Japan Society of Fluid Mechanics

日本流体力学会年会2004講演論文集
D 111

圧縮性粘性流体の構成方程式

The Constitutive Equation of a Compressible and Viscous Fluid

○仲座栄三，津嘉山正光，牧野敏明，シャックラハマン（琉球大）

Eizo NAKAZA* , Seikoh TSUKAYAMA* , Toshiaki MAKINO* and Shak Rahaman*

*Dept. of University of the Ryukyus, Senbaru-1, Okinawa903-0123, Japan

After discussing physical and mathematical validities of the existing constitutive equations of a compressible and viscous fluid, the authors propose an alternative equation of Stokes's constitutive equation. Its accuracy is checked through a comparison between theoretical and experimental numerical values of bulk viscosity in the range of motion with no internal process. Finally, the constitutive equation of an elastic and isotopic material is suggested.

１．緒論

本論は，ストークスの仮説[1), 2)]を導入する粘性応力の構築に疑義を投じ，そうした仮説を何ら含まない構成方程式を提案する．また，その妥当性を実験値との比較で示す．

２．従来の粘性則

歴史的な背景に鑑み，弾性応力の構築から粘性応力の構築へと話を進めることにする．弾性学は，R. Hooke の法則に従い，弾性体の相対的微小変形に対し，弾性応力テンソル τ_{ij} と微小歪みテンソル ε_{ij} とを次のように線形関係で結んでいる．[3)]

$$\tau_{ij} = C_{ijkl}\varepsilon_{ij} \qquad (1)$$

ここに，座標系としては直行座標系が用いられており，添え字は Einstein の規約に従う．また，C_{ijkl} は，４階の弾性係数テンソルである．応力テンソルと歪みテンソルの対称性から係数テンソルにも対称性が要求される．

さらに，材料が一様で等方性を有するとき，係数テンソルには数学的に等方性条件と対称性を満たすことが要求される．テンソル解析により，対称性と等方性をあわせ持つ４階のテンソルは，$\lambda(\delta_{ij}\delta_{kl})$ か $\mu(\delta_{ik}\delta_{jl}+\delta_{il}\delta_{jk})$ かのただ２つのテンソル形に集約されることが証明されている．[3)] ここに，δ_{ij} は Kronecker のデルタである．係数 λ および μ は，それぞれ Lamé の第一および第二定数と呼ばれる．

式(１)に示す係数テンソルに $\lambda(\delta_{ij}\delta_{kl})$ を用いると，式(１)は $\tau_{ij}=\lambda\varepsilon_{kk}\delta_{ij}$ なる形の応力と歪みの関係を与える．このとき，歪み量は体積歪み ε_{kk} のみで与えられており，弾性体の相対的微小変形量と応力との一般的な関係を与えない．

したがって，式(１)に示す４階の係数テンソルとしては，$\mu(\delta_{ik}\delta_{jl}+\delta_{il}\delta_{jk})$ が選ばれなければならないとする結論に至る．このとき，式（１）は次式で与えられる．

$$\tau_{ij} = 2\mu\varepsilon_{ij} \qquad (2)$$

式（２）の場合，式（１）と同様，弾性体の相対的微小変形を表す歪みテンソルと応力テンソルとの関係を正しく与えている．

従来の弾性学は，等方弾性体の微小変形に対し，式（１）を，一般に次のように変形している．

$$\tau_{ij} = \lambda\varepsilon_{kk}\delta_{ij} + 2\mu\varepsilon_{ij} \qquad (3)$$

この関係式の右辺第一項の存在は，式（１）で弾性体の相対的微小変形を表すに歪みテンソル ε_{ij} を用いて十分であるとする精神に反する．

二つの 2 階対称テンソルを数学的に線形関係で結ぶというだけなら，式（３）はその一般形となり得る．しかしながら，同じ線形性を詠う Hooke の法則はそれに物理が入っている．

