日本流体力学会年会2004講演論文集
G 211

係数が独立変数に陽に依存する高次元バーガーズ方程式に対するパンルベ解析

Painlevé analysis for higher-dimensional Burgers equations with variable coefficients

戸田 晃一 (富山県大工)

Kouichi TODA
Faculty of Eng., Toyama Prefectural University, Kurokawa 5180, Kosugi, Toyama, 939-0398, Japan

It is showed that a generalized (2 + 1)-dimensional Burgers type equation has the integrability under suitable conditions for variable coefficients. The condition is determined via the Painlevé test that Weiss et al have introduced. And the exact solutions and Lax pairs is obtained for special cases of equations constracted.

1. 緒論

定数係数の非線形可積分方程式はこれまでに数多く研究されているが，それらが記述する物理現象の多くは非常に理想化されたものである。一方，係数が独立変数に依存する可積分方程式に関する研究も，定数係数の場合ほどではないが，多くの結果が知られている。しかも物理的にも重要である。しかし，これまでの研究では，係数が独立変数に陽に依存する KP 方程式は別とすると，空間 及び 時間とも一次元の方程式に関する研究ばかりであった [1]。そこで我々は係数が独立変数に陽に依存する高次元可積分方程式に関する研究を現在進めている。

本講演では，Burgers 方程式：

$$u_t + 2uu_x + u_{xx} = 0, \quad u = u(x,t) \tag{1}$$

の定数係数を変数係数にした可積分な空間高次元方程式の導出について報告する。(本講演では添字はいつも偏微分を意味している)。

ところで単純な空間高次元化では，低次元方程式のもつ可積分性は保たれない。可積分な定数係数の空間高次元 Burgers 方程式としては

$$u_t + uu_z + u_x\partial_x^{-1}u_z + u_{xz} = 0, \quad u = u(x,z,t) \tag{2}$$

が知られている。$z = x$ とすることにより，方程式 (2) は方程式 (1) に次元還元される。方程式 (2) は $\theta = \theta(x,z,t)$ とする Cole-Hopf 変換 $u = (\log\theta)_x$ により，線形方程式：

$$\theta_t + \theta_{xz} = 0 \tag{3}$$

に帰着できる [2]。

本講演では，この空間高次元 Burgers 方程式 (2) の定数係数を変数係数に拡張した場合の一般形を

$$\begin{aligned} &u_t + a(x,z,t)u + b(x,z,t)u_x + c(x,z,t)u_z + d(x,z,t)uu_z \\ &+e(x,z,t)u_x\partial_x^{-1}u_z + f(x,z,t)u_{xz} + g(x,z,t) = 0 \end{aligned} \tag{4}$$

と仮定する。(一般性を失うことなく，u_t の係数を 1 とすることができる。) ここで，$u = u(x,z,t)$，∂_x^{-1} は積分であり，$d(x,z,t) + e(x,z,t) \neq 0$ 及び $f(x,z,t) \neq 0$ とする。$a(x,z,t), b(x,z,t), \cdots, g(x,z,t)$ は空間変数 x, z と 時間変数 t の関数であり，これらを変数係数と呼ぶことにする。この方程式 (4) は，一般には可積分ではない。しかし，変数係数に**適当な条件を課すことにより**，可積分となることがある。それでは，この「可積分となるための条件」はどのように求めることができるのであろうか？ この条件を求めるのに，我々は パンルベ解析を用いることにする。

2. 可積分な係数が独立変数に陽に依存する一般的な高次元 Burgers 方程式の導出

可積分系研究において，与えられた非線形発展方程式の可積分性を調べることはもっとも基本的な問題の一つである。そのような方法があれば大変有用であるが，完全な意味ではそのような方法はまだ知られていない。しかし，ある程度有効な方法としては **パンルベ解析**が知られている [3,4]。そして，このパンルベ解析は可積分性を調べるだけではなく，可積分方程式を**導出する**（，または，**探す**）ことにも非常に有効な道具であることが広く知られている [5]。

我々は Painlevé 解析の代表の一つである **Weiss-Tabor-Carnevale（WTC）アルゴリズム** [6,7]：

1. 零でない Leading order を決定する (Leading Order 解析)
2. Resonance を求める (Resonance 解析)
3. Resonance の個数に対応する任意関数の存在を確かめる (Compatibility 条件)

