日本流体力学会年会 2007

渦管の3次元振動によって誘導されるドリフト流
Drift currents induced by three-dimensional motions of vortex tube

○廣田 真, 九大数理, 福岡県福岡市東区箱崎 6-10-1, E-mail: hirota@math.kyushu-u.ac.jp
Makoto HIROTA, Kyushu University, 6-10-1 Hakozaki, Higashi-ku, Fukuoka 812-8581

Drift currents induced by linear waves are considered in a general manner by imposing the topological constraint (or isovortical condition) on disturbances. The evolution equation for the Lagrangian displacement field is essential for generating such isovortical motions. The wave energy is naturally defined up to of the second order, which includes the inner product of the mean flow and the drift current. This drift current is computed analytically for the case of the Kelvin waves in a vortex tube.

1. 序論

流れを平均場と揺らぎに分解してみた場合、揺らぎの線形理論だけでなく、平均場のゆっくりとした変動まで考察することは、波と平均場の相互作用、又は弱非線形解析などと呼ばれ、物理的に重要である。日常的に見る流れ場のほとんどは少なからず揺らぎの成分をもっており、揺らぎが引き起こす平均場の変化は、質量や運動量の乱流輸送や磁場の生成 (ダイナモ) といった現象と深く結びついている。

この問題に対し、直接にオイラー方程式を摂動展開する手法は古くから用いられてきたが、近年、流体粒子の運動（ラグランジュ的記述）や渦のトポロジーに着眼した手法が脚光を浴びている。流体粒子の運動に対しては古典力学と同様にラグランジアンが定義され、最小作用の原理が成り立つことで知られる。そこで、流れ場ではなく、流体粒子の軌道が揺らいでいるとみなすと、揺らぎに対しても (擬) エネルギーや (擬) 運動量、渦度の保存則が成立し、力学的に自然な形で平均場と揺らぎを分解することができる。

本研究では、線形摂動 $\delta \boldsymbol{v}$ をラグランジュ変位場 $\boldsymbol{\xi}$ で表し、流れ場の揺らぎを $\boldsymbol{\xi}$ の時間発展方程式と関連付けた。このような摂動に対しては Arnold の方法によるハミルトニアンの第二変分 $\delta^2 H$ が摂動のエネルギーとみなせる。$\delta^2 H$ は二次オーダーであるが、その中には単なる線形摂動 $\delta \boldsymbol{v}$ の二乗だけでなく、平均場と二次流 $\delta^2 \boldsymbol{v}$ との相互作用も含まれている。この二次流は平均をとってもゼロとは限らず、揺らぎに伴うドリフト流と解釈される。本研究では渦管の 3 次元振動モードであるケルビン波に対して、このドリフト流の計算を具体的に行なった。

2. 解析方法

完全流体の運動を記述するオイラー方程式は、流体粒子の運動 (ラグランジュ的記述) から粒子の relabeling 対称性によって簡約化されたものである [1]。流体粒子の運動を体積保存の微分同相写像からなる Lie 群 G とみなせば、その Lie 代数 $\mathfrak{g}$ は非圧縮ベクトル場の集合である。オイラー的に見た流れ場 $\boldsymbol{v}$ はその双対空間 $\mathfrak{g}^*$ に属し、オイラー方程式は

$$\frac{\partial \boldsymbol{v}}{\partial t} = -\mathrm{ad}^* \left(\frac{\delta H}{\delta \boldsymbol{v}} \right) \boldsymbol{v}, \qquad (1)$$

のように Lie-Poisson 方程式の形で表せる。ここで、$H : \mathfrak{g}^* \to \mathbb{R}$ はハミルトニアン $H = \int \frac{1}{2} |v|^2 d^3 x$ であり、$\mathrm{ad}^*(\boldsymbol{\xi}) : \mathfrak{g}^* \to \mathfrak{g}^*$ は co-adjoint action と呼ばれる。具体的には、任意の $\boldsymbol{\xi} \in \mathfrak{g}, \boldsymbol{v} \in \mathfrak{g}^*$ に対して、

$$-\mathrm{ad}^*(\boldsymbol{\xi})\, \boldsymbol{v} = \mathbb{P}[\boldsymbol{\xi} \times (\nabla \times \boldsymbol{v})] \qquad (2)$$

