確率的ボルツマン方程式の粗視化とモーメント方程式
The coarsely grained stochastic Boltzmann equation and its moment equations

○矢野良輔, 東大新領域, 千葉県柏市柏の葉 5-1-5, E-mail: yano@daedalus.k.u-tokyo.ac.jp
鈴木宏二郎, 東大新領域, 千葉県柏市柏の葉 5-1-5, E-mail: kjsuzuki@k.u-tokyo.ac.jp
Ryosuke Yano, Univ. of Tokyo, 5-1-5, Kashiwanoha, Kashiwa, Chiba
Kojiro Suzuki, Univ. of Tokyo, 5-1-5, Kashiwanoha, Kashiwa, Chiba

The stochastic Boltzmann equation is coarsely grained in (3+1) spacetime. The coarsely grained stochastic Boltzmann equation does not coincide with the Boltzmann equation owing to the product of fluctuating moments, which are considered to be non zero values by taking average in (3+1) spacetime. The violation of "molecular chaos" is expressed by the multistaged collision terms in the mean collision time. Finally, reduced Grad's 26 moment equations indicates that fluctuations of one higher order moments emerge in Navier-Stokes-Fourier equation.

1. はじめに

揺らぎのある流体力学方程式は、マイクロ流れにおいて近年、重要視されている．一方で、観測される"揺らぎ"というものに対してその数学的対応には、正確な解は無い．過去に、久保 [1] は、線形応答理論から、揺らぎをマクロな熱力学的系へと接続したが、この接続は、系が平衡に極めて漸近した系に限られる．1960-70 年代には、揺らぎをメゾスコピックな系から定式化しようという試みが、Fox-Uhlenbeck[2] や Logan-Kac[3] らにより行われた．一方で、Uhlenbeck らの定式化は、ボルツマン方程式の右辺に揺動力による散逸項を加えるという形式が取られ、揺動力の項は、揺動散逸定理に合う様、その性質が決定されている．従って、Uhlenbeck らの定式化は数学的に閉じておらず、非平衡系へそのまま拡張する事は、極めて困難といえる．そこで、分布関数そのものをミクロな視点で出発する、所謂、クリモントビッチ型の確率的分布関数を用いて、確率的ボルツマン方程式を導出し、そこから、揺動散逸定理を導き出す方法は、Ueyama[4] や Tsuge-Sagara[5] らにより、行われた．特に、Tsuge-Sagara は、相関関数を導入する事で、自己相関関数の時間 0 極限における平衡漸近解として、グラッドの 13 モーメント方程式から、揺動散逸定理を導出した．本文では、Tsuge-Sagara の方法に基づいて、確率的ボルツマン方程式の時空間における平均化 (以降、粗視化という)、が結果としてどのような方程式となるかを考えることとする．通常、揺らぎの項を散逸項に取り入れた、Landau-Lifshitz-Navier-Stokes-Fourier (LLNSF) 方程式 [6] を、空間で粗視化すれば、揺らぎの項は 0 となるが、果たして、同様に、確率的ボルツマン方程式も空間の粗視化による揺らぎの項が 0 へと漸近するか考える．また、分子は、平均化に用いた空間セルの外に平均衝突時間内に飛び出さないという仮定を置き、衝突時間を 0 に漸近させる事で、衝突項を、多段階に分割し、分子カオスの破れを考えた．最後に、簡易化した 26 モーメント方程式から NSF 則を導き出し、揺らぎの効果がどのように出現するかを考える．

2. 議論

連続時空間で定義されている確率的ボルツマン方程式は、離散的時空に於いて粗視化された．時間軸は、衝突項を多段化することで粗視化された．空間における粗視化では、ボルツマン方程式の衝突項における非線形効果により、揺らぎの積の空間平均値は、非ゼロな値として残る事を示した．また、粗視化されたボルツマン方程式から導かれる NSF 則では、せん断応力、熱流束ともに、自身よりも 1 次高いモーメントの揺らぎの影響を受ける事がわかった．しかし、一方で、モーメント方程式では、式 (19), (22) から、揺らぎそのものによりロスタームの緩和速度は倍となり、これは、揺動力が、緩和を早める力として存在する事を示す結果となり、当初、著者が考えていた揺らぎにより緩和速度は、早くもなり遅くもなりうるという推測とは、異なる結果であった．離散と連続の間隙を埋める上で、剛体球のような、ロングポテンシャルの影響が無視できる場に於いて、衝突以外の揺動力そのものが作用するかという点でも疑問は残った．という意味においては、平衡条件下での揺らぎの相関の定義 [5] の、非平衡条件下での拡張は、妥当でない可能性も残り、この点は、更なる議論の余地がある．

参考文献

(1) R. Kubo, The fluctuation-dissipation theorem, Reports on Progress in Physics, Volume 29, Issue 1, pp. 255-284 (1966).
(2) R. Fox and G. E. Uhlenbeck, Contributions to Nonequilibrium Thermodynamics II. Fluctuation Theory for Boltzmann equation, Phys. Fluids, Vol.13, No. 12, pp2881-2890, (1970).
(3) J. Logan and M. Kac, Fluctuations and Boltzmann equation. I., Phys. Rev. A, Vol. 13, No. 1, pp458-470, (1976).
(4) H. Ueyama, The stochastic Boltzmann equation and hydrodynamic fluctuations, J. Stat. Phys., 22, 1, pp1-26, (1980).
(5) S. Tsuge and K. Sagara, A new hierarchy system on the basis of a "Master" Boltzmann equation for microscopic density, J. Stat. Phys. Vol. 5, No. 5, pp403-425, (1975).
(6) L. D. Landau and E. M. Lifshitz, Fluid Mechanics, Course of Theoretical Physics Vol. 6, Addison-Wesley, Reading, (1959).