

# 乱流中のスカラー場の間欠性と DNS の計算精度 Intermittency in Passive Scalar Turbulence and Accuracy of DNS

○ 渡邊威, 後藤俊幸 (名工大工)  
Takeshi WATANABE and Toshiyuki GOTOH

Graduate School of Engineering, Nagoya Institute of Technology, Nagoya 466-8555, Japan

Resolution requirements of direct numerical simulation (DNS) for passive scalar advected by homogeneous turbulence are numerically investigated. We examine the effects of dissipation intermittency on the small-scale statistics by performing DNSs with the various spatial resolutions at the fixed Reynolds number  $R_\lambda \simeq 180$ . It is found that the statistics of intermittent fluctuations for the energy and scalar dissipations strongly depends on the value of cutoff wavenumber  $K_{max}$ . However the behaviors of spectra and structure functions at the scales larger than the Kolmogorov scale  $\bar{\eta}$  are found to be insensitive to the variation of  $K_{max}\bar{\eta}$  even when  $K_{max}\bar{\eta} \simeq 1$ .

## 1. Introduction

乱流の全てのスケールをモデルを導入せずに数値的に精密に解く直接数値計算 (DNS) は, 今日一様乱流の研究を行う上で欠かすことができない強力な研究手法となっている.<sup>1)</sup> DNS の計算精度を保証する必要条件の一つとして, 系の切断波数  $K_{max}$  と Kolmogorov 長  $\bar{\eta} = (\nu^3/\bar{\epsilon})^{1/4}$  について  $K_{max}\bar{\eta} > 1$  を満たす事が挙げられ, 高 Reynolds 数乱流の実現を目指した研究では,  $K_{max}\bar{\eta} = 1 \sim 2$  の条件で DNS が行なわれている.<sup>2)</sup>

ところでエネルギー散逸場  $\epsilon(\mathbf{x})$  は時間空間的に間欠的な揺らぎを示す事が DNS, 実験結果から知られている.<sup>3)</sup> 最近 Sreenivasan は, この性質は DNS の計算精度に対するより強い条件

$$K_{max}\eta_{min} > 1 \quad (\eta_{min} = (\bar{\epsilon}/\epsilon_{max})^{1/4}\bar{\eta}) \quad (1)$$

を与える事を議論した.<sup>4)</sup> ここで  $\epsilon_{max}$  は  $\epsilon$  の揺らぎの空間分布の中の最大値を表す.  $K_{max}\bar{\eta} \simeq 1$  における強い間欠的揺らぎの存在は,  $\epsilon_{max} \gg \bar{\epsilon}$ , つまり  $K_{max}\eta_{min} < 1$  であることを意味する. これは切断波数の影響が乱流場の動力学や統計性質に少なからず及ぶ可能性を示唆する. 又この性質は乱流によって輸送されるスカラー場に対して大きな問題となる.<sup>4)</sup> なぜならスカラー場は速度場より強い間欠性を示すからである.<sup>5)</sup> よって乱流中のスカラー輸送を取り扱う DNS では, 十分に上述の条件を考慮して計算に用いるパラメータを設定する必要がある.

しかし上述した性質は, 乱流場のどのような性質に対して重要な影響を及ぼし, またそれは乱流の統計性質を議論する上で大きな問題となりうるのか, についての定量的な議論は存在しないようである. そこで本研究では  $K_{max}\bar{\eta}$  をパラメータとして系の格子点数  $N$  (または  $K_{max}$ ) が異なる数種類の DNS を実行し, 速度場及びスカラー場の振る舞いを特徴づける統計量への影響を定量的に評価する.

