

乱流の計算科学への試み

Attempts at Computational Science of Turbulence

○金田 行雄, 名古屋大学大学院工学研究科, 名古屋市千種区不老町, E-mail: kaneda@cse.nagoya-u.ac.jp
Yukio Kaneda, Nagoya University, Graduate School of Engineering, Furo-cho, Nagoya

A review is presented on some attempts to understand turbulence by using high-performance computing. An emphasis is put on the study of turbulence by the direct numerical simulation (DNS) of incompressible turbulence in a periodic box with the number of grid points up to 4096^3 . The DNS data shed some light on the basic questions on the statistics of turbulence at high Reynolds number Re . The statistics include (i) the normalized mean rate of kinetic energy dissipation in the limit $Re \rightarrow \infty$, (ii) the energy spectrum in the universal equilibrium range, (iii) intermittency of the energy dissipation rate, and (iv) energy transfer from large to small scales.

1. はじめに

乱流は非常に多くの自由度を含む強い非線形性の不可逆現象である。乱流と同じく巨大自由度を含む、熱平衡あるいはそれに近い系の現象に比べ、乱流の理解は著しく遅れており、その統一理論体系はまだ確立されていない。長い研究の歴史にも関わらず、乱流は未解決の問題として知られている。

一方、近年のコンピュータのハード、ソフト両面における進歩は著しく、たとえば世界最高速のコンピュータの演算速度は10年あたり約1,000倍あるいはそれ以上の割合で向上している。このような背景の下に、他の科学技術の諸分野におけるのと同様に、流体力学とくに乱流の研究においても、計算科学的方法の役割が増大している。計算科学的方法は Computer-aided Engineering あるいは Computer-aided Design などとして広く認知されているような実用面だけでなく、たとえばソリトンやカオスの研究の歴史が示すように流体现象の原理的理解や概念の発展にも有用である。乱流については、すでに60年近く前(1949)に Von Neumann はあるレポート⁽¹⁾の中で、純理論的あるいは数学的な乱流研究の難しさを述べたあと、以下のように述べている。

... Under these conditions there might be some hope to 'break the deadlock' by extensive, but well-planned, computational efforts.
...

計算科学的方法の中で、直接数値シミュレーション (DNS) は、実験と違い、よく制御された条件下で、テイラー仮説などの測定に伴う仮説や実験誤差なしに、詳細なデータを提供しようという利点を持つ。しかし、よく知られているように乱流ではレイノルズ数の増加とともに扱うべき自由度数が急速に増大する。一方、コンピュータのメモリー、演算速度には限界があり、必然的にDNSで扱える自由度数に制約がある。従来この制約は非常に強く、高いレイノルズ数の乱流DNSを行う際の大きな障害となっていた。

しかしながら、幸いこの制約は近年大きく緩和しつつある。たとえば、地球シミュレータ (ES) を用いて、非圧縮性乱流の従来と桁違いに大規模なDNSを行うことができるようになった。⁽²⁾ その最大のDNSでは格子点数が 4096^3 であり、各格子点上で速度3成分と圧力の4自由度があると数えれば、自由度総数は $M = 4 \times 4096^3 \sim 2.7 \times 10^{11}$ に及ぶ。非圧縮性乱流中では音速は無限大であるので、速度場は圧力を通じて非局所的な相互作用を行う。それゆえ、流れ場全体におけるその非線形相互作用の総数は $M^2 \sim 7.6 \times 10^{22}$ と見積もることができる。このような巨大な非線形相互作用数を持つ系のDNSは流体力学分野に限らず、私の知る限り全科学分野においても例がない。このようなDNSデータは高いレイノルズ数の乱流のもつ普遍的法則性の解明のための有用な手がかりを与えると期待される。

我々はESおよび名古屋大学のスーパーコンピュータを用いて一連の大規模DNSとそのデータ解析を行ってきた。そのデータ解析は現在続行中である。以下では、そのデータ解析によってこれまでに得られた知見のいくつかについて簡単に紹介する。

2. DNSの考え方・方法

2.1 Kolmogorovの考え

十分発達した乱流中では、大小の広いスケールにわたり無数の渦が存在し、お互いに非線形の相互作用をしながら運動している。その運動は一般に微小な摂動に対して敏感であり、予測しがたい。個々の渦全ての運動を追跡するのは困難である。

