

We investigate the dynamics of particle pairs in two-dimensional free convection turbulence (FC2D) by direct numerical simulation. In entropy cascade region, the growth of pair separation  $r$  is expected  $\langle r^2(t) \rangle \propto t^5$  according to the Bolgiano-Obukhov scaling. We obtained the results supporting this scaling with exit-time statistics. We show that the dynamics of particle pairs are classified into two types: stretching along fine coherent structures of T-Vorticity (S-region) and trapping by eddies associated with the scales of the order of pair separations (T-region), and the crossover time separating S- and T-Region  $T_{div}^E(\rho)$  follows a scaling law  $T_{div}^E(\rho) \propto (\rho - 1)^{-0.57}$ , where  $\rho$  is one of parameters in exit-time statistics. Furthermore, our results also suggest that the time evolution of pair separations in the T-region is described by the Richardson's diffusion equation.

## 1. はじめに

乱流の高い輸送・混合能力を特徴づける方法の一つに、相対粒子拡散がある。乱流相対粒子拡散は異常拡散を示すため理論的にも非常に興味深い現象であり、古くから多くの研究が行われてきた。相対拡散には粒子間相対距離程度のスケールをもつ流れ場の運動が主に影響を与えるため、相対拡散を調べることで乱流中に混在している様々なスケールの運動を Lagrange 的に追跡・分解して見ることができる。近年、流れ場の何らかのコヒーレンスと乱流相対拡散との間に関係があることが指摘されており、流れ場の構造と異常拡散の機構との関係は大変興味深い問題となっている<sup>4,6)</sup>。

本報では、2次元自由熱対流乱流上での相対粒子拡散を exit-time 統計を用いて調べることによって、粒子対の運動を分類することを目的とする。

## 2. 2次元自由熱対流乱流 (FC2D 乱流)

### 2.1 基礎方程式

2次元自由熱対流乱流の基礎方程式は、次の2次元ブシネスク方程式である:

$$\frac{D\mathbf{u}}{Dt} = -\frac{1}{\rho_0}\nabla p + \nu\Delta\mathbf{u} + \alpha g T \mathbf{e}_y, \quad \nabla \cdot \mathbf{u} = 0, \quad (1)$$

$$\frac{DT}{Dt} = \kappa\Delta T. \quad (2)$$

速度場、温度場、圧力場をそれぞれ  $\mathbf{u}(\mathbf{x}, t)$ ,  $T(\mathbf{x}, t)$ ,  $p(\mathbf{x}, t)$  とした。 $\nu, \kappa$  はそれぞれ動粘性係数、熱拡散係数である。 $\mathbf{e}_y$  を  $y$  軸方向の単位ベクトル、 $g$  を重力加速度とする。平均温度勾配がないので、温度場へ外力を注入することにより乱流を維持する。速度場は温度場から浮力項を通して励起される。また、この系はバロクリックなので渦度は保存されない。

FC2D 系は熱対流系としては現実性に欠けるが、後に述べるように FC2D 乱流は3次元 Navier-Stokes (NS3D) 乱流と類似の性質を持つと考えられるので、ここでは FC2D 乱流を NS3D 乱流の一つのモデルとして考える。

### 2.2 Bolgiano-Obukhov スケーリング

FC2D 系では二乗温度揺らぎ  $S = \frac{1}{2} \int T^2 d\mathbf{x}$  が保存量であり、この量を便宜的にエントロピーと呼ぶ。エントロピーの低波数側から高波数側へのカスケードを仮定すると、エントロピー散逸率  $\epsilon_\theta$  と浮力項の係数  $\alpha g$  を用いて次元解析することにより、慣性領域におけるエネルギーベクトル  $E(k)$  とエントロピーベクトル  $S(k)$  は以下のように決まる:

$$E(k) = C_E \epsilon_\theta^{2/5} (\alpha g)^{4/5} k^{-11/5}, \quad (3)$$

$$S(k) = C_S \epsilon_\theta^{4/5} (\alpha g)^{-2/5} k^{-7/5}. \quad (4)$$

$$\epsilon_\theta = \langle \epsilon_\theta(\mathbf{x}, t) \rangle = \kappa \langle \nabla T \cdot \nabla T \rangle \quad (5)$$

