

高い等方性を有する熱流体差分格子ボルツマンモデル

Finite Difference Lattice Boltzmann Method Having a High Spatial Isotropy

○ 渡利 實、蔦原 道久 (神戸大)

Minoru Watari*, Michihisa Tsutahara*

*Graduate School of Science and Technology, Kobe University, Rokko, Nada, 657-8501, Japan

The finite difference lattice Boltzmann method (FDLBM) is a new numerical tool which can solve viscous fluid flows. However, existing FDLBM for compressible fluids has drawbacks of poor numerical stability and narrow band of temperature. We propose an FDLBM solver for compressible fluids, which is very stable and can handle a wide range of temperature

1. はじめに

熱が関係する流れ、いわゆる熱流体を格子ボルツマン法(LBM)で扱う方法には二つの流れがある。ひとつは熱も流体粒子と同様に粒子として扱う Multi-component model¹⁾である。これは非圧縮 Boussinesq 近似に相当するモデルになる。他は複数の異なった速さを持つ速度粒子を用いる Multi-speed model²⁾である。これは圧縮性の効果を正しく表現できるものの、弱い数値安定性と温度範囲の狭さという弱点を持っている。一方、LBM を差分方程式として解く差分格子ボルツマン法(FDLBM)³⁾が数値安定性を確保し非一様格子に適用できる長所を持って登場した。しかし、著者らの見る限り FDLBM の従来例は LBM の速度粒子モデルをそのまま流用しており、FDLBM の長所を十分に活かしていない。FDLBM の場合、速度粒子として計算格子の大きさの整数倍に選ぶ、という LBM の条件はもはや不要で、この条件緩和を考慮すればより広い温度範囲でより安定な Multi-speed model が設定できる。ここではそのような 2 次元 FDLBM モデルを提案する。

2. 差分格子ボルツマン法

差分格子ボルツマン法では速度分布関数 f_{ki} の時間発展を次の微分方程式を差分化して解く。

$$\frac{\partial f_{ki}}{\partial t} + c_{ki\alpha} \frac{\partial f_{ki}}{\partial r_\alpha} = -\frac{1}{\phi} (f_{ki} - f_{ki}^{(0)}) \quad (1)$$

ここで、 t : 時間、 r_α : 空間座標、 $c_{ki\alpha}$: 粒子速度、 $f_{ki}^{(0)}$: 平衡分布関数、 ϕ : 緩和パラメータである。添字 α は座標軸 x, y 、添字 ki は速度粒子の種類(k : 速度の大きさ、 i : 方向)を示す。

流体の密度 ρ 、速度 u_α 、内部エネルギー e および平衡分布関数 $f_{ki}^{(0)}$ を次式で定義する。

$$\rho = \sum_{ki} f_{ki} \quad (2)$$

$$\rho u_\alpha = \sum_{ki} f_{ki} c_{ki\alpha} \quad (3)$$

$$\rho \left(e + \frac{u^2}{2} \right) = \sum_{ki} f_{ki} \frac{c_{ki}^2}{2} \quad (4)$$

$$f_{ki}^{(0)} = \rho F_k \varphi_{ki}^{(0)} \quad (5)$$

$$\begin{aligned} \varphi_{ki}^{(0)} = & \left(1 - \frac{u^2}{2e} \right) + \frac{1}{e} \left(1 - \frac{u^2}{2e} \right) c_{ki\xi} u_\xi \\ & + \frac{1}{2e^2} c_{ki\xi} c_{ki\eta} u_\xi u_\eta + \frac{1}{6e^3} c_{ki\xi} c_{ki\eta} c_{ki\zeta} u_\xi u_\eta u_\zeta \end{aligned} \quad (6)$$

平衡分布関数の係数 F_k として次のモーメントと条件

を満足するように設定する。

$$\sum_{ki} F_k \varphi_{ki}^{(0)} = 1 \quad (7)$$

$$\sum_{ki} F_k c_{ki\alpha} \varphi_{ki}^{(0)} = u_\alpha \quad (8)$$

$$\sum_{ki} F_k c_{ki\alpha} c_{ki\beta} \varphi_{ki}^{(0)} = e \delta_{\alpha\beta} + u_\alpha u_\beta \quad (9)$$

$$\sum_{ki} F_k \frac{c_{ki}^2}{2} \varphi_{ki}^{(0)} = e + \frac{u^2}{2} \quad (10)$$

$$\sum_{ki} F_k \frac{c_{ki}^2}{2} c_{ki\alpha} \varphi_{ki}^{(0)} = u_\alpha \left(2e + \frac{u^2}{2} \right) \quad (11)$$

かくして得た方程式系は Chapman-Enskog 展開により以下の Navier-Stokes 方程式系に関係づけられる。

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial r_\alpha} (\rho u_\alpha) = 0 \quad (12)$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial t} (\rho u_\alpha) + \frac{\partial}{\partial r_\beta} (\rho u_\alpha u_\beta + p \delta_{\alpha\beta}) \\ - \frac{\partial}{\partial r_\beta} \left[\mu \left(\frac{\partial u_\beta}{\partial r_\alpha} + \frac{\partial u_\alpha}{\partial r_\beta} - \frac{\partial u_\gamma}{\partial r_\gamma} \delta_{\alpha\beta} \right) \right] = 0 \end{aligned} \quad (13)$$

