2次元流体中で周期運動する翼に働く力の表式とその昆虫飛翔への応用

Force acting on flapping wing in two-dimensional fluid and its application to insects flight

○飯間信, 北大電子研, 〒001-0020 札幌市北区北 20 条西 10 丁目, E-mail:makoto@nsc.es.hokudai.ac.jp
Makoto Iima, Research Institute for Electronic Science, N20W10 Sapporo, 001-0020, JAPAN

A formula for the averaged force acting on a two-dimensional oscillating body situated in a uniform flow is obtained on the basis of the incompressible Navier-Stokes equations and the general force formula obtained by Imai in 1974. The averaged force is determined only by the asymptotic behaviour of the time-averaged flow if the flow is temporally periodic. The formula is applied to calculate the force acting on an animal during hovering.

流体中で運動する物体に働く力を理論的に求めることは流体力学の基本的な問題であるとともに様々な応用につながる大事な問題である。2次元流れの一般的な場合 (非圧縮、非定常、渦度ありの場合)、今井 [(2)] により複素形式で公式が与えられており、物体を含む任意の閉曲線上での積分で物体に働く力が計算できる。ここでは今井による公式を周期運動する物体に適用した結果について報告する [(3)]。

ここでは無限に広がる空間内の2次元非圧縮流体を考え、無限遠での流速が x 軸に平行に U であるとする。この流体の中を物体 B が任意の速度で周期 T の時間周期的に運動し、それにより同じ周期をもつ時間周期的な流れが発生するものとする。流体は Navier-Stokes 方程式に従う物とする。このとき、B に働く力の時間平均を $\langle \boldsymbol{F}\rangle = (\langle F_x\rangle, \langle F_y\rangle)$ と書くと、$\langle \boldsymbol{F}\rangle$ は応力テンソルの B 上での積分で記述される。ここでの第一の目的は $\langle \boldsymbol{F}\rangle$ を流れの漸近的性質によりあらわすことである。

ここでは物体から遠く離れた場所での速度場について考える。物体近くに原点 O をとり、無限遠で一様流 $(U, 0)$ に漸近するとする。流れ場の一様流からのずれを $\boldsymbol{v}$、そのずれに対する流れ関数を ψ と書くと、$\omega = \nabla \quad \boldsymbol{v}$ を定める方程式は、

$$\frac{\partial \omega}{\partial t} + 2\nu k \frac{\partial \omega}{\partial x} - \nu \quad \omega = \frac{\partial(\psi, \omega)}{\partial(x, y)}, \tag{1}$$

となる ($k = \frac{U}{2\nu}$)。遠方では $|\boldsymbol{v}| \ll U$ が成り立つので ψ と ω が小さいと仮定すると右辺が無視できて Oseen 方程式となる。その解は $\omega(\boldsymbol{x}, t) = \sum_{n=\ \infty}^{\infty} \sum_{m=\ \infty}^{\infty} \omega_{m,n}(\boldsymbol{x}, t)$, $\omega_{m,n}(\boldsymbol{x}, t) = C_{m,n} e^{i\Omega_n t} e^{kx} e^{im\theta} H_m^{(1)}(z)$, ($C_{m,n}$ は定数) と書ける。ここで $H_m^{(1)}(z)$ は第一種ハンケル関数である。

ハンケル関数の漸近形から、遠方では $n = 0$ の場合、放物線 $x = \frac{k}{2C} y^2 - \frac{C}{2k}$ 内部、$n \neq 0$ の場合、楕円 $k^2(p_n^2 - 1)\left\{x - \frac{C}{k(p_n^2\ \ 1)}\right\}^2 + k^2 p_n^2 y^2 = \frac{p_n^2}{p_n^2\ \ 1} C^2$ の内部でのみ $\omega_{m,n}$ が大きな値を取ることが示される。$n = 0$ は流れの時間平均成分に対応し、この成分は定常 Oseen 方程式の wake と一致する [(1)]. 一方、$n > 0$ の場合は非定常成分に対応し、領域が有界であり、$\omega_{m,n}$ がしめる領域 $A_n (n \geq 1)$ 間での包含関係は、$A_1 \supset A_2 \supset ...$, のようになる。

