

保存型の対流項を用いた有限要素法スキームの検証

Verification of finite element scheme using conservative convection term

○横原孝文 (核融合研), 棚橋隆彦 (慶大理工)

Takafumi MAKIHARA* and Takahiko TANAHASHI**

* Theory and Computer Simulation Center, National Institute for Fusion Science, Gifu 509-5292, Japan

**Dept. of Mech. Eng., Keio University, Yokohama 223-8522, Japan

We have some kinds of formulations of the convection term in the Navier-Stokes equation. In the analysis of an incompressible flow, these formulations are equal to each other when the continuity equation is satisfied. However, we can't satisfy the continuity equation completely in our calculation. In the present paper, we discuss the formulation of the convection term and its discretization on finite element method. The each numerical result which is obtained by the analysis of the turbulent channel flow using Large Eddy Simulation is compared. As a result, it is shown that the divergence form is better form in terms of the numerical accuracy and the conservative property.

1. はじめに

一般に流れの有限要素法解析において Navier-Stokes 方程式の対流項には勾配型 (Gradient form) の形式が用いられる場合が多い。しかしながら Navier-Stokes 方程式が運動量保存則から導かれることを考えると、発散型 (Divergence form) を用いることが望ましいように思われる。両者は連続の式が完全に満足されれば互換であるが、数値解析で連続の式を完全に満たすことは困難である。例えば本論文で扱う GSMAC 有限要素法⁽¹⁾では圧力に関する Poisson 方程式の流速と圧力の同時緩和反復の際に収束判定基準として連続の式が小さな値をとることを要求するが、完全に零になるわけではない。その他の解析手法でもこれは同じである。その結果、勾配型と発散型では解析結果に誤差が生じることになるはずであるが、有限要素法解析においてはこれらの対流項の形式による解析誤差について比較検討されておらず、検討の必要があると思われる。さらに勾配型と発散型の平均をとる形式として混合型 (Skew-Symmetric form) も考えられる。混合型は速度二乗量および運動エネルギーに対して保存形であることが示され⁽²⁾、差分法で用いられることが多いが、有限要素法で用いられることは少なく、比較検討すべき形式であると考えられる。これら以外に初期の GSMAC 有限要素法⁽³⁾で用いられていたように、回転型 (Rotational form) で表示することも考えられるが、回転型表示は速い流れの解析で必要不可欠となる上流化手法の考案が困難なこと考慮して、本論文では勾配型、発散型、混合型の3つの対流項の表現形式について解析誤差の比較検討を行う。

また特に乱流の数値解析においては対流項の取り扱いを慎重に行わなければならない。対流項の違いによる解析結果の違いは顕著に現れるものと考えられる。そこで本論文では対流項の違いによる解析誤差の比較を LES (Large Eddy Simulation) による平行平板間乱流の解析によって行う。

2. 定式化および離散化

有限要素法による非圧縮性流体の流れ解析を行う多くの場合、流れを記述する支配方程式である連続の式と Navier-Stokes 方程式は以下のように書かれる。

$$\nabla \cdot \mathbf{u} = 0 \quad (1)$$

$$\frac{\partial \mathbf{u}}{\partial t} + (\mathbf{u} \cdot \nabla) \mathbf{u} = -\nabla p + \frac{1}{Re} \nabla^2 \mathbf{u} \quad (2)$$

ここで方程式は適切に無次元化されているものとし、 $\mathbf{u}$, p , Re はそれぞれ速度ベクトル、圧力、Reynolds 数である。本来、運動量保存則から導かれる Navier-Stokes 方程式 (2) の左辺第2項に示される対流項は保存形式として

$$(\text{Convection term}) = \nabla \cdot (\mathbf{u}\mathbf{u}) \quad (3)$$

と発散型で表されるが、連続の式 (1) を考慮することによって式 (2) のように勾配型で書くこともできる。数値解析において

連続の式 (1) が完全に満足されれば対流項の勾配型と発散型は互換であるが、一般には式 (1) が完全には満足されない。また対流項の形式には勾配型と発散型の平均をとる混合型があり以下のように書かれる。

$$(\text{Convection term}) = \frac{1}{2} \{ \nabla \cdot (\mathbf{u}\mathbf{u}) + (\mathbf{u} \cdot \nabla) \mathbf{u} \} \quad (4)$$