このことはアボガドロ数の分子の個々の軌道を追跡するのが現実的に不可能であることに似ている。一方、熱平衡系に対する、熱・統計力学では、その個々の軌道は分からなくても、気体の圧力や密度など少数の巨視的な物理量が定義され、それらの間にはボイル・シャルルの法則などの、ある普遍的な関係が導かれる。

乱流については、このようなことは可能であろうか？よく知られたKolmogorovの理論の背景には、それが可能であるとの考えがある。⁽³⁾ もちろん、個々の流れは一般に境界条件や外力に依存し、大きなスケールの流れがこれらの条件に依存するのは当然である。しかし一方、十分高いレイノルズ数の発達した乱流中の十分小さいスケールでは、これら大きなスケールの条件の詳細によらないという意味で普遍的な統計的性質があるのではないか？この考えは理論的にも実用的にも魅力的である。実際、Kolmogorovの理論におけるいくつかの仮説自体については必ずしも正しくないことが分かっているが、そこから導かれるエネルギースペクトルの $k^{-5/3}$ 則(k は波数)などとともに、この考えはおおむね実験的にも支持され、これまでの多くの乱流研究の基本的前提になっている。

2.2 カノニカルな乱流

この考えによれば、乱流の持つ普遍性は大きなスケールにおける特定の境界条件や外力の詳細によらないはずであるから、逆にそれを探るのにはできるだけ簡単な境界条件や外力を使ってよいことになる。しかしながら一方、DNSによってKolmogorovの考えにおける普遍性を探るにはできるだけ高いレイノルズ数の乱流のDNSを実現する必要がある。

我々はこのような考えに基づいて、境界条件としてはもっとも簡単なもののひとつである周期境界条件のもとに次のナビエ・ストークス (NS) 方程式に従う非圧縮性乱流のDNSを行った。

$$\frac{\partial \mathbf{u}}{\partial t} + (\mathbf{u} \cdot \text{grad}) \mathbf{u} = -\text{grad } p + \nu \nabla^2 \mathbf{u} + \mathbf{F}, \quad (1)$$

$$\text{div } \mathbf{u} = 0. \quad (2)$$

ここで, $\mathbf{u}$, p と ν はそれぞれ流速ベクトル, 圧力, 動粘性率であり, $\mathbf{F}$ は単位質量あたりの外力である. また質量密度を 1 としてある.

式 (1), (2) は乱流の本質である 3 つの要素

- (i) 流体の動きに伴う非線形の移流項 $(\mathbf{u} \cdot \text{grad}) \mathbf{u}$ と
- (ii) 粘性による散逸性を持ち,
- (iii) 質量保存則 (非圧縮性流体の場合には式 (2))

を満たす 3 次元ベクトル場を支配する, という性質を持つ方程式系のうちもっとも簡単な系とみなすことができる. それゆえ, 周期境界条件下での NS 方程式に従う乱流は, 本質的要因を維持し, しかも簡単という意味で規範的 (カノニカル) な乱流とみなすことができ, 乱流固有のダイナミクスを理解するのに適した系である.

2.3 計算方法および条件

我々の DNS は, いわゆる位相シフト法によってエイリアス誤差を除去した, フーリエスペクトル法に基づいている. フーリエスペクトル法では空間微分やラプラス逆演算を波数についての代数演算として扱え, それゆえまた, 非圧縮性乱流の DNS においては非圧縮条件から導かれる圧力に対するラプラス方程式を (級数打ち切りおよび丸め誤差を除き) 厳密かつ高速に解けるという利点がある. レイノルズ数が高い乱流では, 小さな渦と大きな渦のスケールの違いが非常に大きくなるので, 高波数の成分まで高精度に解けるフーリエスペクトル法の利点は望ましいものである.

以下で紹介する DNS では各時刻で全エネルギーが時間によらない一定の値になるように, 低波数領域で, ある簡単な波数によらない負の粘性を導入し, $k_{max}\eta \sim 1$ (シリーズ 1) と $k_{max}\eta \sim 2$ (シリーズ 2) の二つのシリーズの DNS を行った. (2, 4) ここで, k_{max} は DNS における最大波数, η はコルモゴロフ長, 基本周期は 2π であり, それゆえ最小波数は 1 である.