## 2. Direct Numerical Simulations

速度場が従う非圧縮性流体の基礎方程式とスカラー場が従う移流拡散方程式は, それぞれ

$$(\partial_t + u_j \partial_j) u_i = -\partial_i P + \nu \partial_j^2 u_i + f_i, \quad \partial_i u_i = 0, \quad (2)$$

$$(\partial_t + u_j \partial_j) \theta = \kappa \partial_j^2 \theta + f_\theta, \quad (3)$$

で与えられる. 本研究では特に Schmidt 数  $Sc = \nu/\kappa = 1$  の場合に限って DNS を行った. 空間は一辺の長さが  $2\pi$  の 3 重周期境界の立方体であり, 非線形項の計算には擬スペクトル法を用いた. DNS の設定に関するパラメータ値は, 系の格子点数  $N$  (または切断波数  $K_{max}$ ) 以外はすべて同じ条件を用いる.  $N(K_{max})$  が小さいほうから順に Run 1, 2, 3 と名づける. 各 Run で  $\nu =$

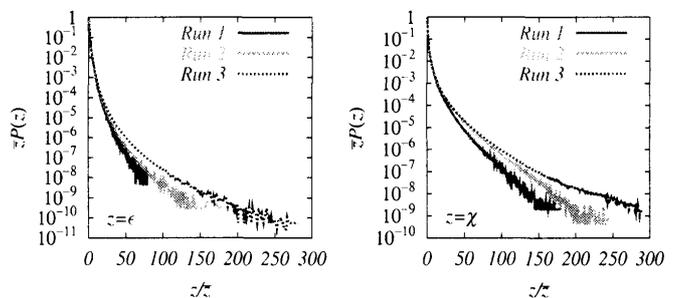


Fig. 1. Normalized PDFs for  $\epsilon(\mathbf{x})$  (left) and  $\chi(\mathbf{x})$  (right).

$1.3 \times 10^{-3}$  とした時,  $R_\lambda \simeq 180$  となった. また比較のために  $K_{max}\bar{\eta} = 1.06$ ,  $R_\lambda = 427$  の DNS の結果<sup>6)</sup> についても一部記載する. Table I にパラメータ値をまとめたものを示す. なお詳しい計算条件や統計量の定義については文献 6) を参照されたい.

Table I DNS parameters

	Run 1	Run 2	Run 3	Ref. 6)
$R_\lambda$	176	178	179	427
$N$	256 <sup>3</sup>	512 <sup>3</sup>	1024 <sup>3</sup>	1024 <sup>3</sup>
$K_{max}\bar{\eta}$	1.00	1.97	3.73	1.06
$T_{av}(T_{eddy})$	21.16	4.35	2.24	2.52

## 3. Results

### 3.1 Behaviors of PDFs for dissipations

最初に切断波数  $K_{max}$  の違いが大きな影響を及ぼすと考えられるエネルギー散逸場  $\epsilon(\mathbf{x}) = 2\nu(\sigma_{ij})^2$  とスカラー散逸場  $\chi(\mathbf{x}) = 2\kappa(\partial_i\theta)^2$  の揺らぎの確率密度関数 (PDF) の振る舞いを調べる. Fig. 1 はそれぞれの Run において平均値が 1 になるよう規格化された PDF の振る舞いを示す.  $\epsilon, \chi$  の PDF は共に  $K_{max}\bar{\eta}$  の値が大きくなるにつれてその分布の裾が大きな確率を示すようになる事がわかる. 最も解像度が高い Run 3 の場合, Fig. 1 から  $\epsilon_{max}/\bar{\epsilon} \sim 300$  と見積ることができる. この時  $\eta_{min} \sim \bar{\eta}/4$  となり, Run 3 の条件では  $K_{max}\eta_{min} \simeq 1$  が得られ, Sreenivasan による DNS の計算精度の条件<sup>4)</sup> を満たす. 一方平均値近傍  $\epsilon/\bar{\epsilon} \simeq 1$ ,  $\chi/\bar{\chi} \simeq 1$  では  $K_{max}\bar{\eta}$  の違いによる振る舞いの差異はほとんどみることができない. これらの結果から, Run 1, 2 の場合のように小スケールの解像度が十分でない場合には, 高次の統計量に関してその依存性が顕著に現れるが, 低次の統計量に関しては重大な影響は存在しないという事が期待される.

