日本流体力学会年会 2005
AM05-22-020

回転型ＮＳ方程式による非圧縮性流れの計算

Computation of Incompressible Flows based on Rotational Form of NS Equation

○ 坪井一洋，茨城大・工，日立市中成沢町４－１２－１，E-mail: ktsuboi@mx.ibaraki.ac.jp
TSUBOI Kazuhiro, Dept. Intelligent System Eng., Ibaraki Univ., 4-12-1 Nakanarusawa, Hitachi

Considering inviscid Euler equation written in the rotational form as the state equation of dynamic system, the approximated solution can be obtained. This solution is valid within the small time interval in which vorticity can be assumed to be constant. In this solution, time integral of pressure term is included and we control the time accuracy by the estimation of different accuracy to this integral. Based on this inviscid solution, computational methods for incompressible Navier-Stokes equation are presented by introducing the viscous term approximately. The present methods are applied to incompressible flow computation in 2-D cavity problem and the error of continuity equation is compared with that of MAC method. The results show that the distribution of the error is localized in the present method and the accuracy of the solution is improved.

要旨

この数十年間に飛躍的な進歩を遂げた計算流体力学（数値流体力学）の分野において，いまだに重要性をもった問題のひとつとして非圧縮性流れに対する計算法の確立がある．特に，３次元計算が一般化した現在では基本変数（速度と圧力）を用いた非圧縮性流れの計算が広く行われており，これらを未知変数とした計算法の確立が望まれる．

基本変数を用いた非圧縮性流れの計算法において数学的根幹をなす概念は「ベクトル場の Helmholtz 分解」であり，1960 年代に相次いで提案された MAC 法や擬似圧縮性法はこの分解の具体的な方法が異なるにすぎない．「Helmholtz 分解」の直接的な帰結から，非圧縮性流れの計算法は流体中を伝わる波動を縦波と横波に分解することに重点が置かれる．例えば，非圧縮性流れに対する最も単純な計算法と考えられる MAC 法では，速度場の非圧縮性は圧力場に対する Poisson 方程式として定式化される．これは，圧力波（縦波）の伝播速度が横波に比べて桁違いに大きいことの反映である．しかし，流体の基礎方程式がもつ非線形性のために上記の分解を完全に行うことは容易ではない．

運動量保存則である非粘性 Euler 方程式あるいは Navier-Stokes 方程式のみを考えると，圧力項が存在するため閉じた方程式系とならない．この場合，圧力を外力と考えることで運動量の保存則から速度場 **u** は

$$\mathbf{u}=\mathbf{u}(\mathbf{x},_t,_p), \qquad (1)$$

の形で求まる．しかし，解(1)は一般に連続の式を満たさない．そこで，式(1)を連続の式に代入した式

$$\mathrm{div}\mathbf{u}(\mathbf{x},_t,_p)=0, \qquad (2)$$

から圧力 $_p$ を決める必要がある．つまり，圧力場は一種の外力として速度場が連続の条件を満たすように働くことになる．MAC 法で圧力場を陰解法によって扱うことが本質的なのはこの理由による．

MAC 系の解法では式(1)に相当する表現として運動量方程式に対する時間方向精度が 1 次の差分近似式を利用する．そして，この表現に対する条件(2)として前述した圧力の Poisson 方程式が導かれるのは周知のとおりである．したがって，圧力場の時間方向変化を考えると，MAC 法は 1 次の近似精度しかない．そして，この点はすべての MAC 系解法に共通した特徴（あるいは欠点）といえる．MAC 系解法で唯一，回転型基礎方程式を採用した GSMAC 法においても，この点は従来の MAC 法と本質的に変わらない．

すでに述べたように，圧力場を連続の式を満たすように速度場を誘導する外力と考えるならば，圧力の作用に対する時間精度を上げることが連続の式の精度を上げることにつながるはずである．しかし，移流型の基礎方程式を用いる限り式(1)に相当する解を陽に表すことはできない．

一方，回転型の基礎方程式では，その形は形式的に線形システムの状態方程式と同じであり，線形化の範囲で圧力項を含んだ形の解（速度場）を求めることが可能である．これによって，速度場に対する連続の条件と圧力場を直接関連付けることができる．

実際，回転型非粘性 Euler 方程式

$$\frac{\partial_{u_i}}{\partial_t}+\Omega_{ij}u_j=-\frac{\partial_H}{\partial_{x_i}}, \qquad (3)$$

に対して線形近似解

$$u_i(_t+\delta_t)=a_{ij}(\delta_t)u_j(_t)-\int_t^{t+\delta_t}a_{ij}(_t+\delta_t-\tau)\frac{\partial_H}{\partial_{x_j}}(\tau)_d\tau, \qquad (4)$$

が得られる．ここで，a_{ij} は行列指数関数（状態遷移行列）であり，具体的に次式で表すことができる．

$$a_{ij}(_t)=\delta_{ij}\cos\omega_t+\varepsilon_{ijk}e_k\sin\omega_t+e_ie_j(1-\cos\omega_t)\ . \qquad (5)$$

そこで，解(4)から圧力に対する Poisson 型方程式

$$\alpha\Delta_H{}^{n+1}=\frac{1}{\delta_t}\frac{\partial}{\partial_{x_i}}\left(a_{ij}(\delta_t)u_j{}^n\right)-(1-\alpha)_F(_t+\delta_t,_t), \qquad (6)$$

が得られるが，この方程式の特徴は左辺の時間積分にある．すなわち，この時間積分の評価によって時間方向の精度を決めることができる．

非粘性解(4)を Navier-Stokes 方程式に適用するために近似的に粘性項を導入する２つの方法を示し，そのうちの１つの方法で２次元 cavity 流れの計算を行い，MAC 法で求めた結果との誤差比較を行った．

その結果，41×41 までの格子数では回転型方程式による結果の方が連続の式の最大・最小誤差の幅は大きいにもかかわらず流れ場全体での誤差の総和は小さくなり計算精度が改善された．実際，誤差の分布を見ると，今回の方法による結果では誤差は境界付近に集中しており流れ場全体としての誤差は小さいことが確認できた．なお，今回の結果では１次精度と２次精度の誤差の程度はほとんど同じで精度による差は見られなかったこと，また，101×101 では MAC 法の結果が精度として高い結果となった．これらの理由については今後検討する必要がある．

また，講演時には他の計算問題の結果も示し，回転型方程式を用いた計算法についてより詳細な議論を行う予定である．