B314

粘性流体のファラデー波についての数値的研究

Numerical Study on the Faraday Wave in Viscous Fluids

○村上 洋一（阪府大工），近野 雅嗣（阪府大工）

Youichi MURAKAMI and Masatsugu CHIKANO

Dept. of Aerospace Eng., Osaka Pref. Univ., 1-1 Gakuen-cho, Sakai, Osaka 599-8531, Japan.

The standing surface waves of a viscous fluid driven parametrically by a vertical harmonic oscillation is investigated based on direct numerical simulations of the two-dimensional Navier-Stokes equation together with appropriate boundary conditions. The condition of the onset of the waves in the experiments by Lioubashevski et al [Phys. Rev. Lett. **76**, 3959 (1996)] is reproduced by the numerical simulation. The form of the surface elevation is analyzed and the dependence of the saturated amplitude on the forcing strength shows a normal bifurcation. Instead of the localized state the spatially uniform standing waves are formed in an extended system. When the viscous boundary condition is applied at the side-walls, a transition from a symmetric wave to an asymmetric one occurs as time goes and complicated corrugated surface waves are also observed.

1. はじめに

「容器内の自由表面を持つ液体が加振によりどのように振舞うか」は，流体力学における基本的な問題の１つである．最も単純な場合として容器を上下に正弦的に加振すると，パラメトリック共鳴により定在波が生じる．加振の振幅 a と振動数 ω がこの問題の分岐パラメータとなる．この波はファラデー波と呼ばれ，流体系におけるカオス，ソリトン，パターン形成を生じる典型的な例として近年盛んに研究されている.[1]

ファラデー波に関する実験は主に水を数センチメートルの深さに満たして行われることが多かった．(例えば，Craik and Armitage[2]による実験.）このため非粘性渦なしの仮定のもとで定在波の発生条件，非線形相互作用などが理論的に取り扱われている.[3] 最近，Lioubashevski et al.[4]は高粘性流体 (動粘性率 $\nu = 0.00008[m^2/s]$) を非常に薄い層 (深さ $h \approx 0.001$[m]) に満たした実験を行った．静止状態から発生する定在波は容器の中心部もしくは壁付近の一部の領域のみに局在している点が従来の実験と定性的に異なる．さらに加振を強くすると２次不安定が生じ，大きな振幅の孤立した波が振動しながら進んでいく．これらは粘性が支配的な現象と考えられている．

ポテンシャル理論に粘性の効果を摂動的に取り入れた理論的研究は多いが，この実験は，$\delta/h \approx 0.5$ $(\delta = \sqrt{\nu/\omega})$ のように容器のほぼ半分が境界層になっているので，完全なナヴィエストークス方程式（ＮＳ方程式）を用いて粘性を取り入れることが望ましい．ＮＳ方程式のもとづいたファラデー波の発生に関する線形安定性理論は，Kumar and Tuckerman[5] により行われた．また，彼らの実験で得られた定在波発生の臨界加振振幅 a_cをこの理論は与えることも示されている.[6] 現在のところＮＳ方程式に基づく非線形性を考慮した理論的取り扱いはなされていない．本研究では，２次元空間でのＮＳ方程式の直接数値シミュレーションを実行し，発生する波の特徴を調べ，実験との比較を行う．特に，側壁の境界条件の影響について述べる．

2. 数値計算方法

基礎方程式は連続の式とＮＳ方程式を用い，下面の固体壁では粘性境界条件を上面の液面では粘性応力および表面張力を考慮し，空気の運動は無視した．側壁には周期境界条件もしくは粘性境界条件を用いた．粘性境界条件を適用した場合には，側壁でメニスカスができない条件：$\partial h/\partial x = 0$ を与えた．液面高さは位置の１価関数 $h = h(x,t)$ と仮定して境界適合格子を適用した．計算スキームはＳＭＡＣ法にもとづき，時間については１次の前進オイラー法を用い，空間については移流項には３次の風上差分を，それ以外は２次の中心差分を用いた．ポアソン方程式はＳＯＲ法によって解いた．

数値計算で用いたパラメータは Lioubashevski et al.[4]の実験例に合わせ，容器の幅：$L = 0.072[m]$ (Lioubashevski *et al.*[4]の容器の半分）もしくは $L = 0.008[m]$（１波長），深さ：$h = 0.0013[m]$，動粘性率：$\nu = 0.00008[m^2/s]$，密度：$\rho = 900[kg/m^3]$，表面張力係数：$\sigma = 0.030[N/m]$，角振動数：$\omega = 257.5[s^{-1}]$ (振動数：$f = 41[Hz]$) を用いる．この条件のもとで，臨界加振振幅は $a_{gc} = 16.650g$ ($g = 9.80[m/s^2]$) である．なお，$L = 0.008$[m] は無限領域での臨界波長にほぼ等しい．($\lambda_c = 0.0083[m]$, $a_{gc} = 16.60g$).