Hooke の法則では，2 階対称テンソルが応力と変形量とを表すものでなければならない．応力と歪み量との数学的線形性という観点のみからは，式（３）の表記も正しいように思える．しかしながら，機械的作用による材料の相対的微小変形を表すには歪みテンソル ε_{ij} を用いて十分であるから，式（３）の左辺第一項に示す等方歪み成分の項は，Hooke の法則を表すには全く必要ない項となる．

したがって，Hooke の法則を式（１）で表し，その後，等方性弾性体の Hooke の法則が式（３）で与えられると結論付けるのは，誤りと言わざるを得ない．

Navier, Cauchy, Poisson, そして Stokes の時代にあっては，弾性体の弾性係数が１つか２つであるかの大論争が巻き起こっている．[4)] その結末は，「２つの係数を用いる方が実験値との整合性が良く，弾性係数は２つと見なせる」とする考えに至っている．しかしながら，数理学的な見地からは，上述のように，Hooke の法則を表す機械的弾性係数はただ１つであると結論づけられる．

流体の粘性応力構築を弾性学における弾性応力の構築法に倣うとき，等方性流体の粘性応力テンソルと歪み速度テンソルとの関係は，式（１）および式（３）の形に表される．ただし，式（３）の弾性応力テンソルを粘性応力テンソル，歪みテンソルを歪み速度テンソル，弾性係数を粘性係数と読み替える必要がある．

式（３）に示す応力テンソルを等方テンソルと偏差テンソルとの和で表すならば，次式のように書ける．

$$\tau_{ij} = (\lambda + 2\mu/3)\varepsilon_{kk}\delta_{ij} + 2\mu(\varepsilon_{ij} - 1/3\varepsilon_{kk}\delta_{ij}) \qquad (4)$$

Stokes[1)] は，流体が非圧縮であるとき，運動方程式は

NII-Electronic Library Service

Navier の運動方程式と一致すると述べている．このとき，粘性係数はただ１つの係数 μ で与えられる．続いて,圧縮性の流体にあっても，体積粘性応力はゼロと仮定できるのではないか？としている．このとき，粘性係数は２つから１つに減らされる．

ここに導入された仮説─「等方体積粘性応力はゼロと設定してもよいのではないか」というのが Stokes の仮説であり，$\lambda + 2\mu/3 = 0$ を持って表される．

Batchelor[5) や Lighthill[6) は，単原子気体にあっては，Stokes が与えた粘性応力が適用できても，多原子気体などにあっては，内部過程に伴う緩和により，いわば第二の粘性が現れ，より一般的な粘性応力は，等方体積粘性応力を考慮し，次式の形で与えられるとする旨の説明を与えている．

$$\tau_{ij} = \chi\varepsilon_{kk}\delta_{ij} + 2\mu\left(\varepsilon_{ij} - 1/3\varepsilon_{kk}\delta_{ij}\right) \qquad (5)$$

ここに，χ は体積粘性係数あるいは第二粘性係数と呼ばれる．

数学的な変形としては，式（５）は式（４）において，

$$\chi = \lambda + 2\mu/3 \qquad (6)$$

と置いたものに他ならない．

しかしながら，流体の粘性により機械的な作用として生じる粘性応力の発生メカニズムと内部過程を考慮することによる体積粘性の発生メカニズムとは全く異なる物理である．したがって,内部過程で生じる体積粘性応力を表すに式(６)の関係を導入することは厳密には正しくない．

したがって，Batchelor[5) や Lighthill[6) は，流体の粘性により機械的な作用として生じる粘性応力に，Stokes の仮説を含む Stokes の構成方程式を用い，その上で，内部過程に対し，体積応力の形に構築した第二の等方粘性応力を導入したことになる．

Stokes の仮説の成立を認め，さらに式（６）の関係を導入し，単原子気体について，$\chi = 0$ と設定する場合の問題点を考えてみよう．このとき，式（６）において，粘性係数 λ に $\lambda = -2\mu/3$ なる関係を与えたことと等価となる．