3. 乱流場の統計的普遍則

発達した乱流の持つもっとも本質的特徴のひとつは, エネルギーの大部分を担う大きな渦の特徴的スケール ($\sim L$) とエネルギー散逸の大部分を担う小さな渦の特徴的スケール ($\sim \eta$) がかけ離れていることである. L を積分長とすると, 我々の DNS では二つのスケールの比 L/η は格子点数 N^3 の増加とともに大きくなり, $N^3 = 4096^3$ の DNS では, シリーズ 1 および 2 でそれぞれ約 2200, 1040 に, またテイラーマイクロスケールレイノルズ数 R_λ は約 1200, 675 に及んでいる. このように広いスケール範囲をもつ大規模 DNS によるデータは乱流の基本的な疑問に対する理解への貴重な手がかりを与えてくれると期待される.

3.1 $\nu \rightarrow 0$ における平均エネルギー散逸率

そのような基本的疑問のひとつとして, ν が十分小さい極限における単位時間, 単位質量あたりの平均エネルギー散逸量 ϵ の平均 $\langle \epsilon \rangle$ がある. $\nu \rightarrow 0$ あるいはレイノルズ数 $Re \rightarrow \infty$ で,

- (i) $\langle \epsilon \rangle$ は 0 に漸近する, あるいは
 - (ii) 0 ではない有限の値をもつ,
- どちらが正しいであろうか?

ϵ は $\nu \times$ (速度勾配の二乗) の形にかけるので, もし (ii) が正しいとすれば $\nu \rightarrow 0$ の極限で $< (\text{速度勾配の二乗}) >$ が発散することを意味している. このことはまた, NS 方程式に内在するダイナミクスによって自発的に乱流の速度場の滑らかさが失われることを意味している.

物体を過ぎる流れにおいては, ダランベールのパラドックスとして知られているように, 物体に働く力あるいはエネルギー散逸が完全流体 ($\nu = 0$) と実在流体の $\nu \rightarrow 0$ の極限は本質的に違う

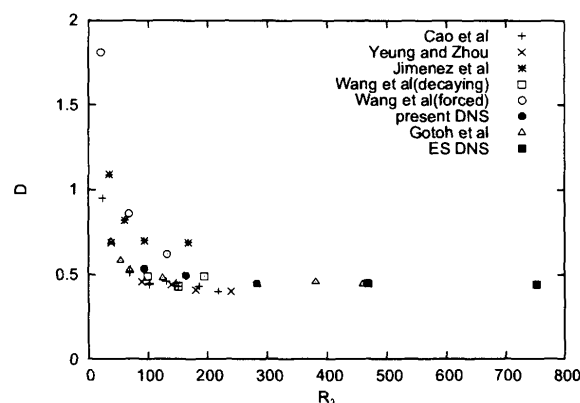


Fig. 1 規格化された平均エネルギー散逸率 D の R_λ への依存性. 文献 [4] から.

ことが分かっているが, (ii) は乱流中でも同じく $\nu = 0$ と $\nu \rightarrow 0$ とが本質的に違うことを意味している. この (ii) はほとんどの乱流理論あるいはモデルの基本仮定となっている.

Fig. 1 は文献 [5] で集められたデータも含む DNS による規格化された平均エネルギー散逸量 $D = \langle \epsilon \rangle L/U^3$ の R_λ 依存性を示している. (4) ここで, $(3/2)U^2 =$ 単位質量あたりの全運動エネルギーである. Fig. 1 では R_λ が $R_\lambda \leq 200$ 程度までは, D はたしかに R_λ とともに減少しているのが分かるけれど, $R_\lambda \rightarrow \infty$ で 0 に行き着くのか, あるいは 0 でない有限の値に近づくのか, それほどははっきりしない. 一方, $R_\lambda > 200$ を含むデータは $R_\lambda \rightarrow \infty$ で, D がある有限値に近づくことを強く示唆している.

