日本流体力学会年会 2003 講演論文集

B-234

乱流における圧力項とスケーリング指数

Pressure Term and Scaling Exponent in Homogeneous Turbulence

○ 後藤　俊幸（名工大），中野　徹 (中央大)

Toshiyuki GOTOH* and Tohru NAKANO**

* Nagoya Inst. of Tech. Gokiso-cho, Showa-ku, Nagoya 466-8555, Japan,

** Chuo University, Tokyo, Japan

There is very limited knowledge of the kinematical relations for the velocity structure functions higher than three. Instead, the dynamical equations for the structure functions of the velocity increment are obtained from the Navier Stokes equation. These equations contain the correlation between the velocity and pressure gradient increments. We have examined these dynamical relations by using direct numerical simulation data at very high resolution at large Reynolds numbers, and found that the contribution of the pressure term is important to the dynamics of the longitudinal velocity with large amplitudes. The pressure term is examined from the view point of the conditional average which is modeled under the generalized Bernoulli theorem. The role of the pressure term on the scaling exponent is discussed.

非圧縮流体 ($\rho=1$) の理想化された一様等方性乱流においては，２次および３次の縦相関関数と横相関関数の間には次のような関係式がある.[1]

$$S_{0,2}(r) = S_{2,0}(r) + \frac{r}{2}\frac{d}{dr}S_{2,0}, \tag{1}$$

$$S_{1,2}(r) = \frac{1}{6}S_{3,0}(r) + \frac{r}{6}\frac{d}{dr}S_{3,0}(r), \tag{2}$$

ここで，

$$S_{m,n}(r) = \langle U^m V^n \rangle, \tag{3}$$

は縦速度差 $U=(\boldsymbol{u}(\boldsymbol{x}+\boldsymbol{r})-\boldsymbol{u}(\boldsymbol{x}))\cdot\boldsymbol{r}/r$ と横速度差 V との相関関数を表す．上の (1), (2) はともに，一様性と等方性および非圧縮性という条件の下で導かれている．しかし，４次以上の相関関数については，上記のような，異なる種類の相関関数を直接結びつけるような関係式は知られていない．たとえば，$S_{4,0}, S_{2,2}, S_{0,4}$ については，その１次結合が圧力の２次モーメントに関係づけられることが知られているだけである[2] このことは，速度差の構造関数の４次以上のスケーリング指数 $\zeta_{p,q}(S_{p,q}\propto r^{\zeta_{p,q}})$ について，明確な関連が見えないことを意味している．

高次の構造関数についての方程式は，Navier-Stokes 方程式から導かれる.[3-6] たとえば，定常状態にある等方性乱流について，その小さなスケールでの $S_{2n,0}$ の方程式は

$$\frac{dS_{4,0}}{dr} + \frac{2}{r}S_{4,0} = \frac{6}{r}S_{2,2} - 3\langle \delta p_x U^2 \rangle, \tag{4}$$

$$\frac{dS_{6,0}}{dr} + \frac{2}{r}S_{6,0} = \frac{10}{r}S_{4,2} - 5\langle \delta p_x U^4 \rangle, \tag{5}$$

$$\cdots\cdots$$

と表される．ただし，$\delta p_x = p_x(\boldsymbol{x}+r\boldsymbol{e}_x) - p((\boldsymbol{x})$ であり、粘性項の寄与は無視してある．注目すべきは，$S_{2m,2n}$ の方程式は閉じていなくて，他の種類の構造関数と圧力項からの寄与があると言うことである．Yakhot[4] と Kurien and Sreenivasan[7] らは上の式において，少なくとも低次では圧力項の寄与は大きくないとしてこれを無視した議論を行った．しかし，圧力項は流体を非圧縮性たらしめるものであり，これをはずすことは適当でない．１次元のバーガース乱流のモデルからも類推されるように，縦速度差の方程式を３次元の場合にも書き下すと，非線形項はショックを作りだす働きを持つ．しかし，圧力がこれに対抗してショックの形成を妨げる．このことからも分かるように，圧力項の存在は重要である．

我々は定常乱流の DNS を行い[8]，そこから上記方程式の右辺と左辺を定量的に比較した.[11] 図１は方程式 (4) の左辺と圧力項のない場合とある場合の右辺を比較したものである．r が λ（Taylor のマイクロスケール）と L（積分長さ）の間にある時，曲線はほぼ直線に近く，圧力項を落としたときには２本の曲線はほぼ並行である．しかし違いがある．この差は左辺の約 20% である．高次へ行くに従いその差は大きくなる．一方，圧力項を取り込むと，両者の曲線は慣性領域でほとんど重なる．このことは，圧力項の効果は４次のレベルでも無視できないこと，$S_{2n,0}$ については粘性項からの寄与は無視できることを示している．

