

ダイナモ現象におけるエネルギーの流れ

Energetics in Dynamo Phenomena

○石原典雄 (核融合研), 木田重雄 (核融合研)

Norio ISHIHARA and Shigeo KIDA

Theory and Computer Simulation Center, National Institute for Fusion Science, Toki, Gifu 509-5292, Japan

Energetics in dynamo phenomena is investigated by solving the MHD Boussinesq equation in a rotating spherical shell. The kinetic energy supplied by the buoyancy force is transferred to magnetic energy, while dissipated by viscosity. In an equilibrium period, the supply of magnetic energy by the Lorentz force and the resistive dissipation oscillate in time with the same average. The phase of oscillation of the former always leads the latter.

1. はじめに

ダイナモ作用とは、磁力線の伸張強化により、力学的エネルギーが磁気エネルギーへ変換される力学過程に与えられた名前である。このようなメカニズムが、地球中心部(外核内部)の溶融鉄の対流運動によって促進され、散逸する磁場をたえず補給し、地磁気を維持しているものと考えられている。ダイナモ作用により、対流の運動エネルギーは磁気エネルギーに変換されるが、磁場がある程度まで成長し強くなると、今度は逆に、磁場がローレンツ力により速度場を変形し、一般にはダイナモ作用を抑制する方向にはたらく。したがって、地磁気の起源の理解には、流れ場および磁場の構造と2種類のエネルギーの流れの間の関係についての知見が不可欠である。とくに、磁場強度の大きさによって、速度場と磁場の間のエネルギーのやりとりがどのように変化するか興味深い問題である。

これまで報告されている解析結果¹⁻⁶⁾を比較すると、磁気エネルギーの時間発展の振舞いに共通した特徴が観察される。ダイナモ作用によって増幅される磁気エネルギーは、一度飽和し安定するが、再び増大に転じ、より高い磁気エネルギーを維持する状態へと変化するのである。対流運動を駆動するエネルギー源として、一定の熱源しか与えていないにもかかわらず、なぜこのような現象が起こるのだろうか。このような性質を理解する第一歩として、MHD プシネスク方程式の数値シミュレーションを実行し、系のエネルギーの流れる様子を詳しく調べた。

2. 数学的定式化

地磁気の起源の本質を理解するために、外核を模擬した一定角速度で回転する2つの同心球内部に満たされたMHD プシネスク流体の運動を考える。内球は高温、外球は低温とする。流体には、この温度差と中心に向かう重力による浮力がはたらき、熱対流が駆動され、それによって磁場が誘導される。ここで、内球内部は完全絶縁体、外球外部は真空とする。また、熱拡散係数、磁気拡散係数、動粘性係数、熱膨張率、透磁率などの物性値は全空間で一様とする。ダイナモ現象を記述する時間発展方程式は、無次元パラメータ (Ta , Ra , Pr , St) を用いて、

$$\frac{D\mathbf{u}}{Dt} = -\nabla P + PrRaTr + PrTa^{\frac{1}{2}}\mathbf{u} \times \hat{\mathbf{z}} + \mathbf{j} \times \mathbf{b} + Pr\nabla^2\mathbf{u}, \quad (1)$$

$$\nabla \cdot \mathbf{u} = 0, \quad (2)$$

$$\frac{D\mathbf{b}}{Dt} = \mathbf{b} \cdot \nabla \mathbf{u} + St\nabla^2\mathbf{b}, \quad (3)$$

$$\nabla \cdot \mathbf{b} = 0, \quad (4)$$

$$\frac{DT}{Dt} = \nabla^2 T \quad (5)$$

のように与えられる。ここで、 $\mathbf{u}$ は速度場、 $\mathbf{b}$ は磁場、 T は温度場である。境界条件は、速度場に粘着境界を課し、温度場は時間的に一定で空間的に一様とする。また、磁場は球殻内外のポテンシャル磁場になめらかに接続する。数値計算には、チェビシェフ・球面調和関数・擬スペクトル法を用いる²⁾。

まず、ダイナモ機構を議論するための運動エネルギー方程式および磁気エネルギー方程式を導入しておく。式(1)に $\mathbf{u}$ を内積し、球殻内部(V_{shell})で、式(3)に $\mathbf{b}$ を内積し、全空間(V_{all})で積分することによって、

$$\frac{D\mathcal{E}_K}{Dt} = Q_B - Q_L - Q_V, \quad \frac{D\mathcal{E}_M}{Dt} = Q_L - Q_R \quad (6)$$

が得られる。ここで、

$$\begin{aligned} \mathcal{E}_K &= \frac{1}{2} \int_{V_{\text{shell}}} |\mathbf{u}|^2 dV, & \mathcal{E}_M &= \frac{1}{2} \int_{V_{\text{all}}} |\mathbf{b}|^2 dV, \\ Q_B &= PrRa \int_{V_{\text{shell}}} Tr \cdot \mathbf{u} dV, & Q_V &= Pr \int_{V_{\text{shell}}} \|\mathbf{s}\|^2 dV, \\ Q_L &= \int_{V_{\text{shell}}} \mathbf{b} \cdot \mathbf{s} \cdot \mathbf{b} dV, & Q_R &= St \int_{V_{\text{shell}}} |\mathbf{j}|^2 dV \end{aligned}$$

