点渦系の保存則に対する勾配系の方法

A gradient method for conservation laws of point vortices

梅木　誠, 東大院理, 東京都文京区本郷 7-3-1, umeki@phys.s.u-tokyo.ac.jp:

Makoto Umeki, Department of Physics, Graduate School of Science,
University of Tokyo, 7-3-1, Hongo, Bunkyo-ku, Tokyo

A hamiltonian (H) system with a gradient term is studied from the viewpoint of the temporal behavior of the conserved quantities. If we take a suitable potential G, the conserved quantities approach constants which are given as free parameters. This property holds even if there is another conserved quantity in addition to the hamiltonian. Two examples are given in order to demonstrate this hamiltonian-gradient (HG) system. One is a simple harmonic oscillation and the other is a system of many point vortices. The latter is a typical hamiltonian system with two conserved quantities. Analytical and numerical results of the H and HG system are given and compared to each other, by using various explicit finite difference schemes, including the Euler's, Heun's, and the fourth-order Runge-Kutta methods.

1. はじめに

連立常微分方程式であるハミルトン系が持つハミルトニアンやそれ以外の保存量は、それを差分化した数値計算においても、長時間保存される事が望ましい。差分化による数値誤差（打切り誤差）や丸め誤差は、保存量の時間発展については中立であり、一般には長時間積分において保存量は徐々に増加または減少する場合が多い。本講演では、あるハミルトン系に対して、勾配形の項を加えた系を考え、その性質を議論する。

2. ハミルトン勾配系

以下のようなハミルトン勾配系を考える。

$$\frac{dx_j}{dt}=\frac{\partial H}{\partial y_j}-\frac{\partial G}{\partial x_j},\quad \frac{dy_j}{dt}=-\frac{\partial H}{\partial x_j}-\frac{\partial G}{\partial y_j},\quad H=H(x_j,y_j),$$

保存量が H と I の場合、ポテンシャル G として

$$G=\frac{\alpha}{2}(H-H_0)^2+\frac{\beta}{2}(I-I_0)^2,$$

を取る。ここで、$\alpha>0,\beta>0$ は定数であり、$_0,I_0$ も定数パラメータとする。この場合、G の時間発展は

$$\frac{dG}{dt}=\frac{1}{2}\frac{d}{dt}[\alpha(H-H_0)^2+\beta(I-I_0)^2]$$

$$=(H-H_0\;I-I_0)\begin{pmatrix}\alpha & 0\\ 0 & \beta\end{pmatrix}\frac{d}{dt}\begin{pmatrix}H-H_0\\ I-I_0\end{pmatrix}$$

$$=-(H-H_0\;I-I_0)\begin{pmatrix}\alpha & 0\\ 0 & \beta\end{pmatrix}\begin{pmatrix}A & B\\ B & D\end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix}\alpha & 0\\ 0 & \beta\end{pmatrix}\begin{pmatrix}H-H_0\\ I-I_0\end{pmatrix}$$

$$=-(H-H_0\;I-I_0)\begin{pmatrix}A\alpha^2 & B\alpha\beta\\ B\alpha\beta & D\beta^2\end{pmatrix}\begin{pmatrix}H-H_0\\ I-I_0\end{pmatrix}\qquad(1)$$

となる。

$$(x_1,y_1,x_2,y_2,\cdots)=(X_1,X_2,X_3,X_4,\cdots),$$

$$\frac{\partial H}{\partial X_j}=Y_j,\quad \frac{\partial I}{\partial X_j}=Z_j$$

と書きなおす。

$$B=Y_1Z_1+\cdots+Y_NZ_N,$$

$$A=Y_1^2+\cdots+Y_N^2>0,\ D=Z_1^2+\cdots+Z_N^2>0$$

$$B^2-AD=-\sum_{j>k}(Y_jZ_k-Y_kZ_j)^2<0$$

となり、2 次形式 (1) は負となり (0 となるのは $A=B^2-AD=0$ の場合)、G は時間とともに減少する事がわかる。

種々の差分法（オイラー法、ルンゲクッタ法など）による HG 系の数値計算例を (1) 単振動 (2) 円内の点渦系（保存量はハミルトニアンと角インパルス）の場合で紹介する。

3. 単振動

単振動の場合、オイラー法、Hein 法、4 次 Runge-Kutta 法のいずれも、定数である x^2+y^2 の値がそれぞれ、初期から Δt 後には、初期値から Δt^2,Δt^4,Δt^6 に比例したずれを生じる。また、この場合はハミルトニアンが変数分離型なので、シンプレクティック積分法を用いることができる。シンプレクティック積分法を用いれば、x^2+y^2、あるいはハミルトニアンが単調に増大することはない。HG 系を用いれば、x^2+y^2 はパラメータで与えた x^2+y^2 の初期の値に近づいていく。

4. 円内の点渦

単位円内の同一点渦の運動は以下のハミルトニアンで記述される。

$$H=H_1+H_2+H_3,\qquad(2)$$

$$H_1=-\frac{1}{2}\sum_{j>k}\log[(x_j-x_k)^2+(y_j-y_k)^2],\qquad(3)$$

$$H_2=\frac{1}{2}\sum_{j>k}\log[(x_kx_j+y_ky_j-1)^2+(y_kx_j-x_ky_j)^2],\qquad(4)$$

$$H_3=\frac{1}{2}\sum_{j}\log(1-x_j^2-y_j^2).\qquad(5)$$

ハミルトニアンに加えて、次式で与えられる角インパルスも保存量である。

$$I=\frac{1}{2}\sum_{j}(x_j^2+y_j^2).\qquad(6)$$

数値計算例 ($N=100$) を講演時に示す。参考文献は [1] にある。

参考文献

(1) M. Umeki, A hamiltonian-gradient system for multiple conservation laws, (2010), preprint for Theoretical and Applied Mechanics Japan Vol. 59.