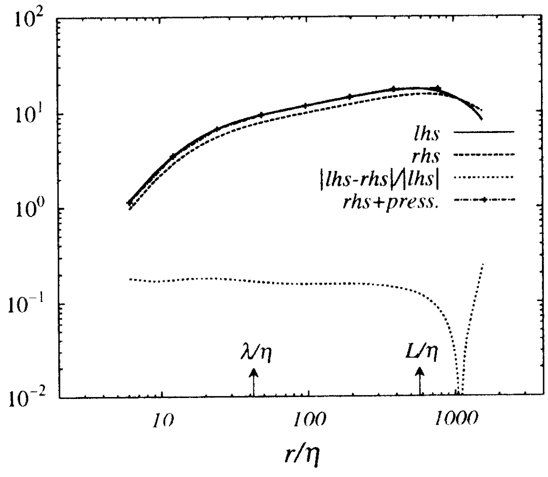

Fig.1 $\frac{\partial S_{4,0}}{\partial r} + \frac{2}{r}S_{4,0} = \frac{6}{r}S_{2,2}\ \ (-3\langle \delta_r p_x U^2 \rangle)$.

さて, 圧力項の寄与を見るとき, 圧力項の速度差を与えた時の条件付き平均値

$$J(U,r) = \langle \delta p_{,x} | U, r \rangle \tag{6}$$

を考えるのは興味深い.[9,10] これを用いると, 式(4)や(5)に現れる圧力項は, $P(U,r)$ を U の確率密度関数とすると,

$$\left\langle (\delta p_{,x}) U^{2n-2} \right\rangle = \int_{-\infty}^{\infty} \langle \delta p_{,x} | U, r \rangle U^{2n-2} P(U,r) dU \tag{7}$$

と表される. この条件付き平均値 J が U のどのような関数であるかが問題である. 思い浮かぶのは, U の2次関数である. これは, (i) 圧力の方程式は, 速度勾配の2次の非同時項を持つポアッソン方程式で与えられること, 即ち, $u' = \gamma u$ の時 $p' = \gamma^2 p$ であること, (ii) ベルヌーイの定理では p と u^2 がバランスしている, などの理由による. 後者については, もう少し物理的議論ができる.[11]

乱流中に1本の渦管を考える. これをとりまく仮想的な円柱面 Π_1 を考える. この面上では, 速度ベクトルは円周方向にほぼ向いており渦度ベクトルはほぼ渦管の軸方向を向いている. 従って, ベクトル $\boldsymbol{u} \times \boldsymbol{\omega}$ は Π_1 にほぼ垂直であるから, Π_1 はベルヌーイ面である. ベルヌーイ面上では $p(\boldsymbol{x}_1) + \rho \boldsymbol{u}^2(\boldsymbol{x}_1)/2 = H_1$ であり, H_1 はベルヌーイ定数である. この勾配をとると, $-\nabla_1 p_1 = \boldsymbol{u}_1 \cdot \nabla_1 \boldsymbol{u}_1$ となる. ここで密度 ρ は定数とする. Π_1 の近傍にもう一つ同様のベルヌーイ面 Π_2 を考え, 同様な操作を行い $-\nabla_2 p_2 = \boldsymbol{u}_2 \cdot \nabla_2 \boldsymbol{u}_2$ を得, 前の方程式からこれを差し引く. そして, $\boldsymbol{X} = (\boldsymbol{x}_1 + \boldsymbol{x}_2)/2$, $\boldsymbol{r} = \boldsymbol{x}_1 - \boldsymbol{x}_2$ という座標を導入すると

$$\begin{aligned} -\delta \nabla p(\boldsymbol{X}, \boldsymbol{r}) = &\boldsymbol{V}(\boldsymbol{X}, \boldsymbol{r}) \cdot \nabla_{\boldsymbol{X}} \delta \boldsymbol{u}(\boldsymbol{X}, \boldsymbol{r}) \\ &+ \delta \boldsymbol{u}(\boldsymbol{X}, \boldsymbol{r}) \cdot \nabla_{\boldsymbol{r}} \delta \boldsymbol{u}(\boldsymbol{X}, \boldsymbol{r}), \end{aligned} \tag{8}$$

を得る. ここで $\boldsymbol{V}(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{r}) = (\boldsymbol{u}(\boldsymbol{x}_1) + \boldsymbol{u}(\boldsymbol{x}_2))/2$ は $\boldsymbol{X}$ と $\boldsymbol{r}$ の $\delta \boldsymbol{u}$ に比べてゆっくりと変化するベクトルである. もし, ここで

$$\nabla_{\boldsymbol{X}} \delta \boldsymbol{u}(\boldsymbol{X}, \boldsymbol{r}) \propto \delta \boldsymbol{u}(\boldsymbol{X}, \boldsymbol{r}), \ \nabla_{\boldsymbol{r}} \delta \boldsymbol{u}(\boldsymbol{X}, \boldsymbol{r}) \propto \delta \boldsymbol{u}(\boldsymbol{X}, \boldsymbol{r}) \tag{9}$$