である。ここで、$\mathbb{P}$ は非圧縮ベクトル場 $\mathfrak{g}^*$ への射影である。

ある定常解 $\boldsymbol{v}_e$ のまわりにおいて、オイラー方程式の解を

$$\boldsymbol{v}(t) = \boldsymbol{v}_e + \delta \boldsymbol{v}(t) + \frac{1}{2} \delta^2 \boldsymbol{v}(t) + \dots \qquad (3)$$

のように展開したとする。摂動展開法によって、$\delta \boldsymbol{v}(t)$ や $\delta^2 \boldsymbol{v}(t)$ を順次求めていく方法もよく用いられるが、$\delta^2 \boldsymbol{v}(t)$ が発散して摂動展開が破綻することもあり、その場合にはマルチスケール解析などを用いた繰り込みを行わなければならない [2]。

一方、オイラー方程式がもつ運動学的性質 (トポロジー) を考慮すれば、摂動のエネルギーに対してより簡単な議論ができる。そのためには、摂動を渦度の保存則を見たすようなものに制限すること (isovortical condition) が本質的である [1]。

$$\delta \boldsymbol{v} = -\mathrm{ad}^*(\boldsymbol{\xi}) \boldsymbol{v}_e = \mathbb{P}[\boldsymbol{\xi} \times \boldsymbol{\Omega}], \qquad (4)$$

$$\delta^2 \boldsymbol{v} = \mathrm{ad}^*(\boldsymbol{\xi}) \mathrm{ad}^*(\boldsymbol{\xi}) \boldsymbol{v}_e = \mathbb{P}[\boldsymbol{\xi} \times \nabla \times (\boldsymbol{\xi} \times \boldsymbol{\Omega})], \qquad (5)$$

ここで、$\boldsymbol{\Omega} = \nabla \times \boldsymbol{v}_e$ は渦度とした。物理的に、$\boldsymbol{\xi} \in \mathfrak{g}$ は流体粒子のラグランジュ変位場に相当し、これによって生成される流体の連続的な変形に対して、渦度が凍りついていることを表す。

Arnold が用いたこの変分は、実際の「摂動」とみなして時間発展 $\boldsymbol{\xi}(t)$ を考察することが可能である [3]。これを (4) や (5) に代入して得られた $\delta \boldsymbol{v}(t)$ や $\delta^2 \boldsymbol{v}(t)$ には、

$$\delta^2 H = \langle \delta \boldsymbol{v}, \delta \boldsymbol{v} \rangle + \langle \boldsymbol{v}_e, \delta^2 \boldsymbol{v} \rangle = \text{const.} \qquad (6)$$

が成り立ち、ハミルトニアンの第二変分を摂動のエネルギー (or 擬エネルギー) とみなすことができる。

ここで、流れ場を十分に長い時間で平均すると、

$$\overline{\boldsymbol{v}} = \boldsymbol{v}_e + \overline{\delta^2 \boldsymbol{v}} + \dots, \qquad (7)$$

となり、$\overline{\delta^2 \boldsymbol{v}}$ がゼロでなければ、それは揺らぎによって誘導されたドリフト流とみなせる。本研究では具体的な問題として、平均場 $\boldsymbol{v}_e$ が渦管で、$\boldsymbol{\xi}(t)$ がケルビン波のような振動モードの重ね合わせである場合を考察した。これに対しては解析的にドリフト流を求めることができる。

参考文献

(1) V. I. Arnold & B. A. Khesin, "Topological Methods in Hydrodynamics" (Springer-Verlag, New York, 1998).

(2) D. Sipp, "Weakly nonlinear saturation of short-wave instabilities in a strained Lamb-Oseen vortex", Phys. Fluids **12**, pp.1715-1729, (2000).

(3) V. F. Kop'ev & S. A. Chernyshev, "Vortex ring oscillations, the development of turbulence in vortex rings and generation of sound," Physics-Uspekhi. 43(7), pp.663-690, (2000).