は先天的に保存形であり、式 (6) の勾配型および式 (7) の混合型の対流項は式 (9) の質量保存則が満足される場合に保存形となります。

次に、式 (5)~(7) の対流項の各型 (発散型、勾配型、混合型) が自乗量の輸送方程式中でどのように表現されるかを調べるため、これらの  $i = \alpha$  成分に  $u_\alpha$  を乗じてみます (ギリシャ文字の添え字  $\alpha$  は総和規約に従わないことに注意)。

$$u_\alpha \left[ \frac{\partial u_j u_\alpha}{\partial x_j} \right] = \frac{\partial u_j \frac{1}{2} u_\alpha^2}{\partial x_j} + \frac{1}{2} u_\alpha^2 \frac{\partial u_j}{\partial x_j} \quad (11)$$

$$u_\alpha \left[ u_j \frac{\partial u_\alpha}{\partial x_j} \right] = \frac{\partial u_j \frac{1}{2} u_\alpha^2}{\partial x_j} - \frac{1}{2} u_\alpha^2 \frac{\partial u_j}{\partial x_j} \quad (12)$$

$$u_\alpha \left[ \frac{1}{2} \left( \frac{\partial u_j u_\alpha}{\partial x_j} + u_j \frac{\partial u_\alpha}{\partial x_j} \right) \right] = \frac{\partial u_j \frac{1}{2} u_\alpha^2}{\partial x_j} \quad (13)$$

これらより式 (7) の混合型の対流項は先天的に自乗量に関して保存形、式 (5) の発散型および式 (6) の勾配型の対流項は式 (9) の質量保存則が満足される場合に自乗量に関して保存形となります。対流項の各型に対する運動量  $u_i$  およびその自乗量  $\frac{1}{2} u_\alpha^2$  の保存特性をまとめると表 1 のようになります。表中の  $\odot$  は先天的に保存形を与えること、 $\circ$  は式 (9) の質量保存則が満足される場合に保存形を与えることを意味します。

以上の関係は 2 つの変数  $a, b$  の積の微分に関する解析的な恒等式、

$$\frac{\partial(a \times b)}{\partial x_j} = a \frac{\partial b}{\partial x_j} + b \frac{\partial a}{\partial x_j} \quad (14)$$

が成立することを前提として議論が進められています。また、非圧縮性流体の解析において運動エネルギーの輸送

**Table 1.** Conservative Properties in  $u_i$  and  $u_\alpha^2/2$  eqs.

| Type   | $u_i$ | $\frac{1}{2}u_\alpha^2$ |
|--------|-------|-------------------------|
| Eq.(5) | ⊙     | ○                       |
| Eq.(6) | ○     | ○                       |
| Eq.(7) | ○     | ⊙                       |

方程式が解かれないのは、それが運動量および質量保存則の従属的な方程式であることによります。しかし、式(14)に対する離散式、

$$\frac{\delta(a \times b)}{\delta x_j} = a \frac{\delta b}{\delta x_j} + b \frac{\delta a}{\delta x_j} \quad (15)$$

は一般的には成立しないため対流項の各型に対する離散式は一般に異なったものとなります。このため質量および運動量の保存則を適切に離散化して解けばこれらの量を保存する解は得られますが、運動エネルギーに関する保存特性までは満足されません。これは運動エネルギーの輸送方程式に由来する速度変動に対する拘束条件が作用しなくなることを意味し、数値解が不安定となる原因を作ります。完全保存形の対流項差分スキームとは、ここで示した解析的な性質が離散的に再現される特別な差分スキームです。

### 3. スタガード格子での完全保存形対流項差分スキーム

非圧縮性流体の数値計算では速度と圧力との適切なカップリングのためにスタガード格子が用いられます。スタガード格子では圧力の定義点から各方向に半格子ずれた位置に各方向の速度成分が配置されます。スタガード格子での空間2次精度差分に対する完全保存形対流項差分スキームは、発散型については Harlow & Welch<sup>6)</sup> によって、混合型については Piacsek & Williams<sup>7)</sup> によって、さらに勾配型については梶島<sup>8)</sup> によって提案されております。これらは式(9)の質量保存則が圧力の定義点上で通常の2次精度差分により離散化される場合にそれぞれ互換となり、運動量および速度自乗量（つまり運動エネルギー）が同時に離散的に保存されます。