と解釈すると, 方程式(8)は $\delta \boldsymbol{u}$ についての2次方程式となる. さらに, ベルヌーイ定数は各ベルヌーイ面で異なる値を持つであろうから, 場全体では, $\delta \boldsymbol{u}$ によらない寄与が加わるであろうと予想できる. このように考えると, 最終的に

$$-\delta \nabla p = \boldsymbol{A}_0 + \boldsymbol{A}_1 \delta \boldsymbol{u} + \boldsymbol{A}_2 \delta \boldsymbol{u} \delta \boldsymbol{u} \tag{10}$$

という形になる. ここで $\boldsymbol{A}_i$ は $\boldsymbol{X}$ と $\boldsymbol{r}$ のあるテンソル関数である. 一様性により, $\boldsymbol{X}$ について平均すると $\delta \boldsymbol{u}$ と $\boldsymbol{r}$ の関数としての条件付き平均値 $-\langle \delta \nabla p | \delta \boldsymbol{u}, \boldsymbol{r} \rangle$ が得られる. このような議論から $J(U,r)$ は

$$-\langle \delta p_{,x} | U, r \rangle = a_2(r) U^2 + a_1(r) U + a_0(r) \tag{11}$$

とおくことができよう. 図2は, $\mathcal{R}_\lambda = 460$ における J のグラフである. 2次曲線によるあてはめは妥当であると考えられる.

このようなモデル(11)を用いると, $S_{2n,0}$ に対する式は以下のように表される.

$$\frac{dS_{2n,0}}{dr} + \frac{2}{r} S_{2n,0} = \frac{2(2n-1)}{r} S_{2n-2,2} + (2n-1) \frac{\hat{a}_2(r)}{r} S_{2n,0}, \tag{12}$$

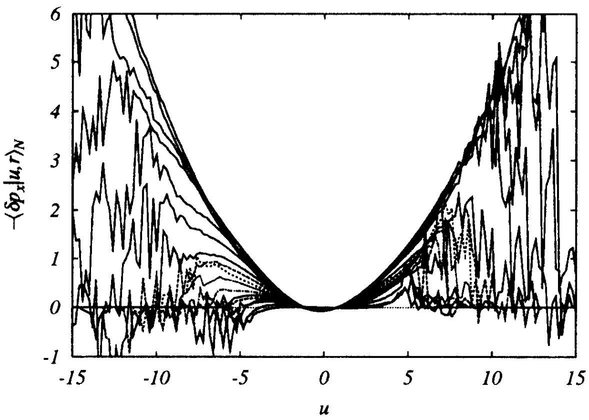

Fig.2 $-\langle \delta p_x | u, r \rangle_N$ for various r/η ($r_{min}/\eta = 3$ and $r_{max}/\eta = 1565$.). As the separation r increases the curvature becomes smaller.

ここで $\hat{a}_2(r) > 0$ は一般には r の関数であるが, 圧力項が意味を成すためには $\hat{a}_2(r)$ は定数であることが示される. 詳細は講演で行うが, この式から得られる帰結は, $\zeta_{2n,0} = \zeta_{2n-2,2}$ である. 即ち, $S_{2n,0}$ と $S_{2n-2,2}$ のスケーリング指数は等しい.[11] また, $\zeta_{2n,0}$ は $2n$ の線形関数であることが示される.

この研究を行うにあたり理化学研究所計算機センターおよび名古屋大学大型計算機センターより多大の御支援をいただきました. この研究の一部は日本学術振興会科学研究費補助金(C-2, 12640118)によりなされました. ここに記してお礼申し上げます.

1) A. S. Monin and A. M. Yaglom *Statistical Fluid Mechanics.* Vol.II, (MIT press, Cambridge 1975).

2) R. J. Hill and O. N. Boratav, Phys. Fluids. **13**, (2001) 276.

3) R. J. Hill, J. Fluid Mech. **353** (1997) 67.

4) D. Fukayama, T. Oyamada, T. Nakano, T. Gotoh and K. Yamamoto, J. Phys. Soc. Jpn. **69**, (2000) 701.

5) V. Yakhot, Phys. Rev. E **63**, (2001) 026307.

6) R. J. Hill, J. Fluid Mech. **434**, (2001) 379.

7) S. Kurien and K. R. Sreenivasan, Phys. Rev. E **64**, (2001) 056302.

8) T. Gotoh, D. Fukayama, and T. Nakano, Phys. Fluids **14**, (2002) 1065.

9) T. Gotoh, ITP lecture notes of program on Hydrodynamic Turbulence, (2000).

10) G. Boffeta, M. Cencini, and J. Davoudi, Phys. Rev. E **66**, (2002) 017301.

11) T. Gotoh, and T. Nakano, To appear in J. Stat. Phys. (2003).