3.2 エネルギースペクトル

もうひとつの基本的な疑問として小スケールにおけるエネルギースペクトル $E(k)$ がある. $E(k)$ は Kolmogorov の理論に従うのだろうか? とくに慣性小領域において $\propto k^{-5/3}$ に従うか? 我々の DNS によれば, たしかに $R_\lambda > 100$ 程度からおおむね $E(k) \propto k^{-5/3}$ となる領域が観察される. (4) Fig. 2 はそのような検証の一例であり規格化された 1 次元エネルギースペクトル $E_{11}(k_1)/(\langle \epsilon \rangle \nu^5)^{1/4}$ を示す. (6) ここで E_{11} はエネルギースペクトル $E(k)$ と

$$E_{11}(k_1) = \frac{1}{2} \int_{k_1}^{\infty} \left(1 - \frac{k_1^2}{k^2}\right) \frac{E(k)}{k} dk$$

の関係にある. Fig. 2 では $E_{11}(k) \propto k^{-5/3}$ に近い波数領域が実際に存在し, レイノルズ数の増大とともにその領域が広がっているのが観察される.

しかし, DNS データを詳しくみてみると $R_\lambda \sim 400$ 程度以上で, その指数が $-5/3$ からすこし違い, $E(k) \propto k^{-5/3+\mu}$ とすると $R_\lambda \sim 1000$ 程度で $\mu \sim -0.1$ となっている. (4)

慣性小領域より小さなスケール $k\eta \sim 1$ の波数領域におけるエネルギースペクトルについては

$$E(k)/(\langle \epsilon \rangle \nu^5)^{1/4} = C(k\eta)^\alpha \exp(-\beta k\eta)$$

がよく DNS と一致している. ここで α, β, C は k によらない定数であり, Re の増加とともにある定数に漸近する. このことは Kolmogorov の考え (3) に整合している. しかしその定数への漸近が非常に遅い. たとえばデータフィティングによる外挿によれば, $R_\lambda \sim 10,000$ の程度でも $|\beta(R_\lambda) - \beta(R_\lambda = \infty)|/\beta(R_\lambda = \infty) \sim 2.6$ である. (7)

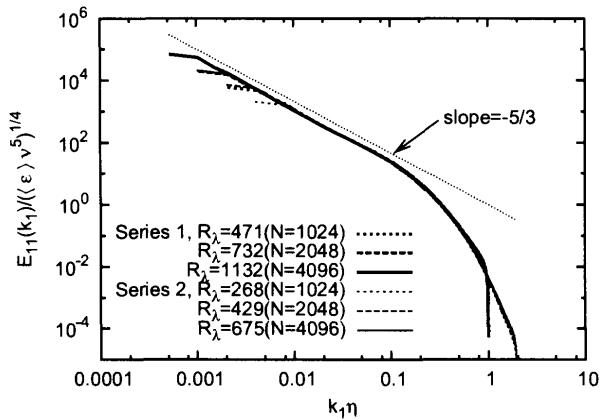


Fig. 2 規格化された 1 次元スペクトル $E_{11}(k_1)/((\epsilon \nu^5)^{1/4})$ 直線は $\propto k^{-5/3}$ を示す。文献 [6] から。

3.3 エネルギー散逸率の間欠性

Kolmogorov は Landau の批判を受け入れて乱流の間欠性を取り入れた K41 の修正理論を導くにあたって、半径 r の球内における単位質量単位時間あたりのエネルギー散逸率の平均 $\epsilon(r, t)$ を考えた。⁽⁸⁾ (以下、時間変数 t はとくに断らない限り省略する)

ϵ_n を $\epsilon_n \equiv \epsilon(r_n)$, $n = 0, 1, 2, \dots$ で定義すると、

$$\frac{\epsilon_n}{\epsilon_0} = \frac{\epsilon_n}{\epsilon_{n-1}} \frac{\epsilon_{n-1}}{\epsilon_{n-2}} \dots \frac{\epsilon_1}{\epsilon_0} = \alpha_{n-1} \alpha_{n-2} \dots \alpha_0, \quad \left(\alpha_n = \frac{\epsilon_{n+1}}{\epsilon_n} \right),$$

すなわち、

$$\log \frac{\epsilon_n}{\epsilon_0} = \log \alpha_{n-1} + \log \alpha_{n-2} + \dots + \log \alpha_0$$

