加速度運動する液滴の粘性ポテンシャル流解析

Viscous potential flow analysis of an accelerating liquid drop

○ 舟田 敏雄 (沼津工業高等専門学校:沼津高専), 沼津市大岡 3600, E-mail: funada@ece.numazu-ct.ac.jp
Joseph Daniel (University of Minnesota & University of California, Irvine; U of M & U of C), E-mail: Joseph@aem.umn.edu

Toshio FUNADA, Numazu National College of Technology, Numazu, Shizuoka 410-8501, Japan
Joseph Daniel, Department of Aerospace Engineering and Mechanics, University of Minnesota, Minneapolis, Minnesota 55455, USA and Department of Mechanical and Aerospace Engineering, University of California, Irvine, California 92617, USA

For a spherical liquid drop moving with constant acceleration, interfacial instability and oscillation may arise at the interface due to Rayleigh-Taylor (RT) and Kelvin-Helmholtz instability. Following after the analysis of RT instability for inviscid fluids, in which the dispersion relation is given in terms of Legendre polynomiials, effects of viscosity are discussed based on Viscous Potential Flow (VPF). In RT instability, the growth rate reduces at the instability region and damping oscillation may take place, as viscosity becomes large. The neutral state is given by the same value as inviscid theory and can be obtained even for very high Bond number.

Keywords: Rayleigh-Taylor Instability of Accelerating Liquid Drop, Viscous Potential Flow Analysis

1. はじめに

Harper, Grube & Chang[1] により，一定加速度 (重力加速度 $\boldsymbol{g}$) で運動する球状液滴の界面の Rayleigh-Taylor (RT) 不安定が非粘性流体について解析された．一方，衝撃波管に球状液滴を落下させると衝撃波により界面で RT 不安定が起こることが実験的に示され，粘性ポテンシャル流解析法 (VPF)[2] により液滴の平滑界面を仮定して RT 不安定機構が理論的に解析された．また，球状液滴の振動に対する粘性の効果について VPF で解析が行われた．本報告は，一定加速度 $\dot{V}$ で運動する球状液滴の表面の RT 不安定に対する線形安定性問題を VPF により解析し，粘性の効果を明らかにしたものである．

2. 線形安定性問題の定式化

Fig.1 に示すように，一定加速度 $\dot{V}$ で動いている球状液滴に固定した球座標系 (r, θ, φ) を用いて，液滴と周囲気体の流れについて，速度ポテンシャル $\phi \equiv \phi(r, \theta, t)$ に対する連続の式は軸対称な Laplace 方程式で与えられる．

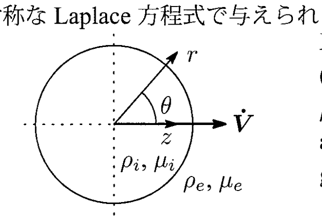

Fig.1 Spherical liquid drop (density ρ_i and viscosity μ_i) moving with constant acceleration $\dot{V}$, in the outer gas of ρ_e and μ_e.

球状液滴は $0 \le r < R$ (R: 液滴の平均半径) にあり，周囲気体は $R < r < \infty$ に配置される．流体の圧力 p, 密度 ρ, 時間 t の任意関数を $f(t)$ として，Bernoulli の方程式が与えられる．気液界面 $r = R + \eta$ ($\eta \equiv \eta(\theta, t)$: 界面変位) での運動学的条件と法線応力の釣合が与えられる．液滴の体積の保存が成り立つ．

2.1 液滴界面の Rayleigh-Taylor 不安定の線形理論

平衡状態に微小擾乱を重ね合わせ，線形安定性問題を定式化する．慣用の無次元表現を用い，級数解 $\eta = \imath y(\mu) \exp(\imath \omega t)$, $y(\mu) = \sum_{n=1}^{\infty} C_n P_n(\mu)$ (C_n: 係数, $P_n(\mu)$: Legendre の多項式) を仮定すると，分散関係式が導かれる．

3. 中立安定，最大成長率と臨界値

非粘性流体の場合の分散関係式は，$n = 2, 3, \cdots, n_1$ について，C_k の $n_1 - 1$ 次の線形連立同次代数方程式であり，可解条件は C_k の係数行列の行列式が zero となることである．それは ω^2 の $n_1 - 1$ 次の代数方程式であり，Bond 数 B_o と密度比 $\hat{\rho}$ と Reynolds 数 R_e が与えられると，解 ω^2 が求められる．さらに，定常状態 ($\omega = 0$) では，VPF も非粘性理論も共に，C_k の $n_1 - 1$ 次の線形連立同次代数方程式の可解条件により，B_o^{-1} の $n_1 - 1$ 次の線形連立同次代数方程式になり，解 B_o^{-1} が求められる．

n_1 が奇数のとき，B_o^{-2} の $(n_1 - 1)/2$ 次の代数方程式となり，中立状態を与える B_{oc} が $(n_1 - 1)/2 = n_2$ 個求められる．また，n_1 が偶数のとき，$B_o \to \infty$ を除き B_o^{-2} の $(n_1 - 2)/2$ 次の代数方程式となり，中立状態を与える B_{oc} が $(n_1 - 2)/2 = n_2$ 個求められる．n_1 を大きくして代数方程式を計算すると，j ($j = 1, 2, \cdots, n_2$) 番目の $(B_{oc})_j$ の値は精度が高くなる: これまでに，3000 個の mode について B_o 値が得られた．

4. VPF の固有値

$n_1 = 11, B_o = 12, R_e = 1$ のときの $\omega = -0.0133\imath$ (不安定), $\omega = 0.1855\imath$ (減衰) である．他の 18 個の固有値も虚部のみで，正であるから，粘性の効果が非常に顕著であり $\exp(\imath \omega t)$ により時間的に減衰することを表す．$B_o = 12, R_e = 10^4$ では，2 個の固有値は虚部のみで，$\omega = -0.2638\imath$ は不安定，$\omega = 0.3302\imath$ は安定であることを表す．他の 18 個の固有値は複素数で，実部は角振動数，正の虚部は減衰を表すので，粘性による減衰振動を表す．$R_e > 10^6$ では，非粘性理論の結果に近づく．

5. おわりに

一定加速度で運動する液滴の表面の Rayleigh-Taylor 不安定による線形安定性問題を粘性ポテンシャル流解析法を用いて解析した．粘性の効果により，不安定領域で最大成長率は減少し，安定領域では減衰振動が起こる．中立安定状態は，VPF 理論では非粘性流体の理論と同じ B_o 値で与えられる．液滴の表面変形の計算例は講演の際に示す．

参考文献

(1) E. Y. Harper, G. W. Grube, & I-D. Chang: On the breakup of accelerating liquid drops, *J. Fluid Mec.* 52 (1972), 565 - 591.
(2) D. D. Joseph, T. Funada and J. Wang: *Potential Flows of Viscous and Viscoelastic Fluids*. Cambridge University Press, 2007.