

Probability density function of turbulent velocity fluctuations in rough-wall boundary layer

○毛利英明（気象研），高岡正憲（同志社工），堀晃浩，川島儀英（気象環境サービス）

Hideaki MOURI*, Masanori TAKAOKA**, Akihiro Hori*** and Yoshihide KAWASIMA***

*Meteorological Research Institute, Nagamine 1-1, Tsukuba 305-0052, Japan; hmouri@mri-jma.go.jp

**Department of Mechanical Engineering, Doshisha University, Kyotanabe, Kyoto 610-0321, Japan

***Meteorological and Environmental Service, Inc., Tama, Tokyo 206-0012, Japan

The probability density function of single-point velocity fluctuations in turbulence is studied systematically using Fourier coefficients in the energy-containing range. In ideal turbulence where energy-containing motions are random and independent, the Fourier coefficients tend to Gaussian and independent of each other. Velocity fluctuations accordingly tend to Gaussian. However, if energy-containing motions are intermittent or contaminated with bounded-amplitude motions such as wavy wakes, the Fourier coefficients tend to non-Gaussian and dependent of each other. Velocity fluctuations accordingly tend to non-Gaussian. These situations are found in our experiment of a rough-wall boundary layer.

1. はじめに

速度変動の1点分布は乱流を特徴づける基本的な統計量だが、その形を決める機構について確かなことは分かっていない。本研究では風洞を用いて境界層乱流の速度場を測定し、速度変動のフーリエ係数との関係に注目して、乱流の1点速度分布を系統的に調べた。

2. ガウス分布の起源

範囲 $0 \leq x \leq L$ における乱流の速度変動 $u(x)$ を考える。速度変動をフーリエ展開すると

$$u(x) = \sum_{n=1}^{\infty} a_n \cos\left(\frac{2\pi nx}{L}\right) + b_n \sin\left(\frac{2\pi nx}{L}\right).$$

測定を何回も繰り返して速度変動やフーリエ係数 a_n と b_n の確率分布を求めるとする。

速度変動に寄与するのはエネルギー保有域にあるフーリエ係数である。理想的な乱流ではエネルギー保有域が乱雑・独立に分布しているから、これらのフーリエ係数の和に対し中心独立定理を適用することが出来、速度分布はほぼ Gaussian である[1]。

エネルギー保有域が乱雑・独立に分布している場合、フーリエ係数の分布もほぼ Gaussian である[2,3]。係数 a_n は

$$a_n = \frac{2}{L} \int_0^L u(x) \cos\left(\frac{2\pi nx}{L}\right) dx \\ = \frac{2}{L} \left(\int_0^{L/m} \dots dx + \int_{L/m}^{2L/m} \dots dx + \dots + \int_{(m-1)L/m}^L \dots dx \right)$$

と展開できる ($1 \ll m \ll n$)。幅 L/m が相関長より十分に大きければ個々の積分 $\int_0^{L/m} \dots dx$, $\int_{L/m}^{2L/m} \dots dx$ は互いに独立で振幅が同じ確率変数と看做することができる。中心極限定理を適用すれば a_n の分布はほぼ Gaussian ということになる。この議論は $n \sim 1$ に対するフーリエ係数には当てはまらない。しかしデータ長 L が十分に大きければ、このようフーリエ係数は速度変動に寄与しない。全てのフーリエ係数がガウス分布に従うと差し支えない。

最初の式において、ごく少数のフーリエ係数の寄与が卓越する場合には、中心極限定理を適用することが出来ない[4]。例えば、一様定常乱流の直接数値計算では、最小波数において外力が加えられており、これに伴う運動が卓越しているから、速度分布は必ずしも Gaussian とならない。しかし通常の乱流のエネルギー保有域ではスペクトルは比較的平坦で

あり、中心極限定理を適用することが出来る。（以前の我々の研究では、乱流のフーリエ係数の和に対し中心極限定理は常に適用不可能としたが[2,3] これは誤りであった。）

確率変数の単純和の分布のテイルに対し、中心極限定理は何の情報も与えない。フラットネス等の統計的指標は主に分布のコアの領域を反映するが、ガウス分布と甚だしく異なるテイルが存在する可能性があり、この場合には統計的指標もガウス分布と異なる値をとる。振幅が有界区間に制限されているような信号、例えば $u(x) \propto \sin(x)$ が混在している場合、乱流速度変動の確率分布のテイルの振幅はガウス分布に比べ小さくなる傾向がある(sub-Gaussian)。逆に間欠的な乱流では、確率分布のテイルの振幅はガウス分布に比べ大きくなる傾向がある(hyper-Gaussian)。

