

進行する重力・表面張力波の流体粒子が描く軌道

Trajectories of fluid particles in a periodic water-wave

○ 東海林まゆみ, 日本女子大、理学部, 東京都目黒区, shoji@fc.jwu.ac.jp:
 岡本 久, 京大, 数理解析研, 京都市左京区, okamoto@kurims.kyoto-u.ac.jp:
 M. Shoji, Japan Women's University, Tokyo 112-8681
 H. Okamoto, RIMS, Kyoto University, Kyoto 606-8502

We consider two-dimensional progressive water-waves, which propagate with a constant speed and a constant shape. Fluid motion is assumed to be irrotational. Trajectories in a coordinate system attached to the wave are easily computed by drawing contours of the stream function. On the other hand, our interest is in trajectories of fluid particles in the stationary coordinates system. It is well-known that fluid particles in a linearized water wave of small amplitude move on a circle or an ellipse, namely closed curve. It is said that the fluid particle on the average does not move while the wave itself propagates with a constant speed. This is, however, a proposition which is valid only approximately. In fact, Stokes (1847) discovered that a particle trajectory is not closed. We compute trajectories of fluid particles and draw particle paths of gravity, capillary-gravity, and pure capillary waves. The stokes drift above is proved in a new method, and some numerical examples will be presented.

1. 問題

周期的な形状を保ちながら、一定速度で一定方向（左方向とする）に進行する波を考える。ここでは渦なし2次元流とする。このような進行波における流体粒子の軌道は（波といっしょに動く）動座標系では流れ関数の等高線を描けば容易にわかる。しかし我々は固定座標系での粒子軌道を求めることを考える。このような粒子軌道に関し、次のような事実が知られている。まず文献(6)にいく例かの可視化写真が紹介されている。しかしそれらはすべて重力波の場合であり、表面張力波や表面張力・重力波に関してはまだ何もわかっていない。一方古典的理論^(2,3)では波高が小さい重力波の線形波の場合、円または橢円軌道になること、つまり粒子は波の進行につれて引きずられることなく閉軌道をぐるぐる回ることがわかっている。しかしこれはあくまでも近似的に成立する事実である。Stokesは文献(5)で粒子軌道は閉曲線ではないことを示しており、Stokes driftと呼ばれている。また最近Constantinは深さが有限の場合、重力波のどの粒子軌道も閉曲線とはならないことを数学的に示した⁽¹⁾。

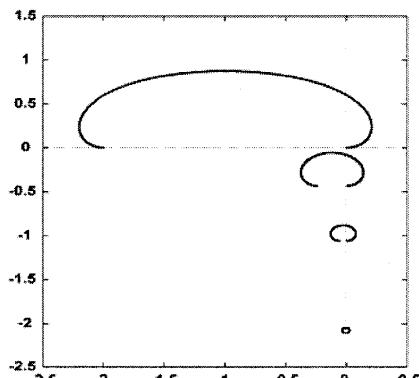


Fig. 1 極限波に近い重力波の粒子軌道

以上の背景をもとに、本発表では我々が計算した表面張力波、重力波、重力表面張力波の場合の粒子運動のアニメーションビデオとその計算法を紹介する。計算方法は、動く物体周りの粒子軌道を計算した文献(4)のアイディアを基にしている。それは深さ無限の流体の場合にのみ適用できる方法であるが、表面張力が働く場合にも適用できること、またConstantinの証明よりもはるかに

簡単に閉軌道とならないことを示せる、という点が着目すべき結果である。

2. 結果

Fig.1, Fig.2 は各々、極限波に近い重力波、表面張力波の厳密解であるCrapper 波の粒子軌道を描いたものである。どちらの図も縦軸を水深、横軸を粒子の移動距離として描いたもので、異なる深さにあるいくつかの粒子が各々スタート時と同じ深さに戻るまでを追った軌道である。いずれの結果も、水深が深くなるにつれて粒子が動く範囲は小さくなり、同じ深さに戻るまでの時間も短くなるが、すべての粒子軌道は閉軌道ではない。つまりすべての粒子は波の進行方向に引きずられることがわかる。

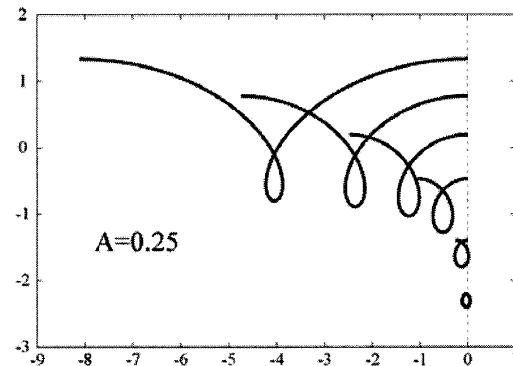


Fig. 2 Crapper 波の粒子軌道 ($A=0.25$)

参考文献

- (1) A. Constantin, The trajectories of particles in Stokes waves, *Invent. Math.*, 166 (2006), pp. 523–535.
- (2) H. Lamb, *Hydrodynamics*, Cambridge University Press, (1932).
- (3) L.M. Milne-Thomson, *Theoretical Hydrodynamics*, Fifth Edition, Macmillan (1968).
- (4) M. Shoji, H. Okamoto & T. Ooura, Particle trajectories around a running cylinder or a sphere, *Fluid Dynamics Research*, 42 (2010), 025506.
- (5) G G Stokes, On the waves of oscillatory waves, *Trans. Camb. Phil. Soc.* VIII (1847): Mathematical and Physical Papers vol. 1, 197–229.
- (6) M. Van Dyke, *An Album of Fluid Motion*, Parabolic Press (1982).