本論文では式 (2), (3), (4) の勾配型、発散型、混合型の対流項に対して解析結果の比較を行う。

次にこれらの形式の双一次要素 Galerkin 法による離散化を考える。一般に有限要素法による離散化は差分法による離散化に比べ、係数行列を必要とするために記憶容量が大きくなってしまふ。そこでここでは要素平均を用いることにより、記憶容量を小さくすることを考えて離散化を行う。そのため勾配型では従来から行われている移流速度を、発散型ではテンソル $\mathbf{u}\mathbf{u}$ に要素平均を用いる。その結果離散化された各形式は以下のように書かれる。

$$\mathbf{u}_e \cdot \mathbf{A}_{\alpha\beta} \mathbf{u}_\beta \quad (\text{Gradient form}) \quad (5)$$

$$-(\mathbf{u}\mathbf{u})_e \mathbf{C}_\alpha \quad (\text{Divergence form}) \quad (6)$$

$$\{ \mathbf{u}_e \cdot \mathbf{A}_{\alpha\beta} \mathbf{u} - (\mathbf{u}\mathbf{u})_e \mathbf{C}_\alpha \} / 2 \quad (\text{Skew-Symmetric form}) \quad (7)$$

ここで移流行列 $\mathbf{A}_{\alpha\beta}$ 、勾配行列 $\mathbf{C}_\alpha$ は線形形状関数 N_α

$$N_\alpha = \frac{1}{8} (1 + \xi_\alpha \xi) (1 + \eta_\alpha \eta) (1 + \zeta_\alpha \zeta) \quad (3D) \quad (8)$$

を用いてそれぞれ以下のように書かれる。ただし、 ξ , η , ζ は計算空間の座標であり、下添字 α は局所節点番号である。

$$\mathbf{A}_{\alpha\beta} = \int_{\Omega} N_\alpha \nabla N_\beta d\Omega \quad (9)$$

$$\mathbf{C}_\alpha = \int_{\Omega} \nabla N_\alpha d\Omega \quad (10)$$

また下添字 α , β は局所節点番号、 e は要素平均、 Ω は有限要素内部を表す。式 (6), (7) の発散型と混合型の発散型部分では部分積分を用いたが⁸、ここでは境界積分項の表記を省略している。

本論文では対流項の影響のみを検討することから、Navier-Stokes 方程式 (2) 中の他の非定常項、圧力項、粘性項に関しては以下のように同一の離散化を用いることとする。

$$(\text{Unsteady term}) = \overline{M}_{\alpha\beta} \frac{\partial \mathbf{u}_\beta}{\partial t} \quad (11)$$

$$(\text{Pressure term}) = \mathbf{C}_\alpha p_e \quad (12)$$

$$(\text{Viscous term}) = -\frac{1}{Re} D_{\alpha\beta} \mathbf{u}_\beta \quad (13)$$