ここで  $C_E, C_S$  は普遍定数と考えられる<sup>1,2)</sup>。これらは3次元 Navier-Stokes 乱流における Kolmogorov のカスケード理

論 (K41) に対応するものであり、Bolgiano-Obukhov スケーリングと呼ばれる。

FC2D 乱流での Richardson 則に対応するスケーリング則と Richardson の拡散方程式は次のように書ける:

$$\langle r^p \rangle = g_p \epsilon_\theta^{p/2} (\alpha g)^p r^{5p/2}, \quad (6)$$

$$\frac{\partial p(\mathbf{r}, t)}{\partial t} = \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} r \{ k_0 \epsilon_\theta (\alpha g)^2 r^{8/5} \} \frac{\partial}{\partial r} p(\mathbf{r}, t). \quad (7)$$

ここで  $g_p, k_0$  は普遍定数と考えられる。 $p(\mathbf{r}, t)$  は時刻  $t$  における粒子間相対距離  $\mathbf{r}$  の確率密度関数 (PDF) である。

### 2.3 微細秩序構造

$T$  渦度  $\chi(\mathbf{x}, t) = (\frac{\partial T}{\partial y}, -\frac{\partial T}{\partial x})$  という物理量を導入すると、 $\chi$  の発展方程式は、3次元での渦度方程式と同形になる。シミュレーションで得られた場の  $T$  渦度分布を調べると、幅は  $\eta_\theta$  の10倍程度で積分長程度の流さを持つ線状の  $T$  渦度集中領域が見られる。この線状の  $T$  渦度集中領域のことを以後微細秩序構造と呼ぶ。

微細秩序構造は局所的にバーガース  $T$  渦層で近似できることがわかっている。従って NS3D 乱流におけるワームと FC2D 乱流における微細秩序構造は類似のものであり、この二つの系のダイナミクスはある程度似たものであると予想されている<sup>3)</sup>。

### 3. 数値計算

乱流場は式 (1), (2) を直接数値計算 (DNS) して得た。空間方向は擬スペクトル法、時間方向は1次精度ルンゲ・クッタ法を用い、 $x, y$  方向とも周期境界条件のもとで解いた。ここでは一般性を失うことなく  $\alpha g = 1$  とおける。また、簡単のため  $Pr = 1$  とした。粒子追跡は、1次精度ルンゲ・クッタ法を用いて行った。用いたパラメータの詳細を次の表にまとめて示す。

$N$	モード数	$1024^2$
$\Delta x$	メッシュ幅	$\pi/512$
$\eta_\theta$	温度 Kolmogorov 長	$0.96\Delta x$
$\lambda_\theta$	温度 Taylor 長	$7.36\Delta x$
$Ra_\lambda$	Rayleigh 数	2490

### 4. exit-time(fixed-scale) 統計

慣性領域の有限性による問題を克服するために、空間スケールを固定した統計 (exit-time 統計) を考える<sup>4,5)</sup>。粒子間相対距離  $r$  が初めて  $\delta$  になる時刻を  $t(\delta)$  とするとき、 $T(\delta; \rho) = t(\rho\delta) - t(\delta)$  を exit-time と呼ぶ。 $T(\delta; \rho)$  の PDF を  $P_E(T; \delta, \rho)$  とする。exit-time 統計で現象を見ることは、空間スケール  $\delta$  を持つ粒子対の運動を  $\rho$  程度平均化して見ることを意味する。