である($\mathbf{s}$ は変形速度テンソル)。また、磁気エネルギーは内外球面上から流入・流出するが、これらは極めて小さいので、ここでは省略する。

3. 結果

MHD ダイナモの計算には、いくつかの方法がある。たとえば、はじめに速度場と磁場の微小攪乱を同時に与えて計算する方法や、初期に強い磁場を与えて、熱対流と磁場の計算を同時に行い、磁場が十分に発達した後で、はじめに与えた磁場を取り去る方法、などがある。ここでは、速度場と磁場の時空間構造を系統的に調べるために、これとは異なった方法、すなわち、熱対流の生成と磁場生成の2段階の数値計算を行う。

はじめに、不安定熱伝導状態に速度場と温度場の微小攪乱を与え、 $Ta = 1.6 \times 10^6$, $Ra = 3.2 \times 10^4$, $Pr = 1.0$ のもとで時間発展を調べたところ、9対のサイクロン(低気圧性渦)とア

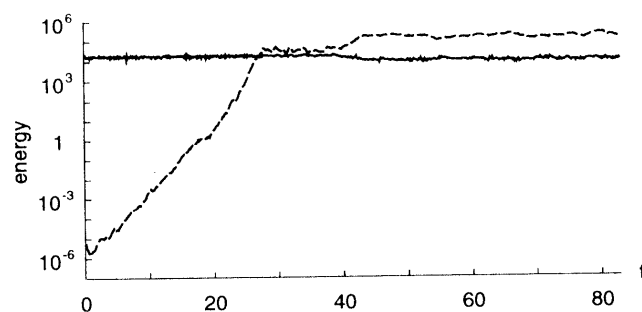


Fig.1 Temporal evolution of kinetic energy $\mathcal{E}_K$ (solid line) and magnetic energy $\mathcal{E}_M$ (dashed line). Time is measured by thermal diffusion time, then the magnetic diffusion time is ten.

ンチサイクロン (高気圧性渦) からなる熱対流場が形成された。この対流場は、レイリー数が臨界値の2倍と大きいため、時間的に大きく変動し、渦度強度も回転軸方向に一樣ではなく、外球面付近で大きな値をもつ。次に、この熱対流場に磁場の極めて小さな攪乱を加え、様々な St 数について時間発展させた。磁場は St 数の減少関数で、 $St = 0.149$ より下まわると増大する。以下では、 $St = 0.1$ の場合について報告する。磁気エネルギーは、はじめ指数関数的に増大し、その後、2つのエネルギー平衡状態が実現される。すなわち、磁気エネルギーが運動エネルギーの2倍程度の第1平衡期と15倍程度の第2平衡期である (Fig.1)。以前は、第2平衡期の対流渦と磁場の回帰現象について報告したが⁴⁾、本稿では、そのような回帰現象におけるエネルギーの流れについて考察する。

内球と外球の間の温度差によって供給されるエネルギーがどのように磁気エネルギーに変換されるのかを調べるために、式(6)の各項を比較する。Fig.2(a)は運動エネルギー方程式の浮力項 Q_B 、ローレンツ力項に負号を付けたもの $-Q_L$ 、粘性力項からの寄与 $-Q_V$ の時間変化を表している。線形期 ($1 < t < 26$) では、 Q_B と $-Q_V$ がほとんど完全に競合し、その差はどの時刻においても数%程度の違いしかない。他方、第1平衡期 ($28 < t < 38$) と第2平衡期 ($43 < t$) では、 Q_L からの寄与が大きく、それぞれ、 Q_B の21%および50%になる。 Q_V はすべての時間で負定値である。Fig.2(b)は、磁気エネルギー方程式の各項の釣り合いを示している。磁力線の伸張によるエネルギーへの寄与 Q_L は、全ての時間帯で抵抗散逸 $-Q_R$ とほとんど完全に釣り合う。しかし、両者の間には、規則的な時間変動のずれが生じている。

Fig.3に、第1平衡期の典型的な時間帯の Q_L と Q_R の時間変化を示す。これら2つの変動の様子はとてもよく似ているが、 Q_L はいつも Q_R より0.03だけ変動の位相が進んでいる。このような変動の時間差は、磁気拡散、粘性拡散、熱拡散のいずれの時間スケールよりもずっと小さく、非線形相互作用を通して大規模スケールから小規模スケールへエネルギーが変換されている結果と解釈すべきものである。また、Fig.2(b)の横軸に見られる非常に小さな揺らぎは、内外球面を横切るエネルギー流速の合計である。とくに注目すべき興味深い点は、Fig.2(b)から読み取れるように、第2平衡期では、ローレンツ力と粘性力からの寄与がほぼ等しいことである。さらにFig.2(a)を参考に比較すると、このことは速度場の散逸と磁場の散逸の間に等分配則が成立していることを示している。