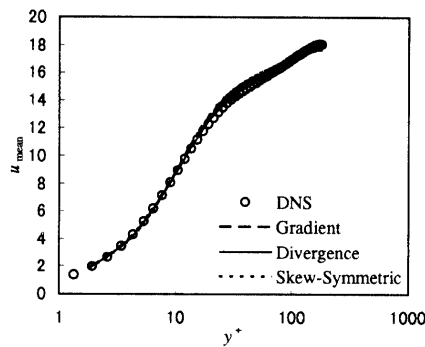


Fig. 1 Distributions of mean velocity

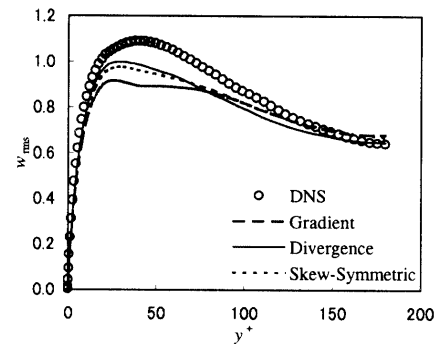
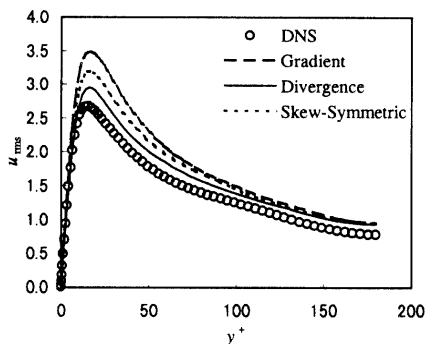
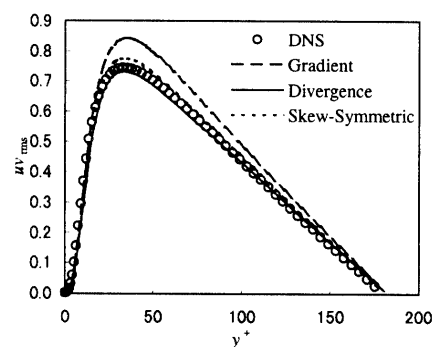
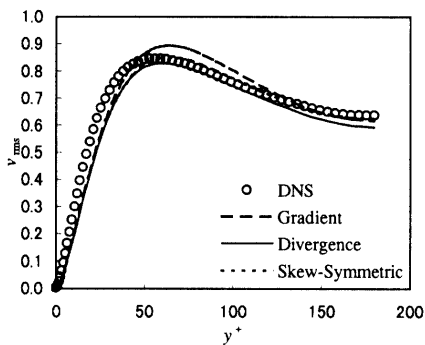
Fig. 4 Distributions of turbulent intensity w_{rms} Fig. 2 Distributions of turbulent intensity u_{rms} 

Fig. 5 Distributions of Reynolds stress

Fig. 3 Distributions of turbulent intensity v_{rms}

ただし、 $\overline{M}_{\alpha\beta}$ は集中質量行列であり、質量行列 $M_{\alpha\beta}$ 、拡散行列 $D_{\alpha\beta}$ は以下のように書かれる。

$$M_{\alpha\beta} = \int_{\Omega} N_{\alpha} N_{\beta} d\Omega \quad (14)$$

$$D_{\alpha\beta} = \int_{\Omega} \nabla N_{\alpha} \cdot \nabla N_{\beta} d\Omega \quad (15)$$

3. 解析モデルおよび解析結果

乱流モデルには Smagorinsky モデルを用いる。解析領域は流れ方向 (x)、壁面方向 (y)、スパン方向 (z) に $3.2H \times 1.0H \times 1.6H$ とした。壁面摩擦速度に基づく Reynolds 数は $Re_{\tau} (\equiv u_{\tau} H / \nu) = 360$ である。境界条件は流れ方向とスパン方向に周期境界条件、

壁面上で滑りなしの条件を用いる。このとき流れを維持するために無次元圧力勾配 $\partial P / \partial x = -2.0$ を与えた。要素分割は $32 \times 64 \times 32$ であり、壁座標に基づく格子間隔は $\Delta x^+ : \Delta y^+ : \Delta z^+ = 36 : 1.82 \sim 12.61 : 18$ である。解析の時間刻み幅は $\Delta t = 2.5 \times 10^{-4}$ とした。初期条件には勾配型の対流項による離散化で予備計算を行い、十分に発達した状態の瞬時値を用いた。

図 1 に平均速度分布を示した。壁方向の分割数が少なかった前報では発散型で主流を過小評価する傾向にあったが⁽⁴⁾、平均速度分布はいずれの形式においても DNS データと良好に一致した。図 2 から 4 に示した乱流強度および図 5 に示した Reynolds 応力では、前報に比べ主流を過小評価を改善したため若干過大に評価しているものの発散型の解析結果が DNS データに最も近い分布を示す。以上の結果において発散型は連続の式の誤差分を含めて対流項を正しく評価しており、逆に勾配型ではこの評価が出来なかったものと考えられる。

5. おわりに

本論文では Smagorinsky モデルを用いた平行平板間乱流の LES による対流項の定式化の違いによる解析結果の比較検討を行った。対流項に勾配型・発散型・混合型を用いた結果、発散型を用いることにより従来から用いられている勾配型や勾配型と発散型の平均をとる混合型に比べて、良好な解析結果を得られることが分かった。

参考文献

- (1) 加藤・棚橋, 機論, **57**-540, B(1991), 2640-2647.
- (2) 森西, 機論, **62**-604, B(1996), 4090.
- (3) 棚橋・斉藤, 京都大学数理解析研究所講義録, **548**, (1985), 122.
- (4) 横原・棚橋, 第 14 回数値流体力学シンポジウム, (2000), 190.