フーリエ係数は速度変動の線形関数だから、前者が sub-或いは hyper-Gaussian である場合、後者も sub-或いは hyper-Gaussian になる。この関係は、フーリエ係数が互いに相関を持つような場合でも相関が弱ければ、成立すると期待できる。

3. 風洞実験

気象研究所大型風洞で粗面境界層乱流の実験を行った。（風向方向を x 、これに垂直な水平方向を y 、鉛直方向を z とする。対応する流速成分は u, v, w ）粗度として煉瓦を用い全床面に $\delta x = 0.7 \text{ m}$ $\delta y = 0.8 \text{ m}$ の間隔で配置した。風洞風速は 20 m/sec とした。

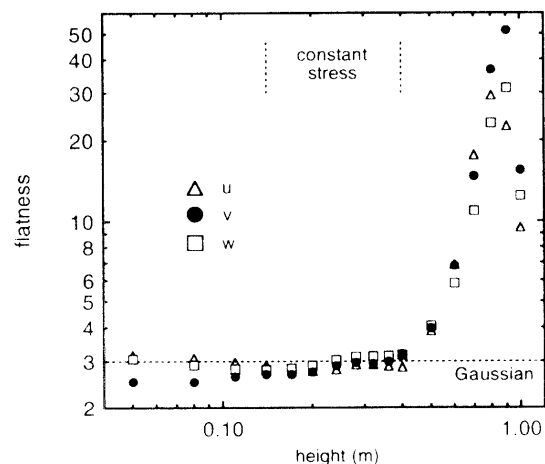


Fig. 1

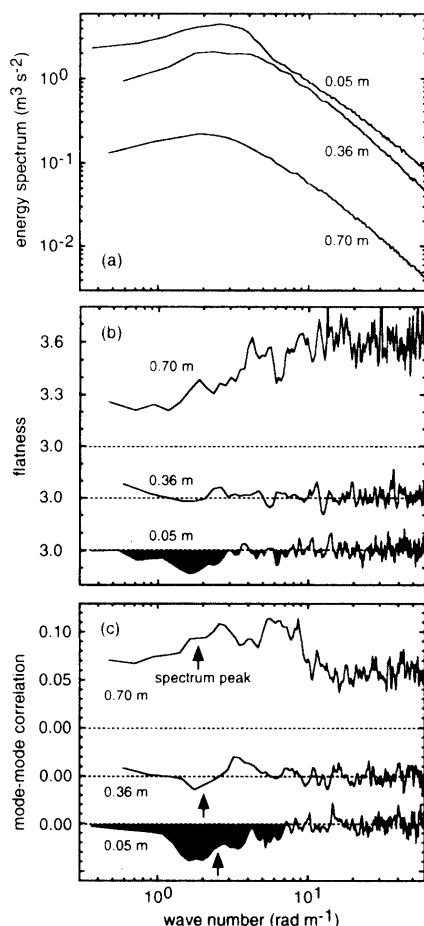


Fig. 2

測定点は粗度面の風上端から風下に 10m 床からの高さ 0.05~1.00 m X 型熱線流速計により, u, v 或いは u, w 成分の同時測定を行った. サンプルング周波数は 20~50kHz. データ長は 8×10^6 点もしくは 32×10^6 点であった.

境界層の 99% 厚さは 0.68m 排除厚さは 0.17m 高さ 0.14~0.40m の領域は shear-stress 速度 $\langle -uw \rangle$ が一定の constant-stress 層である.

4. 結果と考察

図 1 にフラットネス $F_u = \langle u^4 \rangle / \langle u^2 \rangle^2$, F_v , F_w を示す. シアの影響の無い v 成分 (黒丸) に注目すると, 高さが大きくなるに伴い, 確率分布は sub-Gaussian ($F_v < 3$), Gaussian ($F_v = 3$), hyper-Gaussian ($F_v > 3$) と変化する.