を用いて，Painlevé 解析をパスするように，方程式 (4) が可積分となるための変数係数 $a(x,z,t), b(x,z,t), \cdots, g(x,z,t)$ に対する条件を求める。ただ，方程式 (4) に対して Painlevé 解析を行うためには，方程式 (4) 中の積分を消す必要がある。このような場合には，$u = \phi_x(x,z,t)$ とおくことでよい場合が多いが，今回の場合にはそれは無力である。何故なら，$u = \phi_x(x,z,t)$ とすると，Leading order が零となるからである。今回の場合は，全体を微分することで，積分を消すことにする。つまり，方程式

$$\begin{aligned} &(ea_x - ae_x)uu_x + (ec_x - ce_x)u_xu_z + (ed_x - de_x)uu_xu_z \\ &+(eg_x - ge_x)u_x + e(d+e)u_x^2u_z + (ae + eb_x - be_x)u_x^2 \\ &-e_xu_tu_x + eu_xu_{xt} + deuu_xu_{xz} + (ce + ef_x - fe_x)u_xu_{xz} \\ &-egu_{xx} - aeuu_{xx} - eu_tu_{xx} - ceu_{xx}u_z - deuu_{xx}u_z \\ &-efu_{xx}u_{xz} + efu_xu_{xxz} = 0 \end{aligned} \tag{5}$$

に対して Painlevé 解析を行う。但し，簡単のため必要のない限り，$a(x,z,t), b(x,z,t), \cdots, g(x,z,t)$ を $a, b, \cdots, g$ と書くことにする。

1. Leading Order 解析：

$\phi = \phi(x,z,t)$ を用いて，$u = u(x,z,t)$ を

$$u = \phi^\alpha u_0(x,z,t) \tag{6}$$

と展開する。このとき，方程式 (5) の最低次の項 ($u_x^2u_z$, uu_xu_{xz}, $uu_{xx}u_z$, $u_{xx}u_{xz}$, u_xu_{xxz}) より，

$\alpha = -1$ を得る。この α を **Leading Order** と呼ぶ。加えて，

$$u_0(x, z, t) = \frac{2f}{d+e}\phi_x \tag{7}$$

も得られる。

2. Resonance 解析：

次に $\phi = \phi(x, z, t)$ を用いて，$u = u(x, z, t)$ を

$$u = \sum_{j=0}^{\infty} u_j \phi^{j-1} \tag{8}$$

と展開する。但し，$u_j = u_j(x, z, t)$ とする。展開式 (8) を方程式 (5) に代入することで，$j = -1, 1, 2$ が得られる。これらを **Resonance** と呼ぶ。$j = -1$ は ϕ が任意にとれることに対応している。$j = 1, 2$ はそれぞれ展開の係数関数 u_1, u_2 が任意にとれることを意味している（これを確認することが次にすべきことである)。

3. Compatibility 条件：

それでは u_1 と u_2 が任意関数となるように，$a, b, \cdots, g$ の条件を求めていく。
展開式 (8) を方程式 (5) に代入して，$j = 1,2$ に対応する項を取り出せばよいが，非常に長いのでここでは略す。
結果として，

Case 1： $e = 0$

Case 2： $e \neq 0$, $f = (d+e)\exp\zeta(t)$

のどれかを満たす必要があることが分かる。但し，$\zeta(t)$ は積分定数である。しかし **Case 1** の場合は，方程式 (5) が常に零となり不適である。故に，**Case 2** の場合についてのみ以下で見ていく。このとき，省略した式より

$$\begin{aligned}
&4\exp\{2\zeta(t)\}(eb_x - be_x - ae - e\zeta'(t))\phi_x^4 \\
&+4\exp\{2\zeta(t)\}(ec_x - ce_x)\phi_x^3\phi_z - 4\exp\{2\zeta(t)\}e_x\phi_x^3\phi_t \\
&+4\exp\{3\zeta(t)\}e(d-e)(\phi_x^2\phi_{xx}\phi_{xz} - \phi_{xx}^2\phi_x\phi_z - \phi_x^3\phi_{xxz} \\
&\quad + \phi_x^2\phi_{xxx}\phi_z) + 4\exp\{3\zeta(t)\}(ed_x - de_x)\phi_x^2\phi_{xx}\phi_z \\
&= 0
\end{aligned} \tag{9}$$