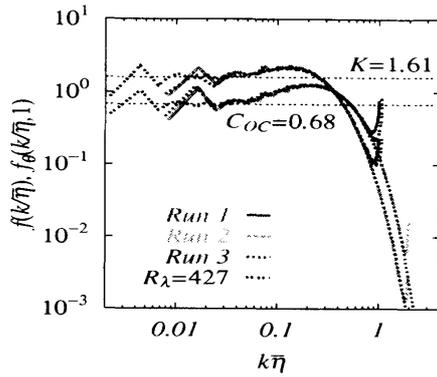


Fig. 2. Compensated spectra normalized as eqs. (4) and (5) for Run 1-3 and the result of  $R_\lambda = 427$ .

3.2 Effects on fundamental statistics

カスケード描像に基づく Kolmogorov-Obukhov-Corrsin (KOC) のスケーリング理論では、エネルギースペクトル  $E(k)$ 、及びスカラー分散スペクトル  $E_\theta(k)$  は

$$E(k) = \bar{\epsilon}^{2/3} k^{-5/3} f(k\bar{\eta}), \tag{4}$$

$$E_\theta(k) = \bar{\chi} \bar{\epsilon}^{-1/3} k^{-5/3} f_\theta(k\bar{\eta}_B, \bar{\eta}/\bar{\eta}_B) \tag{5}$$

のスケーリング則を示すことが予測されている。<sup>7-9)</sup>ここで関数  $f(x), f_\theta(y, z)$  は乱流の大スケールの詳細に依存しないある普遍スケーリング関数である。Fig. 2 に  $f(k\bar{\eta}), f_\theta(k\bar{\eta}, 1)$  の振る舞いを示す。Fig. 2 よりスペクトルは  $K_{max}\bar{\eta}$  によらず一つの曲線上にある事がわかる。また  $R_\lambda = 427$  の DNS のスペクトルと比較すると、 $K_{max}$  の極近傍を除いて bump 領域から散逸領域に渡って全体的に非常によく一致していることがわかる。これらの結果から、スペクトルへの切断波数の影響はほとんど全てのスケールで見出されない事、また鋭い bump 構造が存在する  $E_\theta(k)$  においてさえも、 $K_{max}\bar{\eta} = 1$  程度であれば慣性領域から散逸領域に渡って DNS の計算精度は十分信頼できると期待される。

次に物理空間内での統計性質への影響を調べる。場の一様等方性と定常性を仮定すると、基礎方程式から次の構造関数方程式

$$\langle \delta u_r^3 \rangle = -(4/5)\bar{\epsilon}r + 6\nu(d/dr)\langle \delta u_r^2 \rangle + F(r), \tag{6}$$

$$\langle \delta u_r \delta \theta_r^2 \rangle = -(4/3)\bar{\chi}r + 2\kappa(d/dr)\langle \delta \theta_r^2 \rangle + F_\theta(r). \tag{7}$$

が導出できる。<sup>10)</sup> 粘性項や外力項が無視できるスケールにおいては 4/5 則と 4/3 則が漸近的に成立する。Fig. 3 に 3 次構造関数の振る舞いを示す。Run 1-3 では  $R_\lambda$  が十分に大きくないために上述した漸近法則が成立する領域は狭い。しかし Run 1-3 の切断波数依存性は、非等方性の影響が残る積分スケール近傍を除

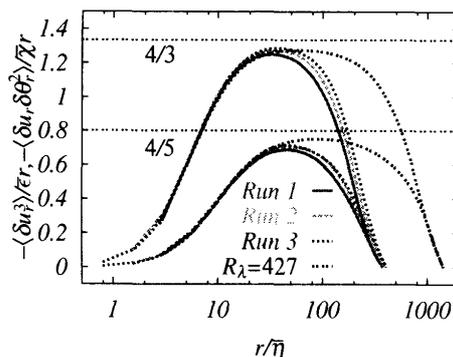


Fig. 3. Approach of the curves to the 4/5 and 4/3 laws for Run 1-3 and the result of  $R_\lambda = 427$ .