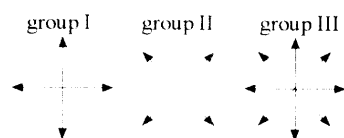
$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial t} \left[\rho \left(e + \frac{u^2}{2} \right) \right] + \frac{\partial}{\partial r_\alpha} \left[\rho u_\alpha \left(e + \frac{u^2}{2} + \frac{p}{\rho} \right) \right] \\ - \frac{\partial}{\partial r_\alpha} \left[\kappa' \frac{\partial e}{\partial r_\alpha} + \mu u_\beta \left(\frac{\partial u_\beta}{\partial r_\alpha} + \frac{\partial u_\alpha}{\partial r_\beta} - \frac{\partial u_\gamma}{\partial r_\gamma} \delta_{\alpha\beta} \right) \right] = 0 \end{aligned} \quad (14)$$

ここで圧力 p 、温度 T 及び拡散関係諸量との関係は次式で表される(R : 気体定数)。

$$\begin{aligned} p &= \rho e \\ e &= RT \\ \mu &= \rho e \phi : \text{粘性係数} \\ \kappa' &= 2 \rho e \phi : \text{熱伝達率} \end{aligned} \quad (15abcd)$$

3. 従来のモデルと新しいモデル

4 方位、8 方位の速度粒子(速さ 1)をそれぞれ組とする空間等方性を図 1 に示す。4 方位の速度粒子の組は 4 階テンソルに非等方性 $\delta_{\alpha\beta\gamma\delta}$ を持つ。著者らが従来 FDLBM に流用してきた LBM モデルでは静止粒子と速さ 1, 2, 3 の group I および速さ $\sqrt{2}, 2\sqrt{2}$ の group II の組合せ(図 2)を用いることで 4 階テンソルに現れる非等方性項を消し、条件(7)~(11)を満足させてきた⁴⁾。FDLBM では速度粒子として計算格子に関わりなく選ぶことができるため等方



	$\sum_i 1$	$\sum_i c_{k\alpha}$	$\sum_i c_{k\alpha} c_{k\beta}$	$\sum_i c_{k\alpha} c_{k\beta} c_{k\gamma}$	$\sum_i c_{k\alpha} c_{k\beta} c_{k\gamma} c_{k\chi}$	$\sum_i c_{k\alpha} c_{k\beta} c_{k\gamma} c_{k\chi} c_{k\lambda}$
GROUP I	4	0	$2\delta_{\alpha\beta}$	0	$\delta_{\alpha\beta\gamma\chi}$	0
GROUP II	4	0	$2\delta_{\alpha\beta}$	0	$\Lambda_{\alpha\beta\gamma\chi} - \delta_{\alpha\beta\gamma\chi}$	0
GROUP III	8	0	$4\delta_{\alpha\beta}$	0	$\Lambda_{\alpha\beta\gamma\chi}$	0

FIG.1 Groups of velocity particles and those spatial isotropy. $\delta_{\alpha\beta\gamma\chi} = 1$ (if $\alpha=\beta=\gamma=\chi$), $=0$ (otherwise). $\Lambda_{\alpha\beta\gamma\chi} = \delta_{\alpha\beta}\delta_{\gamma\chi} + \delta_{\alpha\gamma}\delta_{\beta\chi} + \delta_{\alpha\chi}\delta_{\beta\gamma}$

性の高い group III の速度粒子を用いることができる。静止粒子と速さ a, b, c を持つ group III 3組の組合せ(図3)で条件(7)~(11)を満足させることができる。

この新しいモデルの係数 F_k は次式で表される。

$$F_a = \frac{1}{a^2(a^2 - b^2)(a^2 - c^2)} \left[6e^3 - (b^2 + c^2)e^2 + \frac{b^2 c^2}{4}e \right] \quad (16)$$

$$F_b = \frac{1}{b^2(b^2 - a^2)(b^2 - c^2)} \left[6e^3 - (c^2 + a^2)e^2 + \frac{c^2 a^2}{4}e \right] \quad (17)$$

$$F_c = \frac{1}{c^2(c^2 - a^2)(c^2 - b^2)} \left[6e^3 - (a^2 + b^2)e^2 + \frac{a^2 b^2}{4}e \right] \quad (18)$$

$$F_0 = 1 - 8(F_a + F_b + F_c) \quad (19)$$

我々は分布係数 F_k が負になる領域では計算が不安定になることを経験的に知っている。 $F_0 > F_a > F_b > F_c > 0$ の条件下 $e = 1.0$ のまわりにできるだけ広い内部エネルギー範囲で全ての分布係数が正の値を持つように a, b, c を決めてやると以下のとおりである。この時、 $e = 1.0 \pm 0.67$ の範囲で全ての F_k が正である。

$$(a, b, c) = (1.114, 2.142, 3.707) \quad (20)$$

4. 新しいモデルの検証

4.1 音速の測定

初期条件として設定した密度差より発生する圧縮波、膨張波の走りから音速を測定した。経過時間と圧力分布の様子を図4に、それから求めた音速と内部エネルギーの関係を図5に示す。理論値($\sqrt{2e}$)と良く一致している。