粘性係数 μ は正の値を持つことが熱力学の第二法則から要求されるため，粘性係数として導入された係数 λ に負の値を持つ事を許すことになる．$\chi \geq 0$ でさえあれば，式（５）の関係は熱力学に矛盾をきたさない．しかしながら，粘性係数が負であっても良いとする考えに，粘性係数の物理的解釈上の問題があるのではなかろうか．Stokes の仮説や $\chi = 0$ と置けることの妥当性の疑義については，Schlichting[2) (Chapter III-e)や今井[7)（§63-N）も触れている．

３．新たな構成方程式

粘性応力構築において，粘性応力テンソルが歪み速度テンソルに線形比例し，それが式（１）の式形で与えられることを始点とするなら，粘性応力は式（２）に示す式形で与えられなければならないことをすでに示した．

したがって，運動状態の流体に対し，圧力が熱力学的平衡圧で与えられるならば，流体の内部応力テンソル σ_{ij} は次式で与えられる．

$$\sigma_{ij} = -p\delta_{ij} + 2\mu\varepsilon_{ij} \qquad (7)$$

ここに，p は熱力学的平衡圧である．

運動中の流体に内部過程の存在を認め，圧力の緩和を考慮するなら，式（７）は次式のように書ける．

$$\sigma_{ij} = -\left(p - \kappa\varepsilon_{kk}\right)\delta_{ij} + 2\mu\varepsilon_{ij} \qquad (8)$$

ここに，κ は圧力の緩和に関わる係数であり，以後，緩和係数と呼ぶことにする．

粘性係数が $\mu \geq 0$ となることを考慮し，緩和係数は熱力学の第二法則に則り，$\kappa \geq 0$ でなければならない．したがって，例え，単原子気体を想定する場合であっても，提案式から従来の構成方程式（５）と同形の式を与えることはできない．この点は，特筆しておく必要があろう．

４．実験値との比較

Lighthill[6) は，窒素ガスに対する音波のエネルギー減衰に関する様々な実験結果を整理し，内部過程が無視できるような条件で，体積粘性係数の値が $\chi = (0.6 - 0.8)\mu$ の範囲にあると述べている．これに対し，従来の流体力学は体積粘性係数の理論的な値として，Stokes の仮説を持ち込み，$\chi = 0$ と与えるのみである．

一方，内部過程を無視するとき,提案式（８）は，従来の流体力学が定義する体積粘性係数の値が $\chi = 2\mu/3 \approx 0.7$ でなければならないと主張する．この値は，実験値と極めて良く整合し，提案式の妥当性を示す一例ものと言えよう．

５．結論

理論的考察および実験値との比較において，提案する構成方程式（７）あるいは（８）は，圧縮性粘性流体の構成方程式として妥当性のあるものと判断される．

熱力学が定める圧縮率および比熱比を θ および γ で表すとき，Stokes が与えた弾性体の構成方程式は

$$\sigma_{ij} = -\gamma/\theta\ \varepsilon_{kk}\delta_{ij} + 2\mu\left(\varepsilon_{ij} - 1/3\varepsilon_{kk}\delta_{ij}\right) \qquad (9)$$

と書けるものであった．[1) 提案式（７）は，それとは異なる構成方程式を与える．詳細については，実験値との比較と共に，発表時に述べられる．

引用文献

1) Stokes G.G.: On the Theories of the Internal Friction of Fluids in Motion, and of the Equilibrium and Motion of Elastic Solids, Transactions of the Cambridge Philosophical Society, Volume XVIII, 1849.
2) Schlichting H.: Boundary-Layer Theory, Seventh Edition, McGRAW-HILL, INC, 1955 (reprinted in 1979).
3) Fung Y.C.: A First Course in Continuum Mechanics, Prentice-Hall, Third edition., 1994
4) Timoshenko S. P.: History of strength of Materials, Dover, 1983, (originally published in 1953).
5) Batchelor G.K. : Fluid dynamics, Cambridge University Press, 1967.
6) Lighthill M.J.: Viscosity effects in sound waves of finite amplitude, Surveys in Mechanics, Cambridge at the University Press, 1956.
7) 今井功::流体力学（前編）：裳華房, 1973.

NII-Electronic Library Service