が成り立つ。以下、 a を $a > 1$ の定数とし、 $r_n = r_0 a^{-n}$, $r_0 = L$ とする。この場合、 $\hat{\epsilon}(\tau) \equiv \epsilon(r)$ 、“仮想的”な時刻と速度 τ と $u(\tau)$ をそれぞれ $\tau = \log(r_0/r)$, $u(\tau) = d \log \hat{\epsilon}(\tau)/d\tau$ で定義すると、 $a \rightarrow 1$ の極限で次式を得る。

$$\frac{d\hat{\epsilon}(\tau)}{d\tau} = u(\tau)\hat{\epsilon}(\tau).$$

これらの関係式はエネルギー散逸率の間欠性の理解における $\{\alpha_n\}$ あるいは $u(\tau)$ の統計の理解の重要性を示している。実際 $\{\alpha_n\}$ あるいは $u(\tau)$ についての何らかの仮定を用いることによって、これまで対数正規理論やフラクタルモデルを含むさまざまな理論やモデルが導かれている。しかし、間欠性についてのさまざまな理論における $\{\alpha_n\}$ や $u(\tau)$ の果たす役割の重要性にも関わらず、それらの実験あるいは DNS による実証的研究は少なく、それらの統計の定量的知見は乏しい。

シリーズ 2 (R_λ が 732 までの範囲) の DNS データの解析によれば、以下のことが示唆される。⁽⁹⁾

- (i) $\hat{u}(\tau)$ の特性時間は十分短くはなく、この特性時間の有限性は無視できない影響をエネルギー散逸率の間欠性に及ぼす。
- (ii) $\log \alpha_n$ の平均および標準偏差は一般にスケール r による。すなわち、よく用いられる $\log \alpha_n$ の自己相似性の仮定は支持されない。
- (iii) しかし、一方、 $\hat{u}(\tau)$ と $\hat{u}(\tau+s)$ の相関が τ にほとんどよらないという領域が存在する。ただし、ここで $\hat{u} \equiv u - \langle u \rangle$ である。

Fig.3 は (iii) を示す結果の例であり、さまざまなスケール r すなわち、 τ について $\hat{u}(\tau)$ と $\hat{u}(\tau+s)$ の相関を s の関数として示している。 τ の違いによらず、いくつかの τ について s の依存性がよく一致しているのが分かる。

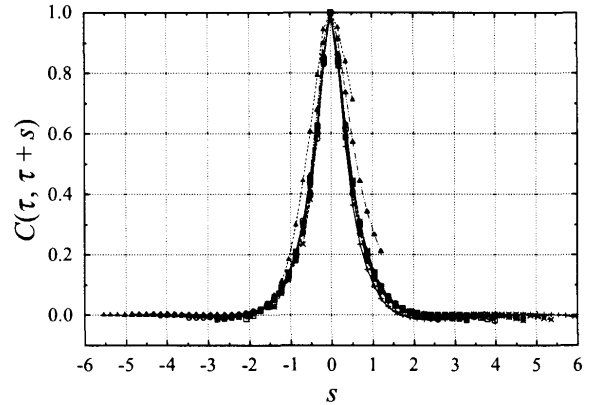


Fig. 3 シリーズ 2 の DNS ($N=2048$) における、 $\tau = t_n \equiv n \log 2$ ($n = 0, 1, \dots, 8$) における $\hat{u}(\tau)$ と $\hat{u}(\tau+s)$ の間の相関 $C_u(\tau, \tau+s)$ 。 $a = 2^{1/4}$ 。文献 [9] から。

3.4 微細渦構造とクラスター

大規模 DNS によって生成される膨大なデータ群から直感的理解を得るにはコンピュータグラフィックスの助けを借りた可視化が有効である。Fig.4 はそのような可視化の一例である。なお、図中 λ はテイラーマイクロスケールである。その図は小さなスケールの個々の渦の構造とより大きなスケールにおける、それらの渦の集まりであるクラスターの構造は明確に区別されなければいけないことを示している。なおこのような可視化については、文献 [2] あるいは [10] を参照されたい。後者には動画も含めいくつかの乱流場の可視化の例がある。