$L = 0.008[m]$ について，水平方向の分割数 N_xおよび鉛直方向の分割数 N_zは，$(N_x, N_z) = (30,10), (60,10), (120,10), (60,20)$ を選んだ．時間刻みは $dt = 0.000012195[s]$（振動の１周期を２０００等分）とした．ＳＯＲ法の緩和係数は$\epsilon = 1.7$ に固定した．

3. 数値シミュレーション結果

3.1 周期境界条件 (側壁）による結果

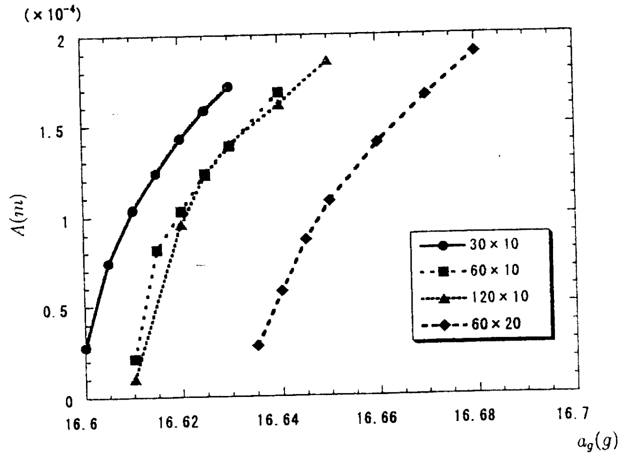

Fig 1: The equilibrium amplitudes A_e versus the magnitude of the acceleration $a_g$for various resolutions. A_e is defined by the absolute value of the fundamental Fourier mode.

図１に，$L = 0.0008$[m] の場合のさまざまな加振振幅に対

して得られた平衡振幅の大きさを示した．振幅が 0 になるところが臨界加振振幅に相当する．分割数を増やすことにより理論値 $a_{gc} = 16.650g$[7] に近づくことが示されており，計算コードの正しさが確認できる．弱非線形理論の枠内で超臨界分岐を仮定すると，$A_e \propto \sqrt{a_g - a_{gc}}$ の関係が成り立つ．A_e^2をプロットすることによりこの関係が成り立つことを確認しているので，静止状態から定在波が発生する現象は超臨界分岐であることがわかる．これは，実験においては定在波の発生に関してヒステリシスが生じないことが報告されていることと整合性がある．

$L = 0.072$[m]（N_x, N_z）$=(270, 10)$ の場合には 9 波長分の波が励起されるが，調べた範囲では，一定の振幅の定在波が観察された．発生した定在波に攪乱を加えてももとの定在波に戻ったので，この定在波は安定であると考えられる．非粘性に近い系とは異なり，変調不安定が見出されなかった．また，局在した波が観察されなかった．実験においては波面に沿った方向に局在した波が観察されているので，この数値計算結果と矛盾するものではない．

以上の結果は，以前に報告した移流項に 1 次の風上差分を適用したもの[8]と定性的には一致している．平衡振幅や臨界加振振幅の値が改善されている．

3.2 粘着境界条件（側壁）による結果

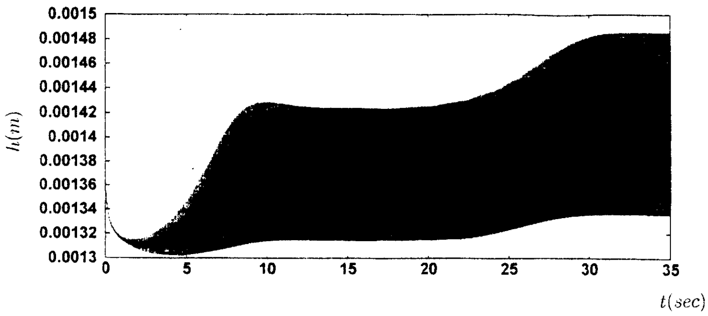

Fig 2: Time-evolution of the maximum height of the waves. $a_g = 16.800$, $L = 0.072$[m].