図 2a に高さ 0.05, 0.36, 0.70m における v 成分のスペクトルを示す. 図 2b にフーリエ係数に関するフラットネス $F_n = \langle a_n^4 \rangle / \langle a_n^2 \rangle^2$ を示す. 図 2c にモード間相関 $C_{nn'}$ を示す:

$$C_{nn'} = \frac{\langle a_n^2 a_{n'}^2 \rangle - \langle a_n^2 \rangle \langle a_{n'}^2 \rangle}{\sqrt{\langle a_n^4 \rangle - \langle a_n^2 \rangle^2} \sqrt{\langle a_{n'}^4 \rangle - \langle a_{n'}^2 \rangle^2}} \quad (n \neq n').$$

ここで n はスペクトルのピークにおける波数に対応. 全データを長さ 2^{15} 点の小データに分割し, 個々の小データにフーリエ変換を施し, 全ての小データに関して平均をとった.

高さ 0.36m で速度変動は Gaussian である (図 1). 全波数にわたりフラットネス F_n は Gaussian であり (図 2b), モード間相関 $C_{nn'}$ は存在しない (図 2c). つまりフーリエ係数

は Gaussian かつ互いに独立である. 高さ 0.36m は constant-stress 層の上端に位置する. 様々な強さ・大きさの渦が乱雑・独立に流速計感部を通過していると考えられる.

高さ 0.05m で速度変動は sub-Gaussian である (図 1). スペクトルのピーク周辺で, フラットネス F_n は sub-Gaussian (図 2b). このフーリエ係数の sub-Gaussian 性は速度変動の sub-Gaussian 性に関連づけられる. 前者は後者ほど顕著でないが, スペクトルのピーク周辺ではモード間相関 $C_{nn'}$ が負になる (図 2c). このこともまた速度変動の sub-Gaussian 性に関連づけられる. 仮にスペクトルのピークにおけるフーリエ係数が大きな振幅を持ったとしても, その効果は周囲の波数のフーリエ係数が小さな振幅を持つことにより相殺される傾向にある.

高さ 0.05m はいわゆる粗度層にあるため, 乱流に粗度の wavy wakes が混入していると考えられる. これら wavy wake の振幅が有界区間内に抑えられているなら, 速度変動・フーリエ係数の sub-Gaussian 性が説明できる. フーリエ係数が互いに独立でないことより, wavy wakes は何らかの空間構造を持っていると考えられる.

高さ 0.70m で速度変動は hyper-Gaussian である (図 1). 全波数においてフラットネス F_n は hyper-Gaussian であり (図 2b), モード間相関 $C_{nn'}$ は正 (図 2c). スペクトルのピークにおけるフーリエ係数が大きな振幅を持った場合, その効果は周囲の波数のフーリエ係数が大きな振幅を持つことにより増幅される傾向にある.

高さ 0.70m は境界層の上端に位置する. ここでは乱流は間欠的である. 下方から輸送された強い渦のみが存在し, これらが間欠的に流速計感部を通過している. このため速度変動・フーリエ係数は hyper-Gaussian となる. また空間構造の存在により, フーリエ係数間の相関が説明される. このような間欠性は, 見方を変えれば, 乱流への層流成分の混入と考えることができる.

5. まとめ

エネルギー保有渦が乱雑・独立に存在しているような理想的な乱流では, 速度変動は Gaussian となる. しかし乱流に有界振幅の wavy wakes や層流成分が混入している場合, 速度変動は Gaussian でない.

Sreenivasan & Dhruva [5] は地上 3.5m の大気境界層において $F_u = 2.66$ を得た. 詳細な測定状況は我々には不明だが, この高度における気流が地表面の粗度の影響を受けていた可能性を指摘しておきたい. その場合, 観測された速度変動の sub-Gaussian 性は (我々の粗度境界層の場合と同じく) 有界振幅の wavy wakes により説明出来よう.

引用文献

- 1) G. K. Batchelor: *The Theory of Homogeneous Turbulence* (Cambridge University Press, 1953)
- 2) H. Mouri, M. Takaoka, A. Hori, & Y. Kawashima: Phys. Rev. E 65 (2002) 056304
- 3) 毛利英明, 高岡正憲, 堀晃浩, 川島儀英: 流体力学会 2002 講演論文集 (2002) 240.
- 4) J. Jimenez: J. Fluid Mech. 376 (1998).
- 5) K. R. Sreenivasan & B. Dhruva: Prog. Theor. Phys. Suppl. 130 (1998) 103