3.5 粗視化とエネルギー輸送率

粗視化あるいは LES モデルにおいてもっとも基本的役割を果たす物理量のひとつに大きな渦から小さな渦へのエネルギー輸送がある。ここでは次式で定義されるエネルギー輸送率を考える。

$$T = -\tau_{ij} \bar{S}_{ij}.$$

ここで、

$$\tau_{ij} = (\overline{u_i u_j} - \overline{u_i} \overline{u_j}) - \frac{2}{3} \delta_{ij} q, \quad q = (\overline{u_k u_k} - \overline{u_k} \overline{u_k}) / 2,$$

$\bar{S}_{ij} = (\partial \bar{u}_i / \partial x_j + \partial \bar{u}_j / \partial x_i) / 2$ であり、 u_i は直角座標系の i 方向の速度成分、 $\bar{f}$ は f の粗視化された成分で、繰返される添え字については和の記号を省略する。粗視化成分 $\bar{f}$ を定義するためのフィルターとしては波数 k がある切断波数 k_c 以上のフーリエ成分をすべて除去するものを用いることにする。 T の統計は当然粗視化のスケール k_c あるいは $r = \pi / (2k_c)$ に依存している。

DNS データによれば、 T の統計は以下の性質をもつ。(詳細および文献については [6], [11] を参照)

- (i) r が小さいほど T の間欠性は強く、高いレイノルズ数の場合その n 次モーメント $\langle T^n \rangle$ ($n = 2, 3, 4$) は慣性小領域である簡単なべき則に近い r への依存性を持つ。
- (ii) これまでの研究でよく知られているように、大半の領域で $T > 0$ 、すなわち大きな渦から小さな渦へエネルギーが輸送（順カスケード）されるが、その逆向きに輸送（逆カスケード）される $T < 0$ の領域もある。その $T < 0$ となる領域の体積分率は r が小さいほど大きくなり、慣性小領域でおおよそ 30 ~ 40% である。ただし、その r 依存性はそれほど強くない。なお、スペクトルカットフィルターの代わりにガウシアンフィルターを用いると $T < 0$ となる領域の体積分率は小さくなる。

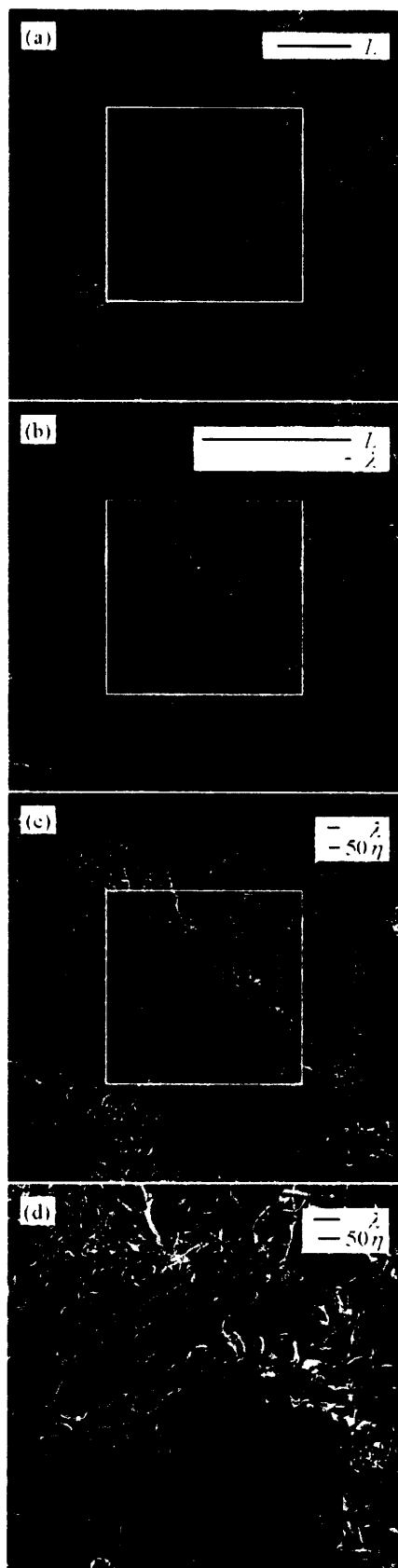


Fig. 4 DNS による乱流中の広いスケールにわたる渦構造（渦度の強いところ）の可視化例。(b),(c),(d)はそれぞれ(a),(b),(c)の白い四角内の拡大図。文献[10]から。

