

混合気体に対するモデル・ボルツマン方程式の構築と数値的比較

Construction and Numerical Comparison of the Model Boltzmann Equation for Gas Mixtures

○小菅真吾, 京大工, 京都市左京区吉田本町, E-mail: kosuge@aero.mbox.media.kyoto-u.ac.jp

Shingo KOSUGE, Kyoto University, Yoshida-honmachi, Sakyo-ku, Kyoto 606-8501, Japan

A new model Boltzmann equation for gas mixtures, which might be regarded as a nonlinear version of the McCormack model for the linearized Boltzmann equation [McCormack, F. J., Phys. Fluids **16**, 2095 (1973)], is constructed. The new model is not restricted to the Maxwell molecule but can fit to general molecular models, as in the case of the McCormack model. Some fundamental boundary-value problems in the case of a binary gas mixture are considered on the basis of the new model and other existing models as well as of the original Boltzmann equation. Then the numerical solutions of those different equations are compared with one another. As a result, it is shown that the new model reproduces well solutions of the Boltzmann equation at least in the case of weak nonequilibrium.

1. はじめに

ボルツマン方程式は希薄理想気体の挙動を記述する方程式だが、その衝突項(気体分子衝突の効果を表す項)は複雑な多重積分で表わされており取扱いが難しい。そのため実際の解析では、衝突項の本質を残して簡略化したモデル方程式がよく利用されている。例えば気体が単一成分の場合は BGK モデル⁽¹⁾や ES モデル⁽²⁾がよく知られており、それらとボルツマン方程式との数値的比較も報告されている。

同様のモデル方程式は、混合気体の場合についても提案されている。筆者らは最近、混合気体に対する幾つかの既存モデルとボルツマン方程式との数値的比較を行い⁽³⁾、次いで新しいモデルを構築して比較した結果を示した⁽⁴⁾。講演ではこれらの文献で示した結果に加えて、他の数値例も交えて報告する。

2. モデルの構築

既存のモデル方程式の多くは、その衝突項の(分子速度についての)低次のモーメントが、マクスウェル分子を適用したボルツマン方程式の場合と合致するように作られている。^(3,4) それゆえマクスウェル分子気体に対するモデル方程式だと見なせる。一方、McCormack のモデル方程式⁽⁵⁾(混合気体の線形化ボルツマン方程式に対するモデル)は、マクスウェル分子に限らず様々な分子モデルに適合できる。特に混合気体の場合、マクスウェル分子では熱拡散が生じないなどの不具合もあることから、より現実的な分子モデルによる解析が求められる場面で、このモデル方程式はよく利用されている。

文献(4)では McCormack モデルの構築手順を非線形ボルツマン方程式に適用して、新しいモデル方程式を導いた。このモデルは McCormack モデルと同様、一般の分子モデルに適合できる。実際、次節の数値例で示すように、新モデルは剛体球分子ボルツマン方程式の結果を再現することもできる。またマクスウェル分子気体の場合に既存の他のモデルと比較すると、他のモデルよりも1つ高次のモーメントまでボルツマン方程式と一致する。その結果、既存のモデルよりも新モデルの方がボルツマン方程式の解を良く再現する。ただし強い非平衡を伴う場合には不安定になり、物理的でない解を与えることがある(気体分子の速度分布関数が負になる等)ため注意が必要である。

3. 数値的比較：剛体球分子の場合

剛体球分子の場合に、ボルツマン方程式と文献(4)の新モデルとで数値解を比較する。以下では文献(6)で解析された問題を考える。すなわち平行平面凝縮相間の蒸気(気体 A)と、それとは別種で蒸発・凝縮をしない非凝縮性気体(気体 B)からなる2成分混合気体の定常的挙動を求める。平面凝縮相の位置を $X_1 = 0$

と D 、それぞれの温度を T_I と T_{II} 、その温度における飽和蒸気数密度をそれぞれ n_I^A と n_{II}^A とし、非凝縮性気体の平均数密度を n_{av}^B とする。また各気体の分子の質量を m^A と m^B 、直径を d^A と d^B とする。

図1に結果を示す。ここでは右の凝縮相界面で蒸発が、左で凝縮が起こり、蒸気の定常な流れが誘起されている。非凝縮性気体は蒸気流により左の凝縮相に向けて吹き寄せられている。気体の希薄度(クヌーセン数 $Kn = \ell_*/D$; ℓ_* は基準平均自由行程)が小さく、分子衝突の効果が大きくなるにつれ、非凝縮性気体が蒸気流を妨げる効果が増す($|v_1^A|$ は減少する)。新モデルの結果とボルツマン方程式のそれとは、温度では少しずれが見られるものの、数密度と流速についてはよく一致している。

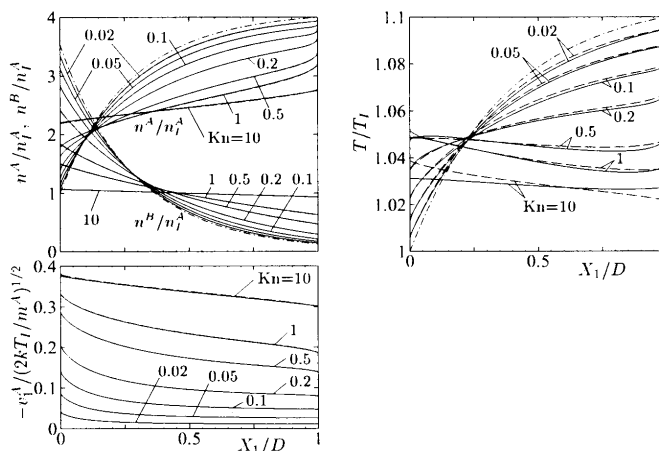


Fig. 1 Profiles of number densities n^A and n^B , temperature T , and flow velocity v_1^A in the case of $T_{II}/T_I = 1.1$, $n_{II}^A/n_I^A = 4$, $m^B/m^A = 1$, $d^B/d^A = 1$, $n_{av}^B/n_I^A = 1$, and $0.02 \leq Kn \leq 10$. The — indicates results of the Boltzmann equation, — — those of the new model, and — · — those of the Boltzmann equation in the continuum limit ($Kn \rightarrow 0$). k is Boltzmann's constant.

参考文献

- (1) Bhatnagar, P. L., Gross, E. P., & Krook, M., Phys. Rev. **94**, 511 (1954); Welander, P., Ark. Fys. **7**, 507 (1954).
- (2) Holway, L. H., Phys. Fluids **9**, 1658 (1966).
- (3) Kosuge, S., Mizuno, H., & Aoki, K., Proc. 25th Int. Symp. on Rarefied Gas Dynamics (2007), p. 286.
- (4) Kosuge, S., Eur. J. Mech. B/Fluids (published online on May 22, 2008).
- (5) McCormack, F. J., Phys. Fluids **16**, 2095 (1973).
- (6) Aoki, K., Takata, S., & Kosuge, S., Phys. Fluids **10**, 1519 (1998).