

平行平板間の混合気体中の熱伝達： ボルツマン方程式の差分解析

Heat Transfer in a Gas Mixture between Two Parallel Plates: Finite-difference Analysis of the Boltzmann Equation

○ 小菅真吾, 青木一生, 高田滋 (京大・工・航空宇宙)

Shingo Kosuge, Kazuo Aoki, and Shigeru Takata

Dept. of Aeronautics and Astronautics, Graduate School of Eng., Kyoto Univ., Kyoto 606-8501, Japan

The problem of heat transfer and temperature distribution in a binary mixture of rarefied gases between two parallel plates with different temperatures is investigated on the basis of kinetic theory. Under the assumption that the gas molecules are hard spheres and undergo diffuse reflection on the plates, the Boltzmann equation is analyzed numerically by means of an accurate finite-difference method, in which the complicated nonlinear collision integrals are computed efficiently by the deterministic numerical kernel method. As a result, the overall quantities (the heat flow in the mixture, etc.) as well as the profiles of the macroscopic quantities (the molecular number densities of the individual components, the temperature of the total mixture, etc.) are obtained accurately for a wide range of the Knudsen number. At the same time, the behavior of the velocity distribution function is clarified with a high accuracy.

1. まえおき

平行平板間の希薄気体中の熱伝達問題は、ボルツマン方程式を基礎とする希薄気体力学の基本的問題の一つとして、特に気体が単一成分の場合には多くの研究がなされてきた。しかしボルツマン方程式は分子衝突による効果を表わす複雑な衝突積分項を含む為、直接的数値計算が必要となる中程度の希薄度に対しては、様々な近似的手法やモデル方程式による解析が殆どであった。その一方で曾根ら¹⁾は線形化ボルツマン方程式の衝突積分項を精密かつ効率的に求める数値積分核法を開発し、大和田ら²⁾はそれを用いて平板の温度差が小さい場合の解を精密な差分計算により初めて求めた。大和田はその後この手法を非線形ボルツマン方程式へ拡張し、衝撃波の内部構造³⁾や温度差の大きい熱伝達問題⁴⁾の解析を行っている。

気体が二成分混合気体の場合についても幾つかの結果が報告されているものの⁵⁾、成果の蓄積はまだ十分ではない。筆者らは最近、上述の数値積分核法を多成分混合気体の場合に拡張して二成分気体における衝撃波の内部構造を調べたが⁶⁾、本研究では同じ方法を用いて平行平板間の二成分混合気体における熱伝達問題をボルツマン方程式に基づき差分法を用いて解析する。

2. 問題

平行に置かれた二枚の平板間を A 気体および B 気体から成る二成分混合希薄気体が満たしている。一方の平板の位置を $X_1 = 0$ (X_i : 空間直交座標), 温度を T_l , 他方の位置を $X_1 = D$, 温度を T_H とする。このとき平板間の混合気体の定常的な振舞を次の仮定のもとで調べる。

- 気体の振舞は剛体球分子に対するボルツマン方程式により記述される。
- 気体分子は平板上で拡散反射する。

なお以下では、A 気体および B 気体の分子質量をそれぞれ m^A , m^B , 分子直径を d_m^A , d_m^B とし、平板間に含まれる A 気体および B 気体の平均数密度をそれぞれ n_{av}^A , n_{av}^B とする。

方程式と境界条件を適当に無次元化すると、問題は五つのパラメータ (m^B/m^A , d_m^B/d_m^A , T_H/T_l , n_{av}^B/n_{av}^A , Kn) に特徴付けられることが分かる。ここで Kn $= l_o/D$ はクヌーゼン数で、 $l_o = [\sqrt{2}\pi(d_m^A)^2 n_{av}]^{-1}$ は数密度 $n_{av} = n_{av}^A + n_{av}^B$ の静止平衡状態にある A 気体の分子の平均自由行程である。

3. 解析

解析は剛体球分子ボルツマン方程式の、差分法を用いた数値計算による。以下では分子速度を $\xi = (\xi_1, \xi_2, \xi_3)$, α 気体 ($\alpha = A, B$) の分子の速度分布関数を $F^\alpha(X_1, \xi)$ とする。まず解析を容易にする為に問題の対称性を考慮して、独立変数を減

らした $F^\alpha(X_1, \xi_1, \eta)$, [$\eta = (\xi_2^2 + \xi_3^2)^{1/2}$] の形で解を求めることにする。

ボルツマン方程式を差分法で解く際には衝突積分項を正確に求めることが鍵となるが、そこで先述の数値積分核法を用いる。まず速度分布関数を X_1 の各点において (ξ_1, η) 空間の差分格子点上での値を用いた展開形で表し、次にこれを衝突積分に代入することにより、先の展開における展開係数 (差分格子点上での速度分布関数の値から決まる) とその他の部分を衝突積分に代入して得られる数値積分核との行列積に帰着させる。実際には ξ_1 方向には区分的二次関数を用いた基底関数による展開を、 η 方向にはラゲール多項式による展開を行った。なお数値積分核は気体分子の力学的性質のみに依存する普遍定数で、差分計算に先立ち一度だけ作成すればよく、効率的な計算が可能である。