を得る。この関係式が任意の ϕ について成立するためには，

$$\begin{aligned}
&a(x, z, t) = b_x(x, z, t) - \zeta'(t), \quad c = c(z, t), \\
&d = d(z, t) = e
\end{aligned} \tag{10}$$

でなければならない。(ここで $'$ は t の常微分を意味している。) このときのみ係数関数 u_2 が任意関数となる。

以上より，方程式 (4) が WTC アルゴリズムによる Painlevé 解析をパスするためには，条件 (10) のとき，つまり

$$\begin{aligned}
&u_t + \{b_x(x, z, t) - \zeta'(t)\}u + b(x, z, t)u_x + c(z, t)u_z + d(z, t)uu_z \\
&+d(z, t)u_x\partial_x^{-1}u_z + 2\exp\{\zeta(t)\}d(z, t)u_{xz} + g(x, z, t) = 0
\end{aligned} \tag{11}$$

の時のみである。これが，可積分な係数が独立変数に陽に依存する一般的な高次元 Burgers 方程式である。次にこの方程式が線形化可能であることを見ていく。係数関数 u_1, u_2 が任意関数なので，u の展開式 (8) より u_0 の項のみ残すことができ，

$$u = u_0\phi^{-1} = 2\exp\{\zeta(t)\}\frac{\phi_x}{\phi} = 2\exp\{\zeta(t)\}(\log\phi)_x \tag{12}$$

となる。これが方程式 (11) に対する Cole-Hopf 変換になっている。実際，この変換により，方程式 (11) は $\phi = \phi(x, z, t)$ に対する線形方程式：

$$\begin{aligned}
&\phi_t + b(x, z, t)\phi_x + c(z, t)\phi_z + 2\exp\{\zeta(t)\}d(z, t)\phi_{xz} \\
&= 0
\end{aligned} \tag{13}$$

に変形される。但し，簡単のため $g(x, z, t) = 0$ としている。

3. 結論

本講演において，Painlevé 解析の代表である WTC アルゴリズムにより，可積分な係数が独立変数に陽に依存する一般的な高次元 Burgers 方程式 (11) を導出した。また，Painlevé 解析の副産物として Cole-Hopf 変換を導出し，方程式 (11) の線形化についても考察した。方程式 (11) の多成分化などに関する研究をこれから行いたい。

ところで，方程式 (2) は変数変換により，

$$\begin{aligned}
&u_t + 2uu_x + 2u_y\partial_x^{-1}u_z + u_{xx} + u_{yy} = 0, \\
&u = u(x, y, t)
\end{aligned} \tag{14}$$

とすることもできる。この場合は $\partial_y \to 0$ とすることで，方程式 (14) は方程式 (1) に次元還元される。紙数の制限により，方程式 (1) と (14) を合わせた方程式 や 係数が独立変数に陽に依存する高次元 KdV 方程式に対する同様の解析に関す結果は本講演では割愛している。興味のある方は参考文献 [1,8] を見てほしい。

附記

本研究は 小林 匡氏との共同研究に基づいており，科研費（若手 B: 15740242）及び 財団法人 富山第一銀行奨学財団の補助により進められたものであることを附記する。

引用文献

1) 小林 匡: *Extensions of nonautonomous nonlinear integrable systems to higher dimensions* (修士論文, 京都大情報, 2004) の参考文献に膨大なリストがある.
2) Toda K.: *Structure and Dynamics of Nonlinear Wave Phenomena (RIMS No.1271, Kyoto)*, in Japanese, 258 (2002).
3) Conte R.（編）:「*The Painlevé Property One Century Later*」, Springer-Verlag, 2000.
4) Chowdhury A. R.:「*Painlevé Analysis and Its Applications*」, Chapman & Hall/CRC, 2000.
5) これは数多くの論文があるので，最近のものだけ挙げることにする。
   - Sakovich S. Y. and Tsuchida T.: *J. Phys. A*, 33 (2000), 7217-7226.
   - Toda K.: *J. Nonlinear Math. Phys.*, 9 (2002) 207-212.
6) 和達 三樹:「非線形波動」(岩波講座現代の物理学１４), 岩波書店, 1992.
7) 川原 琢治:「ソリトンからカオスへ」, 朝倉書店, 1993.
8) Kobayashi T. and Toda K.: *Higher dimensional Burgers equations with variable coefficients from Painlevé analysis*, *Physics Letters A* に投稿中.