LES に対しては4次精度以上の対流項差分スキームの使用が望ましいことは既に述べたとおりですが、スタガード格子における空間4次精度の完全保存形対流項差分スキームが本研究によって初めて示されました。これらを記述するため、まず差分および補間オペレータを次のように定義します。

$$\left. \frac{\delta_n \phi}{\delta_n x_1} \right|_{(x_1, x_2, x_3)} \equiv \frac{1}{n h_1} \phi(x_1 + \frac{n}{2} h_1, x_2, x_3) - \frac{1}{n h_1} \phi(x_1 - \frac{n}{2} h_1, x_2, x_3) \quad (16)$$

$$\left. \overline{\phi}^{n x_1} \right|_{(x_1, x_2, x_3)} \equiv \frac{1}{2} \phi(x_1 + \frac{n}{2} h_1, x_2, x_3) + \frac{1}{2} \phi(x_1 - \frac{n}{2} h_1, x_2, x_3) \quad (17)$$

$x_2, x_3$  方向の差分および補間オペレータも同様に定義されるものとします。ここで差分や補間のステンシルを表現する  $n$  については総和規約は適用されないものとします。 $x_j$  方向の差分オペレータは  $\delta_n / \delta_n x_j$  と記述されますが、この場合の  $x_j$  の添え字  $j$  については総和規約が適用されるものとします。しかし  $\overline{\phi}^{n x_j}$  の添え字  $j$  についてはそれ自身では総和はとらず、離散式の同じ項中の成分  $u_j$  や差分オペレータ  $\delta_n / \delta_n x_j$  の添え字  $j$  に従って変化するものとします。離散化は必要な位置で用いられるものとします。空間4次精度差分での、発散型、勾配型、混合型に対応する対流項の離散式はそれぞれ次式のように表現されます。

$$\begin{aligned} (Div. - S4)_i & \equiv \frac{9}{8} \frac{\delta_1}{\delta_1 x_j} \left[ \left( \frac{9}{8} \overline{u_j}^{1 x_i} - \frac{1}{8} \overline{u_j}^{3 x_i} \right) \overline{u_i}^{1 x_j} \right] \\ & - \frac{1}{8} \frac{\delta_3}{\delta_3 x_j} \left[ \left( \frac{9}{8} \overline{u_j}^{1 x_i} - \frac{1}{8} \overline{u_j}^{3 x_i} \right) \overline{u_i}^{3 x_j} \right] \end{aligned} \quad (18)$$

$$\begin{aligned} (Adv. - S4)_i & \equiv \frac{9}{8} \overline{\left( \frac{9}{8} \overline{u_j}^{1 x_i} - \frac{1}{8} \overline{u_j}^{3 x_i} \right) \frac{\delta_1 u_i}{\delta_1 x_j}}^{1 x_j} \\ & - \frac{1}{8} \overline{\left( \frac{9}{8} \overline{u_j}^{1 x_i} - \frac{1}{8} \overline{u_j}^{3 x_i} \right) \frac{\delta_3 u_i}{\delta_3 x_j}}^{3 x_j} \end{aligned} \quad (19)$$

$$(Skew. - S4)_i \equiv \frac{(Div. - S4)_i + (Adv. - S4)_i}{2} \quad (20)$$

これらは式(9)の質量保存則が圧力の定義点上で次式、

$$(Cont. - S4) \equiv \frac{9}{8} \frac{\delta_1 u_i}{\delta_1 x_i} - \frac{1}{8} \frac{\delta_3 u_i}{\delta_3 x_i} = 0, \quad (21)$$

により離散化される場合に互換となり、運動量および速度自乗量（つまり運動エネルギー）が離散的に同時に保存される完全保存形対流項差分スキームとなります。離散式に対する保存特性の検討の詳細は文献1)をご参照下さい。

文献1)では、さらに高次精度の完全保存形対流項差分スキームも一般的に構成できることが示されております。

### 引用文献

- 1) Morinishi, Y., Lund, T.S., Vasilyev, O.V., & Moin, P., *J. Comput. Phys.*, **143** (1998), 90-124.
- 2) Leonard, A., *Adv. Geophys.*, **18A** (1974), 237-248.
- 3) 森西洋平, LES のフロンティア - 熱・流体解析の最強ツールを求めて -, 計算流体力学講習会教材 (日本数値流体力学会, 日本流体力学会), (2000), 21-46.
- 4) A-Domis, M., *J. Fluid Mech.*, **104** (1981), 55-79.
- 5) 森西洋平, 機論 **62-604, B** (1996) 4090-4112.
- 6) Harlow, F.H., & Welch, J.E., *Phys. Fluids*, **8** (1965) 2182-2189.
- 7) Piacsek, S.A. & Williams, G.P., *J. Comput. Phys.*, **6** (1970), 392-405.
- 8) 梶島岳夫, 機論 **60-574, B** (1994) 2058-2063.