日本流体力学会年会 2006
AM06-16-007

非線形シュレディンガー方程式に関連した確率微分方程式の解

Solutions for the Stochastic Differential Equations Associated with the Nonlinear Schrödinger Equation

○矢嶋徹, 宇大工, 宇都宮市陽東 7-1-2, E-mail: yajimat@is.utsunomiya-u.ac.jp
宇治野秀晃, 群馬高専, 前橋市鳥羽町 580, E-mail: ujino@nat.gunma-ct.ac.jp
Tetsu Yajima, Department of Information Science, Faculty of Engineering, Utsunomiya University, Yoto 7-1-2, Utsunomiya, Tochigi 321-8585, Japan
Hideaki Ujino, Gunma College of Technology, Toriba-cho 580, Maebashi, Gunma 371-8530, Japan

Regarding Kolmogorov's forward equation as one of the conservation laws, we present a set of stochastic differential equations associated with the nonlinear Schrödinger equation. For the soliton solution of the nonlinear Schrödinger equation, solutions of the stochastic differential equations are studied numerically. The behavior of the solutions are interpreted by the equation of motion under the potential generated from the soliton solution.

1. 緒言

可積分方程式に対して確率的な要因を取り込むことは，非線形現象の解析に有意義であると考えられる．講演者たちは，先行研究においてサインゴルドン (SG) 方程式の進行波解の構造を利用し，SG 方程式に付随した確率微分方程式を構成した [1]．また，確率微分方程式の係数を発散しないように決定する方法を導き，サンプルパスに跳躍を生じない確率過程を構成した [2]．しかしながら，これらは解の構造に依存していること，周期解に付随した場合では確率変数の空間にも制限が付くことなどの困難があった．

これらの問題を解決する目的で，ここでは非線形シュレディンガー (NLS) 方程式を考え，解の構造に依存しないという条件の下で，これに付随した確率微分方程式の構成を行う．X_t を $\mathbb{R}$ における伊藤拡散過程，すなわち B_t を 1 次元 Brown 運動として，

$$\begin{gathered} dX_t = b(X_t,t)dt + \sigma(X_t,t)dB_t \\ b(X_t,t),\ \sigma(X_t,t) \in \mathbb{R} \end{gathered} \tag{1}$$

をみたす確率変数とする．このような確率過程の密度関数を $p(X_t,t)$ とすると，Kolmogorov の前進方程式

$$p_t = -\frac{\partial}{\partial x}(bp) + \frac{1}{2}\frac{\partial^2}{\partial x^2}(\sigma^2 p) \tag{2}$$

が成り立つ．これは，p を保存密度，$-bp + \frac{(\sigma^2 p)_x}{2}$ をカレントとする保存則である．本稿では，(2) をソリトン方程式の保存則と対応させ，それに付随する確率過程を構築する．

2. 確率過程の構築

NLS 方程式 $i\psi_t + \psi_{xx} + 2|\psi|^2\psi = 0$ に付随した確率過程を構築するため，最低次の保存則 $(|\psi|^2)_t = [i(\psi^*\psi_x - \psi\psi_x^*)]_x$ を取り，(2) と対応させる．すなわち，密度関数を $p = |\psi|^2$ のように定め，$-bp + \frac{(\sigma^2 p)_x}{2} = i(\psi^*\psi_x - \psi\psi_x^*)$ としよう．ここで，密度関数 p を展開パラメーターとして用いて，拡散係数 σ およびドリフト係数 b を

$$\sigma^2 = \sum_{j=0}^{\infty} a_j p^j, \quad b = 2\phi_x + \frac{a_0 p_x}{2p} + p_x \sum_{j=1}^{\infty}(j+1)a_j p^{j-1} \tag{3}$$

のように選ぶことによって，NLS 方程式に付随した確率微分方程式を構成することができる．ただし，$\phi = \arg\psi$ とした．確率変数 X_t は，(3) のもとで (1) に従う．NLS 方程式の解 ψ を適当に選べば，$p = |\psi|^2$ と (3) から X_t の時間発展が決まる．

3. 数値計算の結果

以下では，このようにして得られた確率微分方程式の解析を数値的に行う．ここでは最も基本的な例として，$\sigma = \sigma_0$（定数）の場合を取り上げる．NLS 方程式の解としては，1 ソリトン解 $\psi = \frac{2\eta e^{i[-2\xi x + 4(\eta^2 - \xi^2)t]}}{\cosh[2\eta(x + 4\xi t)]}$ を選ぶと，(3) によって

$$b = -4\xi - 2\sigma_0^2\eta \tanh[2\eta(x + 4\xi)]$$

となり，確率変数 X_t は

$$dX_t = \{-4\xi - 2\sigma_0^2\eta \tanh[2\eta(X_t + 4\xi t)]\}\, dt + \sigma_0 dB_t \tag{4}$$

という確率微分方程式に従うことになる．図 1 は

$$\xi = 0.1, \quad \eta = 1.0, \quad \sigma_0 = 2.0, \quad X_0 = 2$$

の下でのサンプルパスの例である．パスはドリフト係数の定数項に引きずられる傾向にある．

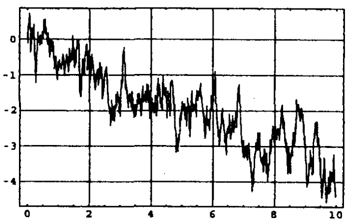

Fig. 1　確率微分方程式 (4) のサンプルパス

4. まとめ

本稿では，SG 方程式に関連して導出された確率微分方程式の構成法を改良し，NLS 方程式を取り上げて確率微分方程式を導出した．サンプルパスの様子は，SG 方程式の場合の特徴に準じるものである．これらのパスの振る舞いの定量的な解析や，このような確率過程の応用についてはさらなる議論の余地が残されている．

参考文献

(1) 矢嶋，宇治野: “サインゴルドン方程式の周期解に付随した確率過程”, 日本流体力学会年会 2005 講演論文集, (2005), 199.

(2) 矢嶋，宇治野: “可積分方程式に関連した確率微分方程式の解”, 九州大学応用力学研究所報告『非線形波動および非線形力学系の現象と数理』17ME-S2 (2006), pp. 4-1–4-7.