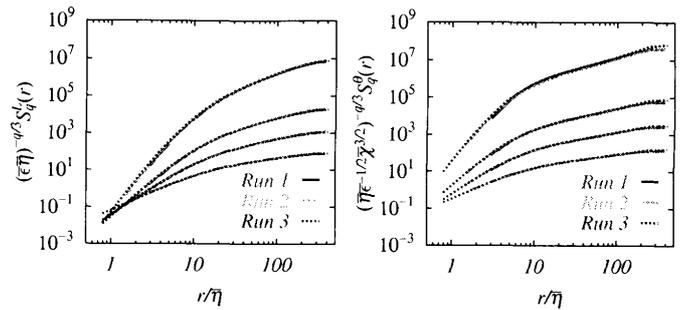


Fig. 4. Variation of normalized structure functions  $S_q^L(r)$  (left) and  $S_q^S(r)$  (right) against  $r/\bar{\eta}$  for Run 1-3. Curves are  $q = 2, 3, 4$  and 6 from the lowermost curve.

いて小スケール領域では存在しない事がわかる。

乱流における間欠性の問題では、高次モーメントの振る舞いが議論される。<sup>3)</sup>そこで高次構造関数のスケール依存性とその  $K_{max}\bar{\eta}$  依存性を調べる。Fig. 4 に縦速度差及び 2 点スカラー差の規格化した高次構造関数の振る舞いを示す。 $K_{max}\bar{\eta}$  を大きくするにつれて  $S_q^\alpha(r) \sim r^q$  の様に振舞う事、即ち小スケール領域の解像の程度が良くなる事が確認できる。また  $r > 10\bar{\eta}$  の領域では間欠性の影響が現れてくる 6 次程度の構造関数においてさえ顕著な  $K_{max}\bar{\eta}$  依存性は見出されない事がわかる。

4. Summary

本研究ではスカラー輸送を伴う DNS の計算精度について調べた。特にスペクトル、構造関数、PDF などの様々な統計量に対して、 $K_{max}\bar{\eta}$  を変化させた時に及ぼす影響について詳しく検討した。散逸場のような微量量の統計に関してはその高次のモーメントの振る舞いは切断波数の影響を大きく受けるが、スペクトル、構造関数については低次から間欠性の影響が無視できない 6 次程度の高次モーメントについて、 $K_{max}\bar{\eta} \approx 1$  であっても  $r/\bar{\eta} > 10$  の領域では十分な計算精度を示す事がわかった。

引用文献

- 1) Pope, S. B. : *Turbulent Flows*, (Cambridge University Press, Cambridge 2000) 335-357.
- 2) Gotoh, T., Fukayama, D. & Nakano, T. : Velocity field statistics in homogeneous steady turbulence obtained using a high-resolution direct numerical simulation, *Phys. Fluids* **14**, (2002) 1065-1081.
- 3) Frisch, U. : *Turbulence*, (Cambridge University Press, Cambridge 1995).
- 4) Sreenivasan, K. R. : Possible effects on small-scale intermittency in turbulent reacting flows, preprint (2004).
- 5) Warhaft, Z. : Passive scalars in turbulent flows, *Annu. Rev. Fluid Mech.* **32**, (2000) 203-240.
- 6) Watanabe, T. & Gotoh, T. : Statistics of a passive scalar in homogeneous turbulence, *New J. Phys.* **6**, (2004) 40.
- 7) Kolmogorov, A. N. : The local structure of turbulence in incompressible viscous fluid for very large Reynolds numbers, *Dokl. Akad. Nauk SSSR* **30**, (1941) 9-13.
- 8) Obukhov, A. M. : Structure of the temperature field in turbulent flows, *Izv. Akad. Nauk. SSSR. Geophys. Geofiz.* **13** (1949) 58-69.
- 9) Corrsin, S. : On the spectrum of isotropic temperature fluctuations in isotropic turbulence, *J. Appl. Phys.* **22**, (1951) 469-473.
- 10) Monin, A. S. & Yaglom, A. M. : *Statistical Fluid Mechanics*. Vol.II, (MIT press, Cambridge 1975).