Riccati 変換と戸田 dual 変換

大教大物理　　鯖田秀樹

（2月20日受理）

§1. 非線形と線形

非線形問題を変換によって線形問題に帰着することができる場合がある。そのとき変換を別のやり方で行うと当然別の線形問題に帰着される。こうして得られる異なった線形問題の間にはどのような関係があるかを考えることは物理学としては興味がある。

最も簡単な一階 Riccati 方程式の場合について考えてみよう。この微分方程式は抵抗項を考えた非線形放物体運動や化学反応を記述するのに昔からよく用いられている。

Riccati 方程式は簡単な変換で二階線形微分方程式になる。この線形方程式は上の例では振動の方程式であり，よく知られた物理系である。線形化する変換としては2つが考えられ，振動の物理系も2種類得られる。

格子振動についての Toda の双対鎖[1]と同じく，これら2種の振動系も戸田 dual 変換で結びつけ得ることを示す。

§2. 一般の Riccati 方程式の線形化

一階 Riccati 方程式

$$\frac{dy}{dx} + Q(x)\,y + R(x)\,y^2 = P(x) \tag{1}$$

において，変換

$$y \equiv \frac{1}{R(x)}\,\frac{u'}{u} = \frac{1}{R(x)}\,\frac{d}{dx}(\log u) \tag{2}$$

を行うと，

$$u'' + \left\{ Q(x) - \frac{R'(x)}{R(x)} \right\} u' - P(x)R(x)\,u = 0 \tag{A}$$

なる二階線形微分方程式が得られる。この変換が伝統的に微分方程式のテキストに書かれてあって，この変換で線形化を行うのがふつうである。[2]

つぎに(2)の変換と異なる変換を考えよう。それにはuとu'の役割をいれかえた変換がよさそうに思われる。

(1)において，変換

$$y \equiv P(x)\frac{v}{v'} = P(x)\frac{1}{\frac{d}{dx}(\log v)} \tag{3}$$

を行うと，

$$v'' - \left\{\frac{P'(x)}{P(x)} + Q(x)\right\} v' - P(x)R(x)v = 0 \tag{B}$$

なる二階線形微分方程式が得られる。

R(x)の形が簡単なときには伝統的な(2)の変換がよく，P(x)の形が簡単なときには(3)の変換を用いるのがよいと思われる。

(A)と(B)とはどんな関係があるかを考えてみる。P(x)，Q(x)，R(x)がともに定数のときには(A)，(B)の左辺の微分表式はお互に随伴微分表式になっている。このことから物理系で考えてもお互に反対的な関係にありそうなことが予想される。

§3. 物理系が振動系になる場合

化学反応や放物体運動を扱う微分方程式として

$$\frac{dx}{dt} + \varepsilon + kx + Kx^2 = 0 \tag{4}$$

を考えよう。xは問題とする物理量，tは時間，ε，k，Kは定数である。

変換(2)はこの場合

$$x \equiv \frac{1}{k}\ \frac{u'}{u}$$

であり，変換後の微分方程式は

$$\frac{d^2u}{dt^2} + k\frac{du}{dt} + K\varepsilon u = 0 \tag{5}$$

となる。

一方，変換(3)はこの場合には

$$x \equiv -\varepsilon\ \frac{v}{v'}$$

であるから，変換後の微分方程式は

$$\frac{d^2 u}{dt^2} - k\frac{du}{dt} + K\varepsilon u = 0 \tag{6}$$

となる。

定数 ε，k，Kを正とし，$K\varepsilon = \omega^2$とすると，これらは振動の方程式である。

(5)式で $k = 2\gamma$，$K\varepsilon = \omega^2$ とおくと，

$$\frac{d^2 u}{dt^2} + 2\gamma\frac{du}{dt} + \omega^2 u = 0 \tag{7}$$

となり，線形減衰振動の方程式である。[3)]

この方程式の解は係数の値によって3つの場合に分けられ，

(i) $\gamma < \omega$ ($k < 2\sqrt{K\varepsilon}$)の場合は減衰振動。

(ii) $\gamma > \omega$ ($k > 2\sqrt{K\varepsilon}$)の場合は過減衰。

(iii) $\gamma = \omega$ ($k = 2\sqrt{K\varepsilon}$)の場合は限界減衰。

となる。しかしこれらの解のすべてがもとの非線形の物理系の解として意味をもつとはかぎらない。線形系では意味のある初期条件でもそれに対応する非線形系では意味のない初期条件となっていることがある。

また，変換式の分母が0になる時間で対応がつけられなくなり，もとの非線形の系は線形振動の一部分と関係をもつとしかいえない。

つぎに，(6)式を考えてみよう。これは負抵抗をもった振動であり，時間とともに振動はしだいにはげしくなる。しかし対応は全時間ではなく物理的に矛盾することはない。

こうして，随伴表式は振動の場合には正抵抗と負抵抗の関係であることがわかる。

§4. 単振動になる場合

(4)式で，$k = 0$の場合を考える。変換(2)，(3)のいずれを使っても，単振動の方程式

$$\frac{d^2 u}{dt^2} + \omega^2 u = 0 \tag{8}$$

が得られる。$\omega^2 = K\varepsilon$である。

(8)の第1積分はエネルギーの関係式であり，

$$\frac{1}{2}\dot{u}^2 + \frac{1}{2}\omega^2 u^2 = E \tag{9}$$

となる。Eは定数。

格子振動についての戸田 dual 変換はこの場合は自由度が1であるから

$$u=\frac{\dot{v}}{\omega}\quad,\qquad \dot{u}=-\omega v \tag{10}$$

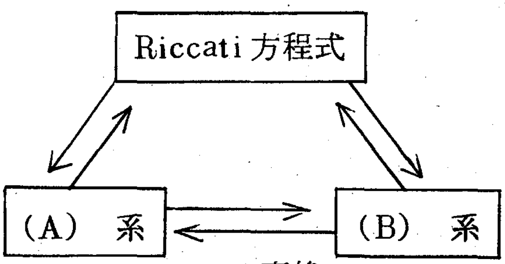
で，$(u,\dot{u})$を$(v,\dot{v})$に変換することになる。

変換した系でも，(8)式と(9)式の形は同じであるが，運動エネルギーとポテンシャル・エネルギーの役割が入れかわっている。

(10)式により，2種類の変換(2)，(3)が結びつく。

$$x=\frac{1}{K}\,\frac{\dot{u}}{u}=-\varepsilon\frac{v}{\dot{v}}$$

となる。このことから，簡単な単振動になる場合には(A)系と(B)系はお互に戸田 dual 変換で結びつけられることがわかる。図で説明すれば，



となる。

§5. 結　論

Riccati 方程式を線形化するのに，伝統的な変換のほかに変換(3)が考えられる。変換が異なるのだから，線形方程式も異なる。これら2つの線形系の間には，随伴関係もある。特に簡単な場合は，dual 系の関係にある。非線形問題を線形問題に変換できる場合には，変換のやり方が多く考えられる。結果の線形系の間の関係を考えることは興味あることと思われる。

参　考　文　献

1) H. Davis : Instroduction to Nonlinear Differential and Integral Equations, p.59. (Dover)

2) M. Toda : Prog. Theor. Phys. Suppl. №36('66).

3) 戸田　盛和　「振動論」　培風館。