Richardson 則 (式 (6)) を exit-time を用いて書き直すと次のようになる:

$$\langle T(\delta; \rho) \rangle = \int T P_E(T; \delta, \rho) dT = \frac{\rho^{2/5} - 1}{k_0^{1/5} (\alpha g)^{2/5} \epsilon_\theta^{1/5}} \delta^{2/5}. \quad (8)$$

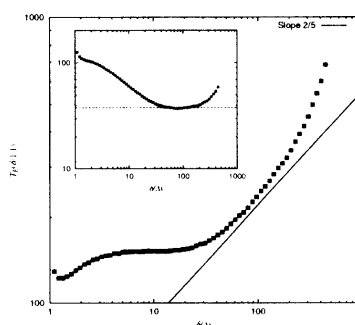


図 1: exit-time のスケール依存性。直線は Richardson 則を表す。挿入図は Richardson 則で補正したものである。

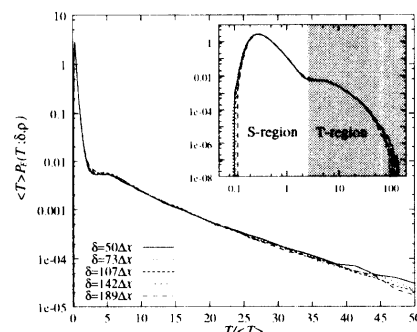


図 2: exit-time PDF を用いたダイナミクス分類。exit-time PDF の最大値付近を領域 S、テイルを領域 T と定義する。

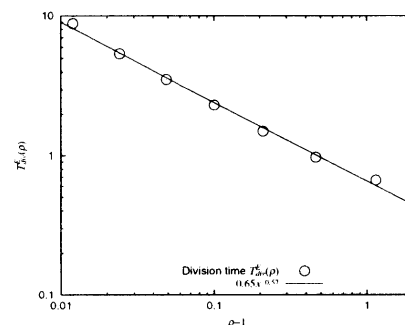


図 3: 領域 S, T の境界時間  $T_{div}^E(\rho)$ 。実線は fitting によって得られた直線。 $\rho - 1$  と  $T_{div}^E$  の間に冪則が成立している。

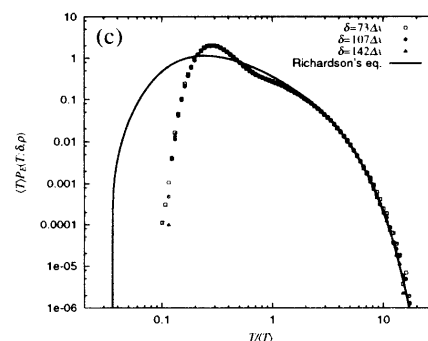
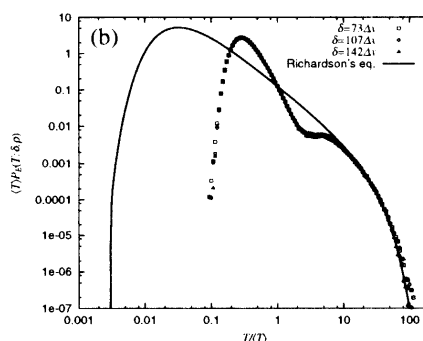
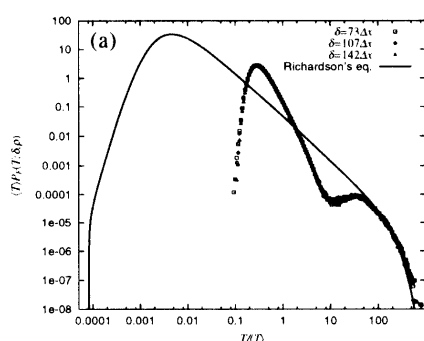