4. まとめ

回転球殻内の対流渦とそれに誘導される磁場の間のエネルギーの流れについて、MHD プシネスク方程式の数値シミュレーションによって詳しく調べた。対流渦と磁場の回帰過程では、対流渦の運動エネルギーは、ダイナモ作用により、その約50%が磁気エネルギーへ、残りの約50%が粘性により散逸し、対流場の準平衡状態が実現される。一方、磁気エネルギーは、対流場からの流入エネルギーとほぼ同量のエネルギーが抵抗として散逸し、磁場の準平衡状態が実現する。この供給と散逸は一定の位相差を保ちながら時間変動し、粘性散逸と抵抗散逸の間には等分配則が成立する。

引用文献

- 1) N. Ishihara & S. Kida : J. Phys. Soc. Jpn. 69 (2000) 1582.
- 2) N. Ishihara & S. Kida : J. Fluid Mech. (in press)
- 3) 木田・石原 : プラズマ・核融合学会誌 77 (2001), 355.
- 4) 石原・木田 : 日本流体力学会講演論文集『ながれ』別冊 20 (2001) 539.
- 5) A. Sakuraba & M. Kono : Phys. Earth Planet. Inter. 111 (1999) 105.
- 6) A. Kageyama & T. Sato : Phys. Rev. E 82 (1999) 5409.

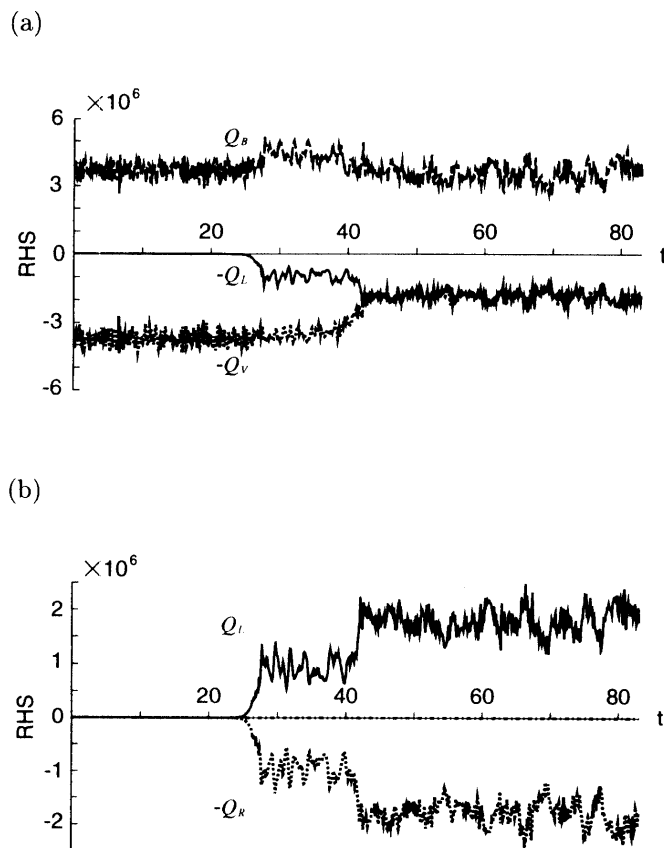


Fig.2 Contributions from the respective terms of the kinetic and magnetic energy equations. (a) Kinetic energy: Q_B , buoyancy; $-Q_L$, minus Lorentz; $-Q_V$, minus viscous. (b) Magnetic energy: Q_L , Lorentz; $-Q_R$ minus resistive. A small fluctuating quantity seen on the abscissa denotes the sum of the energy fluxes across the outer and inner boundaries.

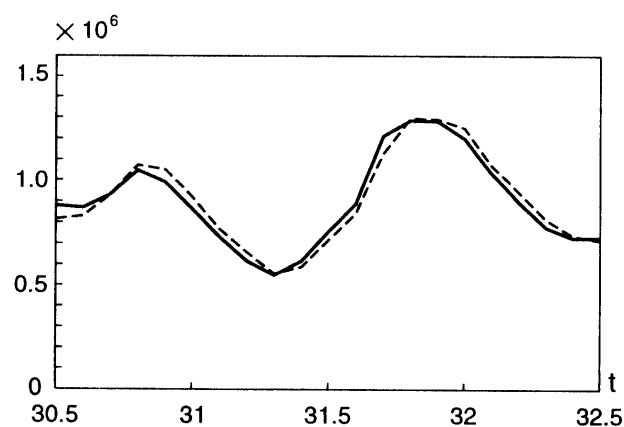


Fig.3 Phase lag between the Lorentz and resistive terms in the magnetic energy equation. Temporal variations of Q_L and Q_R are respectively plotted with a solid and a broken line for $30.5 \leq t \leq 32.5$, in the first-equilibrium period. The phase of variation of the former leads the latter by 0.03 time units.