

平面クエット系における層流-乱流吸引域境界上の周期解の不安定多様体

The unstable manifold of the periodic solution on the basin boundary between laminar and turbulent attractors in a plane Couette system

○松村篤, 大阪大, 大阪府豊中市待兼山 1-3, E-mail:atsushi324@mbox.me.es.osaka-u.ac.jp

河原源太, 大阪大, 大阪府豊中市待兼山 1-3, E-mail:kawahara@me.es.osaka-u.ac.jp

レナート・ファン・フェーン, コンコルディア大, カナダ, E-mail:lvanveen@mathstat.concordia.ca

Atsushi Matsumura, Osaka University, Osaka Japan

Genta Kawahara, Osaka University, Osaka Japan

Lenneart van Veen, Concordia University, Canada

The unstable manifold of the quiescent periodic orbit (Kawahara and Kida 2001) for plane Couette flow is computed numerically at Reynolds number $Re = 400$. The dimension of the unstable manifold in phase space is only two, while the stable manifold of the periodic solution has the remain of dimension, implying that the periodic solution and its stable manifold form the basin boundary between laminar and turbulent attractors. State points with amplitude just beyond a critical value for transition to turbulence are observed to approach the periodic orbit transiently, and then they are found to exhibit transition nearly along the unstable manifold of the periodic orbit. As a consequence, dynamical behaviour of transition starting with slightly super-critical amplitude can be described in terms of the unstable manifold of the periodic orbit.

1. 平面 Couette 系の周期解

最も基本的な壁面剪断流の 1 つである平面 Couette 系において, 少なくとも 1 つの不安定周期解が存在することが知られている⁽¹⁾. その解は $Re = 400$, 周期箱寸法 $(L_x, L_z) = (1.755\pi h, 1.2\pi h)$ ⁽²⁾ (h は平板間距離の半分) において, エネルギー注入率 I , エネルギー散逸率 D が共におよそ 2 の値を示す. これらの値は乱流ではおよそ 3, 層流では 1 の値を取り, 周期解が層流に近い静穏な流れであることが分かる. またこの不安定周期解の不安定多様体は 2 次元であり, その安定多様体は層流と乱流の吸引域境界を形成する.

そこで, この解の不安定多様体について解析を行うことによって有限振幅であるものの弱い摂動による乱流遷移の説明を試みる. 本稿では弧長法を用いることによって, 相空間での特定の断面 (超平面) における不安定多様体を計算した. また, 不安定多様体と乱流遷移の動力学との関係に関する議論を行った.

2. 不安定周期解の不安定多様体

弧長法を用いて不安定周期解の多様体を計算した結果, 関数 $g = I + D$ が 6.4 までの g において, サークル状の閉じた射影を得ることが出来た. 乱流における g は長時間平均を取った場合およそ $g = 6$ である. そのため $g = 6.4$ よりも小さい g における不安定多様体を解析することによって, 乱流への遷移を表現することが出来ると考えられる. $g = 6.0$ 以降の不安定多様体の各種統計量 (RMS 速度, RMS 渦度, 平均速度) や流れ場の構造を観察すると, 同じ $g = \text{const}$ 上の超平面にあったとしても, 閉曲線上の位置により大きな違いが見られることが分かった. 流れ場の状態が非常におとなしく, 周期解からの変化がほとんど見られない位置や, 構造が非常に複雑であり, 乱流と区別がつかないような統計量を示す位置もあった. Fig.1 は計算した多様体の超平面上の射影 ($g = 5.0, 5.5, 6.0, 6.4$) を示す. この図の 2 軸は, 乱流の 3 次元エネルギーと流れ方向渦度 ω_x をエネルギーと渦度で規格化したもので, これらの軸ではられる確率密度関数 (pdf) と不安定多様体を比較した場合, $g = 5.0$ から $g = 6.4$ までの多様体は pdf の大部分の領域に渡って広がっていることが分かった.

3. 簡単な摂動による乱流遷移

層流に対する簡単な摂動の注入によって起こる乱流遷移を考える. 我々の計算において, 流れ場を表すためのベクトル場は壁垂直 (y) 方向速度 v , y 方向渦度 ω_y , 流れ方向 (x) 速度 u とスパン方向 (z) 速度 w のフーリエ級数のうちの波数が 0 である成分 (ゼロモード) によって決まる. 摂動は v にのみ与え, その他の成分 ω_y, u, w のゼロモードは 0 とした. ここで v の値は,

$$v = A(y-1)^2(y+1)^2 \left\{ \sin\left(\frac{2\pi x}{L_x}\right) + \sin\left(\frac{2\pi z}{L_z}\right) \right\} \quad (1)$$

である. ここで A は振幅の大きさを表す. 摂動は数値計算における境界条件を満たす. この v によって作られる流れ場は $\pm y$ 方向のジェットが 1 つずつ存在する流れとなる. 計算の結果 $A = 0.095$ が振幅の臨界を僅かに超えた値であることが分かった. Fig.1 は摂動による乱流遷移を示す. 臨界を僅かに超えた摂動による乱流遷移軌道は不安定多様体の付近を通ることが分かる. また, 流れ場の構造を比較したところ, 多様体と乱流遷移は類似した構造をとることが観察出来た. 摂動の振幅が $A = 0.010$ である場合についても確認をした結果, 臨界に近い場合と同様, 多様体と乱流遷移の間で良い対応が見られた.

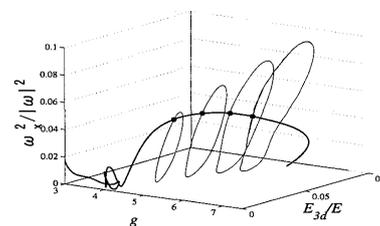


Fig. 1 Projection of unlabel manifold on hyperplanes $g = 5.0, 5.5, 6.0, 6.4$ and trajectory representing transition to turbulence. Dots on the trajectory denote intersections on the hyperplanes $g = 5.0, 5.5, 6.0, 6.4$

参考文献

- (1) G.Kawahara and S.Kida, *J. Fluid Mech.* **449**, (2001) 291-300.
- (2) Hamilton, J. M et al. *J. Fluid Mech.* **287**, (1995) 317-348.