4. おわりに

近年のコンピュータのハード、ソフト両面における計算能力 (High-Performance Computing : HPC) の飛躍的増大は、乱流理解への新しい質的变化をもたらすと期待される。ここでは、主として乱流の大規模 DNS の側面からその乱流理解への試みを紹介したが、HPC の進展は (i) このような大規模 DNS だけでなく、(ii) これまで解析的には歯の立たなかった方程式についての手がかりを与える可能性をも提供する。講演では、(ii) の例として、乱流拡散問題に関連する、多変数特異偏微分方程式の固有値問題についての試みについても簡単に紹介したい。

本稿では、乱流のダイナミクスに固有の普遍性の探索という視点から、もっとも規範的乱流場のひとつである、周期境界条件下でのナビエ・ストークス方程式に従う乱流の DNS のデータ解析の結果について紹介した。現実の多くの乱流ではその固有ダイナミクスだけでなく、境界の存在、および乱流-層流部分の共存も重要な役割を果たす。その意味で、これらの効果が存在する規範的な乱流の DNS にも当然興味が持たれる。

その際、注意しないといけないのは、レイノルズ数が十分高い乱流とそうでないものには質的な違いがあるということである。たとえば、周期境界条件下での乱流場の可視化では、低いレイノルズ数では少数の強い渦が場全体を支配しているような印象を与えるけれど、レイノルズ数が高い場合はそうではないことを強く示唆する。その違いを混同しないためにも十分高いレイノルズ数の乱流 DNS が必要であるが、その DNS は必然的に大規模になる。HPC を駆使しての乱流の理解がさらに深まることが期待される。

本稿は文献 [6], [12] を基にまとめたものである。より詳細についてはこれらの文献を参照されたい。本稿で紹介した DNS およびデータ解析は、横川三津夫、板倉憲一、宇野篤也、石原卓、青山知弘、森下浩二、各氏との協力の下に行われたものである。記して謝意を表したい。

参考文献

- (1) J. von Neumann, in *Collected works (1949-1963)* 6, 437-472, ed. A.H. Taub. Pergamon Press, New York (1963).
- (2) M. Yokokawa, K. Itakura, A. Uno, T. Ishihara, & Y. Kaneda, Proc. IEEE/ACM SC2002 Conf., Baltimore, 2002; <http://www.sc-2002.org/paperpdfs/pap.pap273.pdf>, 2002.
- (3) A.N. Kolmogorov, Dokl. Akad. Nauk SSSR, **30**, (1941) 301-305.
- (4) Y. Kaneda, T. Ishihara, M. Yokokawa, K. Itakura, & A. Uno, Phys. Fluids, **15**, (2003) L21-24.
- (5) K. R. Sreenivasan & R. A. Antonia, Annu. Rev. Fluid Mech., **29**, (1997) 435-472.
- (6) Y. Kaneda & T. Ishihara, in *Progress in Turbulence II* (Proceedings of the iTi Conference in Turbulence 200), 11-16, eds. M. Oberlack et al., Springer-Verlag, Berlin Heidelberg (2007).
- (7) T. Ishihara, Y. Kaneda, M. Yokokawa, K. Itakura, & A. Uno, J. Phys. Soc. Jpn., **74**, (2005) 1467-1471.
- (8) A. N. Kolmogorov, J. Fluid Mech., **13**, (1962) 82-85.
- (9) Y. Kaneda & K. Morishita, J. Phys. Soc. Jpn., **76**, (2007) 073401-1-073401-4.
- (10) Y. Kaneda & T. Ishihara, J. Turbulence, **20**, (2006) 1-17.
- (11) T. Aoyama T., T. Ishihara, Y. Kaneda, M. Yokokawa, K. Itakura, & A. Uno A, J. Phys. Soc. Jpn., **74**, (2005) 3202-3212.
- (12) 金田 行雄, 機会学会論文集 (B 編), **72**, (2006) 2826-2830.