図 4: Richardson の拡散方程式による exit-time PDF と DNS による exit-time PDF の比較。(a),(b),(c) はそれぞれ  $\rho = 1.1^{1/8}, 1.1, 1.1^8$  である。テイルは良く一致しているが、最大値付近 (領域 S) は全く異っている。

exit-time の計算は、 $\delta_n = \rho^n \delta_0$  という閾値を設けて行う。

## 5. 結果と結論

慣性領域における exit-time PDF を平均 exit-time  $\langle T \rangle$  でスケールしたものを図 2 に示す。慣性領域において平均 exit-time が Richardson 則 (式 (8)) に従うことは確認されている (図 1) ので、図 2 において PDF の形が一つに重なっていることは、粒子対が Richardson 則に従って自己相似的な拡散をしていることを意味する。尚、図 1.2 は  $\rho = 1.1$  として計算したものである。

exit-time PDF の形はピーク付近と指数関数的な長いテイルとに分かれている。この二つの領域を、それぞれ領域 S, T と呼び、二つの領域の境目  $T_{div}^E(\rho)$  を exit-time PDF の二階微分が最大となる点として定義する:

$$\left. \frac{\partial^2 \log\{\langle T \rangle P_E(T/\langle T \rangle)\}}{\partial \{\log(T/\langle T \rangle)\}^2} \right|_{T=T_{div}^E} = \max_T \left[ T \frac{\partial}{\partial T} \left( \frac{T}{P_E} \frac{\partial P_E}{\partial T} \right) \right]. \quad (9)$$

図 3 にこの  $T_{div}^E$  の  $\rho$  依存性を示す。 $T_{div}^E$  と  $\rho - 1$  の間に  $T_{div}^E(\rho) \approx C_{div}(\rho - 1)^{-0.57}$  なる冪則が成立している様子がえられる ( $C_{div} = 0.65$ )。一方、exit-time PDF の最大値を与える  $\langle T \rangle$  で規格化された exit-time は、 $T_{max}^E \approx 0.29$  でほぼ一定である。従って、 $\rho$  を大きくしていくと、ある臨界の値  $\rho_c$  で領域 S は領域 T に飲み込まれてしまうと予想される。本研究で得られたパラメータによれば、 $\rho_c \approx 4.8$  である。

$\langle T \rangle$  で規格化された exit-time PDF を、Richardson の拡散方程式 (式 (7)) から数値的に求めた exit-time PDF に重ねたものが図 4 である。この図を見ると領域 T において二つの曲線はほぼ一致しており、領域 T にある粒子対の統計 (分布の発展) は

Richardson の拡散方程式で記述することができると言える。

一方、領域 S では二つの PDF の形は大きく異っている。領域 S の形は場の実効ストレインの PDF と対応が付き (図は省略)、粒子対の運動は  $T$  過度の微細秩序構造に沿ったストレッチングであることを示唆する結果を得ていることから、領域 S では微細秩序構造の影響によって粒子対の統計は Richardson の拡散方程式による予測からずれているものと考えられる。

また、領域 S が見えなくなる臨界の  $\rho_c$  の存在は、微細秩序構造の影響が見えなくなる臨界の平均化サイズ (平均化倍率) が存在することを意味する。 $\rho \gg \rho_c$  であれば、相対拡散は全領域において Richardson の拡散方程式で記述されると予想される。

## 引用文献

- 1) A.Monin and A.Yaglom, *Statistical Fluid Mechanics*(MIT Press, Cambridge, Mass., 1975), Vol.2.
- 2) S.Toh and E.Suzuki (1994), *Phys. Rev. Lett.*, 73, pp.1501- 1505.
- 3) S.Toh and T.Matsumoto, in *IUTAM Symposium on Geometry and Statistics of Turbulence* edited by T.Kambe et al. (Kluwer Academic Publishers, Dordrecht, 2001) p.279.
- 4) G.Boffetta and I.M.Sokolov (2002), *Phys. Fluids*, 14, pp.3224- 3232.
- 5) G.Boffetta and I.M.Sokolov (2002), *Phys. Rev. Lett.*, 88, 094501.
- 6) J.Dávila and J.C.Vassilicos (2003), see e-print physics/0207108.