濡れの条件としては，メニスカスができない（$\partial h/\partial x = 0$）を与えている．図 2に最大の波高 h_{max} の時間変化が示されている．$t = 10$ あたりでほぼ平衡状態に達し，さらに成長し $t = 30$ あたりで新たな平衡状態に移っている．前者を遷移状態および後者を最終状態と呼ぶことにする．

図 3に示すように，遷移状態は中心に対して左右対称であるが，最終状態は壁近傍のみで対称性が崩れている．詳しく調べると，波長が $\lambda = 0.008089$[m] から $\lambda = 0.008353$[m] のように長くなり，振幅も増大している．

また，1 周期の波形を詳細に調べると，周期境界条件のときとは異なり定在波が平らになる瞬間がなく，図 4に示すように「しわくちゃな状態」になっていることがわかった．この図は最終状態が示されているが，遷移状態においてもこのようなしわくちゃな状態が観察される．このような状態は実験では報告されていないが，これらの変動は 100[μ m] 未満であるので，高周波で振動させた状態で測定するのは困難であることが予想される．

4. おわりに

粘性流体のファラデー波の 2 次元直接数値シミュレーションを実行し，周期境界条件のもとで，静止状態の不安定性は超臨界分岐を生じることおよび変調不安定や局在した波は発生しないことを示した．粘性境界条件においては，2 つの状態が存在することおよびしわくちゃな状態が生じることを示した．これらについては，濡れの境界条件，システムサイズ，加振振幅といったパラメータの依存性についてさらに検討する必要がある．

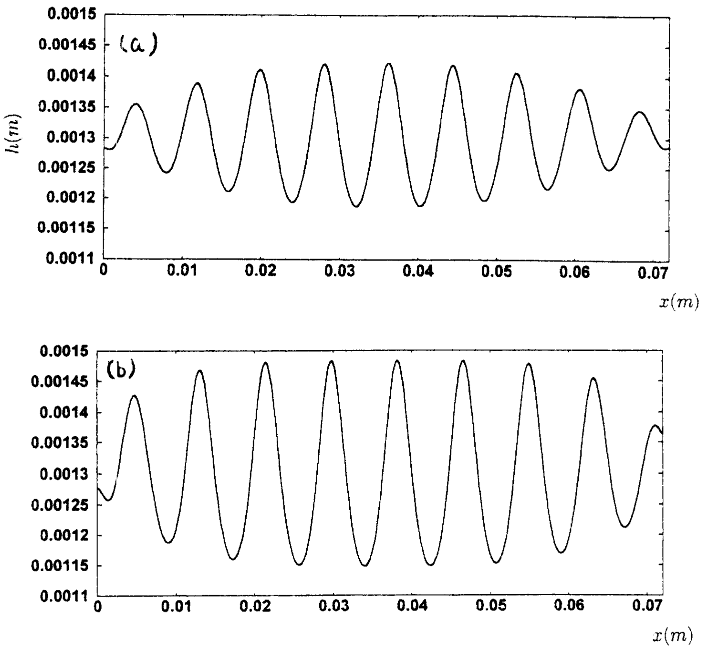

Fig 3: Surface waves. (a) transient state $t = 14.634$ and (b) final state $t = 34.146$. $a_g = 16.800$, $L = 0.072$[m].

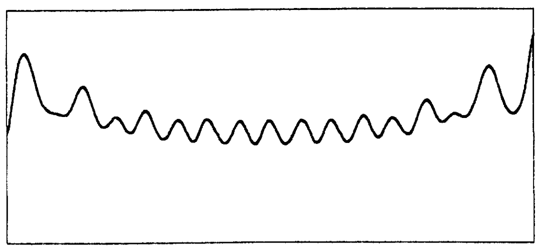

Fig 4: Nearly flat but corrugated wave. $t = 34.16240$. $a_g = 16.800$, $L = 0.072$[m].

引用文献

1) 梅木誠：ながれ **16** (1997) 218.

2) A. D. D. Craik and J. G. M. Armitage: Fluid Dyn. Res. **15** (1995) 129.

3) J. W. Miles and D. Henderson: Ann. Rev. Fluid Mech. **22** (1990) 143.

4) O. Lioubashevski, H. Arbell and J. Fineberg: Phys. Rev. Lett. **76** (1996) 3959.

5) K. Kumar and L. Tuckerman: J. Fluid Mech. **279** (1994) 49.

6) O. Lioubashevski, J. Fineberg and L. S. Tuckerman: Phys. Rev. E **55** (1997) R3832.

7) 小池隆寛：平成１０年度卒業論文.

8) 近野雅嗣，村上洋一：数理解析研究所講究録「大自由度・強非線形の波動現象の数理」**1092** (1999 年 4 月)1.