4. 結果

計算は $T_H/T_l = 2$ に固定し、 $(m^B/m^A, d_m^B/d_m^A) = (0.5, 1)$ と $(0.25, 0.5)$ の場合についてそれぞれ $n_{av}^B/n_{av}^A = 0.1, 1, 10$ および Kn $= 0.1, 1, 10$ に対し行った。結果を示すにあたり以下では、 α 気体 ($\alpha = A, B$) の数密度を n^α , 混合気体の温度および X_1 方向の熱流をそれぞれ T , q_1 とする。なおこの問題では質量およびエネルギーの保存則から、気体の流速は零で、熱流は X_1 に依らず一定でなければならない。

まず熱流の値を $(m^B/m^A, d_m^B/d_m^A) = (0.5, 1)$ と $(0.25, 0.5)$ の場合について、それぞれ Table I と II に示す。熱流 q_1 の計算結果は誤差のため一定とはならず、ここではその $0 \leq X_1 \leq D$ にわたる平均値 q_{1av} を示した。また平均値 q_{1av} からの q_1 のずれの最大値 $\Delta = \max |q_1 - q_{1av}|/|q_{1av}|$ を、計算精度の目安として示している。

n_{av}^B/n_{av}^A	Kn	$q_1/\rho_l(2kT_l/m^A)^{1/2}$	Δ (%)
0.1	0.1	-0.184	0.45
0.1	1	-0.509	0.19
0.1	10	-0.656	0.049
1	0.1	-0.209	0.34
1	1	-0.589	0.15
1	10	-0.763	0.047
10	0.1	-0.245	0.34
10	1	-0.677	0.10
10	10	-0.871	0.038

Table I : Heat flow q_1 for $(m^B/m^A, d_m^B/d_m^A) = (0.5, 1)$. The average q_{1av} over $0 \leq X_1 \leq D$ is shown as q_1 in the table. Here, Δ is the maximum variation of q_1 , and $\rho_l = kn_{av}T_l$

n_{av}^B/n_{av}^A	Kn	$q_1/p_I(2kT_I/m^A)^{1/2}$	Δ (%)
0.1	0.1	-0.207	0.72
0.1	1	-0.547	0.19
0.1	10	-0.693	0.047
1	0.1	-0.370	0.67
1	1	-0.814	0.13
1	10	-0.966	0.036
10	0.1	-0.659	0.19
10	1	-1.124	0.075
10	10	-1.244	0.014

Table II : Heat flow q_1 for $(m^B/m^A, d_m^B/d_m^A) = (0.25, 0.5)$. (See the caption of Table I.)

次に各成分気体の数密度および混合気体の温度の分布を Fig.1 と 2 に示す。どちらも $m^B/m^A = 0.25$, $d_m^B/d_m^A = 0.5$ の場合で、Fig.1 は $n_{av}^B/n_{av}^A = 0.1$, Fig.2 は $n_{av}^B/n_{av}^A = 10$ の結果である。図には直接シミュレーション (DSMC) 法による結果も重ねて示したが、差分による結果とよく一致している。

最後に $m^B/m^A = 0.25$, $d_m^B/d_m^A = 0.5$, $n_{av}^B/n_{av}^A = 0.1$, Kn = 1 の場合 (Fig.1 の Kn = 1 に対応) の、速度分布関数の振舞を Fig.3 に示す。Fig.3 (a) は $X_1/D = 0.095$ の、(b) は $X_1/D = 0.905$ での振舞を示している。速度分布関数は境界壁上では分子速度 $\xi_1 = 0$ で不連続を持つが、その影響で $\xi_1 = 0$ のまわりでの変化が激しい。ここでも DSMC 法による結果を重ねたが、B 気体の数密度が小さいことに対応して DSMC 法における B 気体のシミュレーション粒子数が少ない為、結果のばらつきが大きい。

引用文献

- 1) Y. Sone, T. Ohwada, & K. Aoki: Phys. Fluids A 1(1989)363.
- 2) T. Ohwada, K. Aoki, & Y. Sone: *Rarefied Gas Dynamics: Theoretical and Computational Techniques* (eds. E. P. Muntz, et al., AIAA, 1989)70.
- 3) T. Ohwada: Phys. Fluids A 5(1993)217.
- 4) T. Ohwada: Phys. Fluids 8(1996)2153; T. Ohwada: *Rarefied Gas Dynamics* (ed. C. Shen, Peking University Press, 1997)327.
- 5) B. T. Yeh & A. Frohn: Phys. Fluids 16(1973)330; D. Braun & A. Frohn: Int. J. Heat Mass Transfer 19(1976)1329.
- 6) S. Kosuge, K. Aoki, & S. Takata: Eur. J. Mech. B/Fluids (to be published).