以上を踏まえて、今井 [(2)] の導いた公式を周期運動する物体に対して適用すること以下の結果を得る:

$$\langle F\rangle = -\frac{i}{2}\rho \oint_C \langle \overline{W}\rangle^2 \mathrm{d}\bar{z} - 2\mu \oint_C z \frac{\partial \langle \omega\rangle}{\partial z} \mathrm{d}z + i\rho \oint_C \langle \omega\rangle z \langle \mathrm{d} \quad \rangle. \tag{2}$$

(C の半径は十分大きい). この式で周期運動する物体に働く力が求められる。この公式 (2) は定常流に関する公式と同じ形をしており、更に定常流中に置かれた物体周りの流れは今井 [(1)] により既に研究されていて、物体に掛かる力が

$$\langle F\rangle = \rho U(\langle m\rangle + i\langle \Gamma\rangle), \tag{3}$$

と表される。結局周期流であっても、定常流と同じ公式が使えることが分かった。

応用例として昆虫の飛翔を考える。昆虫が周期的にはばたき運動を行い、その結果平均してある一方向に進んでいる場合を考える。昆虫の平均進行速度を $\langle V\rangle$ とすると時間平均した力の x 成分 $\langle X\rangle$ は式 (3) により $X = -\rho\langle V\rangle\langle m\rangle$ となる。ここでは $\langle V\rangle \to 0$ の極限で X がどの様な挙動を示すかを考える。そのために必要な $\langle m\rangle$ を見積もるために流れの漸近挙動を Oseen 近似により調べることにする。定常 Ossen 方程式の一般解を用い、物体を含む大きな円内からのフラックスがゼロであり、しかも流速が有限であるという条件を課すと、$\langle m\rangle = \frac{D_0}{k \ln(kr_0)} + O(kr_0)$, ($D_0$ はある定数) となり、

$$\langle X\rangle = \frac{\rho\nu}{2} k \langle m\rangle = \frac{D_0'}{\ln(kr_0)} + O(kr_0). \tag{4}$$

(D_0' は kr_0 と独立な定数) となることがわかり、$\langle V\rangle \to 0$ の極限で

$$\lim_{\langle V\rangle \to 0} \langle X\rangle = \lim_{kr_0 \to 0} \langle X\rangle = 0. \tag{5}$$

となる。はばたき飛行を行う昆虫は、はばたき方の詳細に寄らず空中停止の極限で生成する力がゼロとなり飛べなくなる。

昆虫の飛翔などの解析においてはこれまで翼の運動の詳細や渦構造の詳細、あるいはそれらの動力学の解析が行われてきたが、この結果によれば力を決めるのは遠方場の性質のみにである。今後渦構造と遠方場の関係を調べることで予測や評価が可能になるものと思われる。また昆虫の空中停止に関する結果は、実は Stokes のパラドックスと同等の構造を持っている。というのは流れが周期的である場合でも遠方の流れは平均流で記述され、空中停止（つまり一様流がゼロ）の極限では遠方場は Stokes 方程式で記述される。この極限でも変動成分は有界にとどまる。よく知られているように2次元で物体周りの流れを計算するとき、無限遠で有界な Stokes 方程式の解は存在しないので、無限遠で有界な解を求めようとすると力がゼロとなってしまうのである。

最後に、東工大の宮本安人博士には証明を読んでいただいたことに感謝します。また本研究は科研費 (19740228,20033009) の助成を受けたものである。

参考文献

(1) I. Imai. On the asymptotic behaviour of viscous fluid flow at a great distance from a cylindrical body, with special reference to filon's paradox. *Proc. R. Soc. Lond. A*, 208:487–516, 1951.

(2) 今井 功. 仮想質量と仮想角運動量 – 渦運動への応用. In **第 *29* 回日本物理学会予稿**, 1974.

(3) M. Iima. A paradox of hovering insect in two-dimensional space. *submitted.*