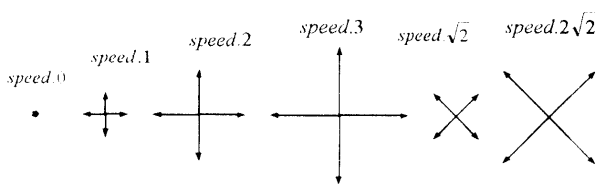


FIG.2 Velocity particles of a conventional FDLBM

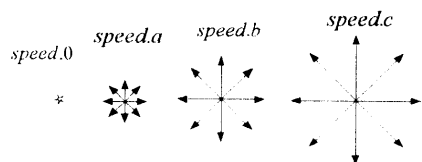


FIG.3 Velocity particles of a new FDLBM

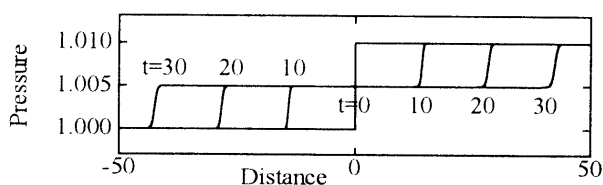


FIG.4 Propagation of sound waves in FDLBM simulation

4.2 Couette 流れ

上壁、下壁の温度をそれぞれ $e \pm \Delta e$ に設定し、上壁を突然、速さ U で動かした場合(Couette 流れ)の数値シミュレーションを行った。その一例($U=0.1$, $e=1$, $\Delta e=0.0$)の経過時間と速度分布の関係を図6に、定常に達してからの内部エネルギー分布を図7に示す。解析解と良く一致している。

安定して計算できる温度範囲を前節の従来モデルと比較してみると次の範囲で数値計算は発散せずに正しい解を得た。新しいモデルの適用温度範囲は2.5倍に広がっている。

従来のモデル $e \pm \Delta e : 1.0 \pm 0.25$

新しいモデル $e \pm \Delta e : 1.0 \pm 0.65$

5. おわりに

現在、このモデルを他の熱流体問題にも適用して非常に良好な結果を得ている。又、 a, b, c の設定基準について FDLBM の安定性と関連づけて現在、検討中である。これらの結果について別の機会をとらえて報告したい。計算を手伝ってくれた院生の四方君に謝意を表します。

引用文献

- 1) X. Shan & H. Chen: Phys. Rev. E **47** (1993) 1815
- 2) F.J. Alexander, S. Chen & J. Sterling: Rev. E **47** (1993) R2249
- 3) N. Cao, S. Chen, S. Jin & D. Martinez: Phys. Rev. E **55**, 1 (1997) R21
- 4) 高田, 山越, 薦原: 機械学会論文(B 編), 64-28 (1998) 3934

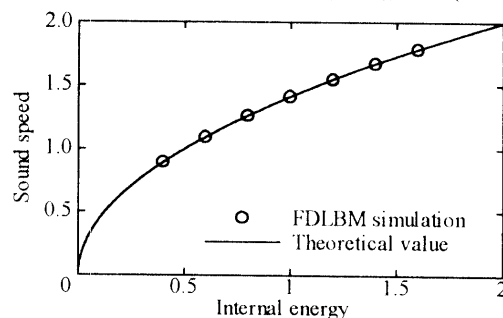


FIG.5 Sound speed versus internal energy

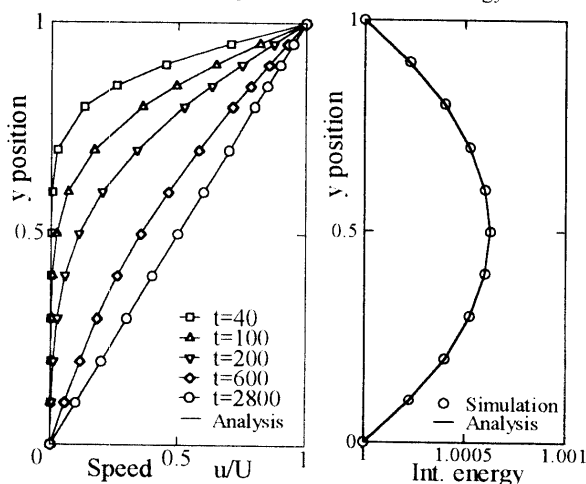


FIG.6 Speed at various times

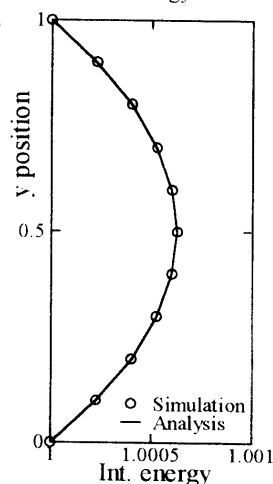


FIG.7 Int. energy at steady state