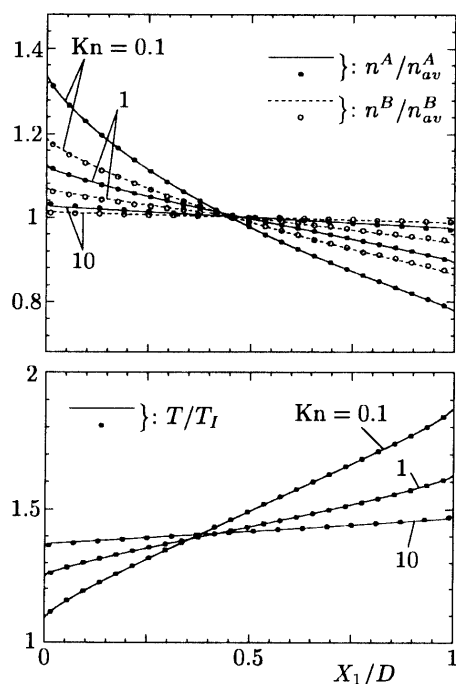


Figure 1 : Profiles of the number densities n^A and n^B and the temperature of the total mixture T for $m^B/m^A = 0.25$, $d_m^B/d_m^A = 0.5$, and $n_{av}^B/n_{av}^A = 0.1$. Here, — and - - - indicate the result by the finite-difference method, and • and ○ that by the DSMC method.

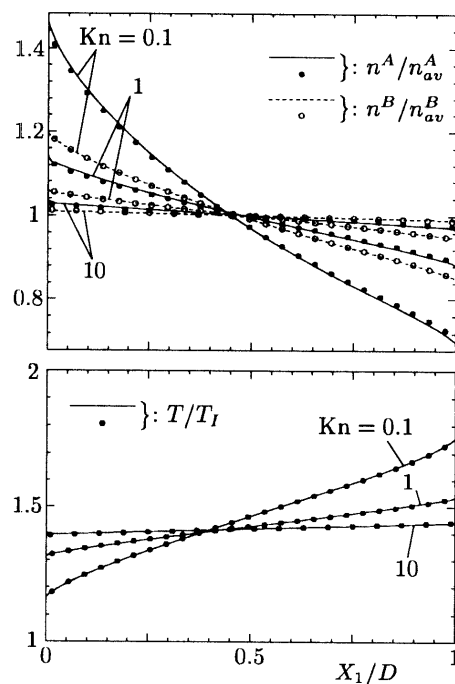


Figure 2 : Profiles of the number densities n^A and n^B and the temperature of the total mixture T for $m^B/m^A = 0.25$, $d_m^B/d_m^A = 0.5$, and $n_{av}^B/n_{av}^A = 10$. (See the caption of Figure 1.)

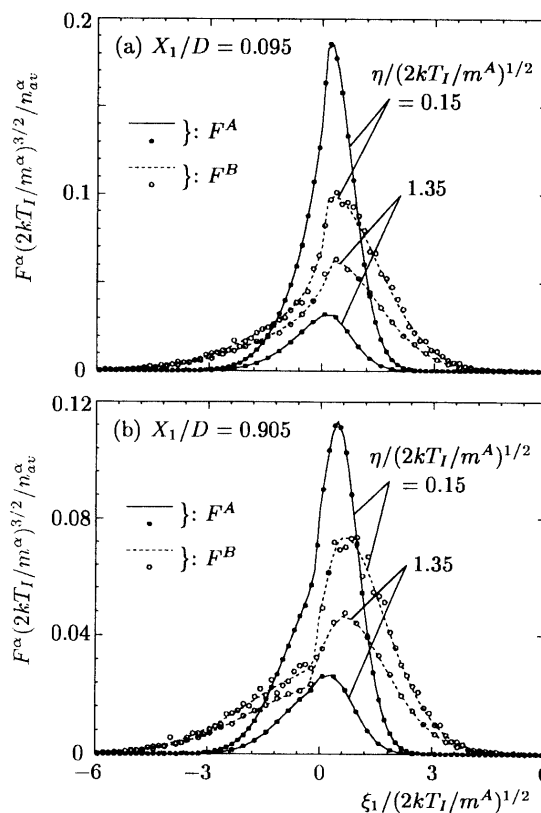


Figure 3 : Velocity distribution functions F^A and F^B in the case $m^B/m^A = 0.25$, $d_m^B/d_m^A = 0.5$, $n_{av}^B/n_{av}^A = 0.1$, and Kn = 1. Here, — and - - - indicate the result by the finite-difference method, and • and ○ that by the DSMC method.